

材料力学



Golden, CO, USA (2009)

京都大学農学部地域環境工学科

中嶋 洋

Ver. 2.0

04/08/2011

目次

1	はじめに	1
1.1	復習：自由物体線図と拘束力の概念	1
1.1.1	単純支持はりの場合	2
1.1.2	片持はりの場合	2
1.2	復習：せん断力と曲げモーメント	3
1.3	材料力学の流れ	4
2	エネルギー法	6
2.1	弾性ひずみエネルギー	6
2.2	はりの曲げによるひずみエネルギー式	7
2.3	マクセルの定理	8
2.4	カスチリアノの定理	10
2.5	仮想仕事の原理	10
2.6	問題演習	12
3	エネルギー法によるたわみの問題の解法	13
3.1	弾性ひずみエネルギーとカスチリアノの定理	13
3.2	片持支持集中荷重の場合	13
3.3	両端支持集中荷重の場合	15
3.4	両端支持分布荷重の場合	16
3.5	問題演習	19
4	不静定問題 (1)	20
4.1	静定と不静定	20
4.1.1	静定問題	20
4.1.2	不静定問題	20
4.2	1次元問題 (その1)～引張圧縮	21
4.3	1次元問題 (その2)～熱応力	22
4.4	1次元問題 (その3)～内部応力	23
4.5	問題演習	24
5	不静定問題 (2)	25
5.1	両端固定単純はりの不静定問題	25
5.1.1	例題	25
5.2	一端固定+他端単純支持はりの場合	27
5.2.1	例題	27
5.3	連続はりの不静定問題	29
5.3.1	復習	29
5.3.2	3モーメントの式	29
5.3.3	例題	31
5.4	問題演習	32

6	棒のねじり	34
6.1	丸棒のねじり	34
6.2	伝達動力	36
6.3	中空丸軸のねじり	36
6.4	応用：曲げとねじりを受ける丸軸	37
6.5	例題	38
6.6	問題演習	39
7	特殊なはり	40
7.1	組合せはり	40
7.2	例題	40
7.3	鉄筋コンクリート	42
7.4	曲りばり	44
7.4.1	曲りばりの応力とひずみ	44
7.4.2	曲りばりの断面係数	45
7.4.3	薄肉曲りばりのひずみエネルギー	46
7.5	例題	47
7.6	問題演習	48
8	有限要素法	50
8.1	はじめに	50
8.2	1次元の問題	50
8.2.1	基本的な考え方	50
8.2.2	基本的な概念	52
8.2.3	バネモデルの例題	53
8.3	はりの問題の有限要素法の理論*	55
8.4	プログラミング	57
8.5	例題1：集中荷重を受ける単純支持はり	63
8.5.1	データの準備	63
8.5.2	実行結果	64
8.5.3	結果の検討	65
8.6	例題2：集中荷重を受ける片持はり	67
8.6.1	データの準備	67
8.6.2	解析実行結果	67
	参考文献	70

1 はじめに

応用力学で学習した項目を以下にまとめる。

- 力とモーメント
- 剛体における力のつりあい
- 応力とひずみの考え方
- 断面の幾何学的性質
- はりの種類
- せん断力と曲げモーメント
- たわみの求め方 (重複積分による)
- モールの応力円 (2次元応力)
- トラスの解法 (力のつりあい；モーメントのつりあい)

特に材料力学の基本事項として理解し、覚えておくべきものは**せん断力**と**曲げモーメント**である。

1.1 復習：自由物体線図と拘束力の概念

図 1-1(a) に示す剛体床上の物体を考える。既知自重を W とし、いま床の上を運動することなしに留まっているものとする。

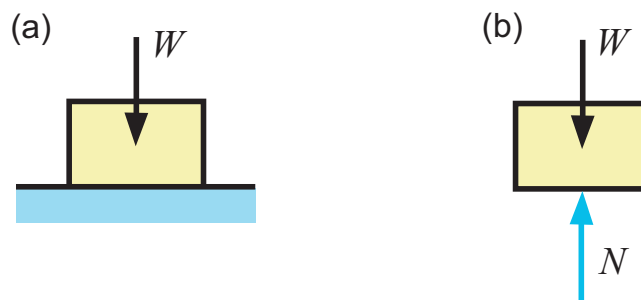


図 1-1 自由物体線図 (FBD) の考え方

さて、思考実験として床を取り外すものとする。物体がその場に留まるためには存在していた床の支持反力 N を作用させることが必要になる。すなわち図 1-1(b) のようになる。このように対象とする物体のみに着目し、それに作用する力関係を描いた (b) 図を**自由物体線図 (Free-body Diagram; FBD)** という。

また支持反力 N のような力を物体の移動や回転を拘束するという意味で**拘束力 (Force of constraint)** という。これはいわゆる作用力に対する反作用力として表現されるものである。

1.1.1 単純支持はりの場合

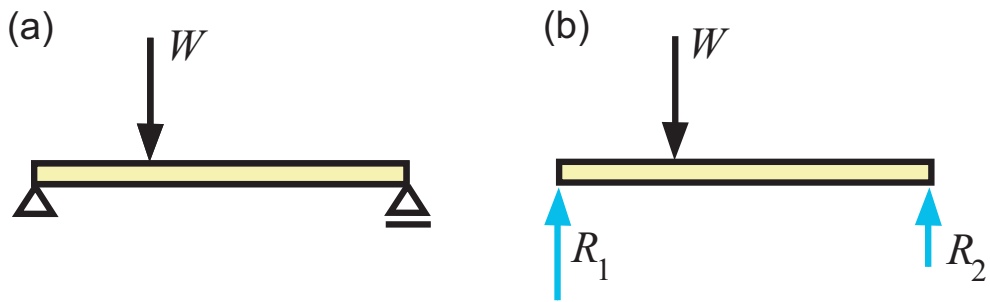


図 1-2 単純支持はりの場合の自由物体線図 (FBD)

図 1-2 の単純支持はりを考えると，図 1-2(b) に示すような FBD が得られる．したがって，未知反力 R_1 ， R_2 は，はりの長さ と 載荷点の位置 が 与えられ る と 剛体の力のつりあい条件：

$$\sum F = 0 \quad (1.1)$$

$$\sum M = 0 \quad (1.2)$$

により決定できることは明らかである．

1.1.2 片持はりの場合

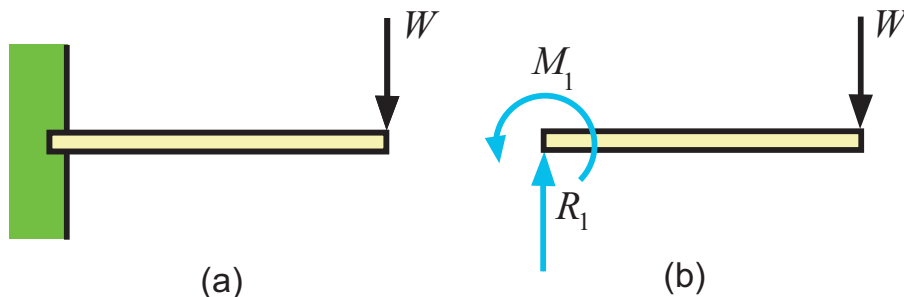


図 1-3 片持はりの場合の自由物体線図 (FBD)

図 1-3 の片持はりを考えると，図 1-3(b) に示すような FBD が得られる．支点では，はりに作用する荷重を支持するための支持反力の他に，はりの回転を止めるための支持モーメントが反作用として発生していることに注意する．

1.2 復習：せん断力と曲げモーメント

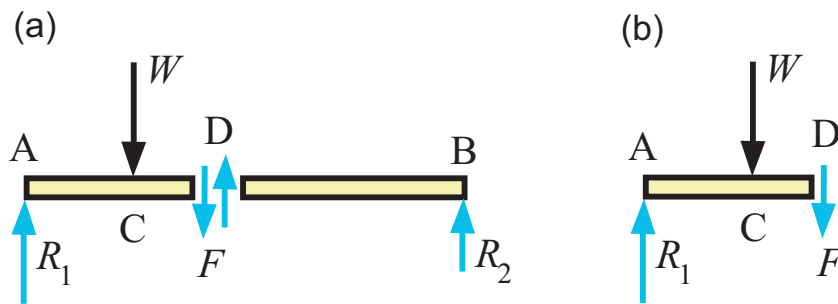


図 1-4 FBD とせん断力

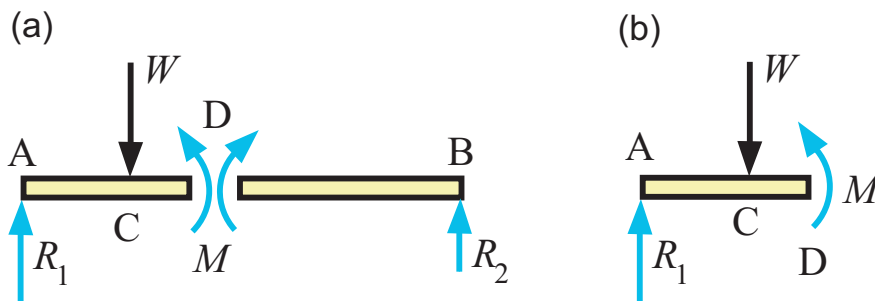


図 1-5 FBD と曲げモーメント

図 1-2(b) のはりの任意の場所(A 点から距離 x とする)における力(内力～抵抗力～としてのせん断力と曲げモーメント)を調べるためにはりを点 D で仮想切断し、その断面より左の部分を取り出し、FBD を作図すると図 1-4(b) と図 1-5(b) のようになる。なお F と M は、それぞれ距離 x におけるせん断力と曲げモーメントであり、符号として便宜的に図中の矢印の方向を「負」とする。

図 1-4(b) より、力のつりあいは、符号を座標系にあわせて機械的に上向きを正にとると；

$$R_1 - W - F = 0 \quad (1.3)$$

すなわち、せん断力 F について解くと；

$$F = R_1 - W \quad (1.4)$$

今、せん断力 F の符号として、改めて部材 AD を上に移動させる方向を「正」とすると、上式(1.4)は、そのまま A 点から距離 x における断面 D で見たせん断力の式となる。

同様に図 1-5(b) より、A 点から距離 x にある点 D において、機械的に左回りを「負」としてモーメント M のつりあいを求めると (AC 間を距離 a として)；

$$-M - W(x - a) + R_1x = 0 \quad (1.5)$$

すなわち、曲げモーメント M について解くと；

$$M = R_1x - W(x - a) \quad (1.6)$$

が得られる。

つまり、曲げモーメントの符号として、改めて部材 AD を観察点である D 点に関して右回りに回転させる方向を「正」とすると、上式はそのまま A 点から距離 x の位置の曲げモーメント式となる。この方向は、正のモーメントのペアが部材 AD の両端に作用するとき、部材が下向きに凸の変形をする方向をも意味する。

【重要】 せん断力と曲げモーメントの符号をまとめると；

- 任意の断面におけるせん断力は、断面の左側を右側に対して上向きにせん断するものを「正」とする。
- 曲げモーメントは、任意の断面位置において部材を右回りさせる方向（部材が下向きに凸変形する方向）を「正」とする。

1.3 材料力学の流れ

応用力学での知識を踏まえて、材料力学では問題解法の基礎となる重複積分法、重ね合わせ法に加えて、新たにエネルギー法を学習するとともに、主として不静定問題を対象に様々な問題の解き方を習得する。また機械設計現場での応用として、有限要素法と呼ばれる数値解析の基本についても簡単な例題により学習する。材料力学における項目内容の関係を図に示す。

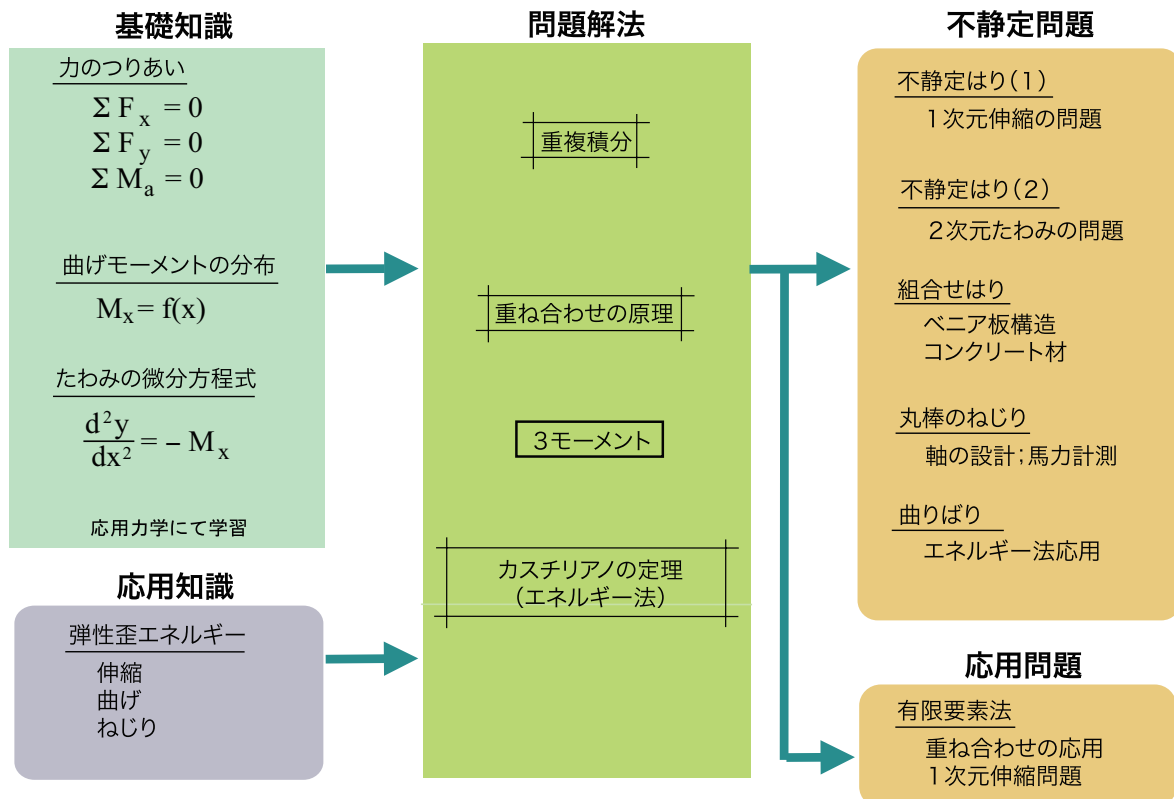


図 1-6 材料力学での要点図

本資料での用語標記は、文部科学省日本機械学会共編：学術用語集 機械工学編増訂版(丸善, 1985年)によった。

また、当学科では、2回生の前期と後期に分けて、応用力学（材料力学の静定問題）、材料力学（主として不静定問題と応用）を履修する。この資料では、前出の図 1-6にある学習内容について概要をとりまとめている。

材料力学の書籍はこれまでも多く出版されているが、中でも資料最後に記載の書籍を参考としている。本資料で分かりにくい箇所は、各自で補習することが望まれる。

なお、有限要素法の中の8.3節は、はりの問題についての有限要素法の理論をまとめた部分であるが、講義では省略する。

2 エネルギー法

物理では、質点が力 F をうけて距離 s 移動したときになす**仕事 (work)** U_e は $U_e = F \cdot s$ というものであった。**エネルギー (energy)** は、例えば運動エネルギー、位置エネルギーのように質点の運動速度、位置により決定された。単位系から明らかであるが、仕事とエネルギーは同じもの(単位は J; Joule)である。また、数学的に力は大きさと方向を持つベクトル量、移動距離も大きさと方向を持つベクトル量であり、力と距離の積で計算される仕事(エネルギー)はスカラー積である。

2.1 弾性ひずみエネルギー

材料力学で対象とするエネルギーは、構造物が外力の作用を受ける際に構造物中に蓄えられる(内力による)エネルギーを意味する。例えば、金属材料棒において、力を加えると伸びが発生する。材料を弾性ばねに見立てると、よく知られているように弾性ばねの伸び x と加えた荷重 F の間には、

$$F = kx \quad (2.1)$$

というフックの法則が成り立つ。ここでばね定数を k としている。

このばねの式(2.1)を元に、加えられた外力によるエネルギーを求めてみる。今、引張力 F が作用して発生した伸び x のばねに着目する。力 F を受けて着目する要素が微小長さ dx だけ伸びたものとする。ばねになされる仕事(つまりエネルギー)の増加分 dU は；

$$dU = Fdx \quad (2.2)$$

となる。このエネルギー増分量を基準伸び $x = 0$ から全体の伸び x まで積分すれば、 x だけ伸びたばねに貯えられる全体のエネルギー U が次のように求められる。

$$U = \int_0^x Fdx = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2} \quad (2.3)$$

物体に力を加えると変形するが、力を取り去るともとの形に戻るとというのが弾性である。ばねは弾性体であるので、ばねの伸び(単位基準に対してはひずみ)で表現されたこのエネルギーを**弾性ひずみエネルギー (elastic strain energy)** という。また、周知のようにばねは外力 F を取り去るとばねの初期長さにもどることから、伸びによりばねに貯えられたエネルギーは全て保存されて元の長さに戻ることに消費されているとみなすことができる。

ある試験片に外力 W が作用したときの伸びを λ とすると、この試験片に蓄えられる弾性ひずみエネルギーは図 2-1 を参考に；

$$U = \frac{W\lambda}{2} \quad (2.4)$$

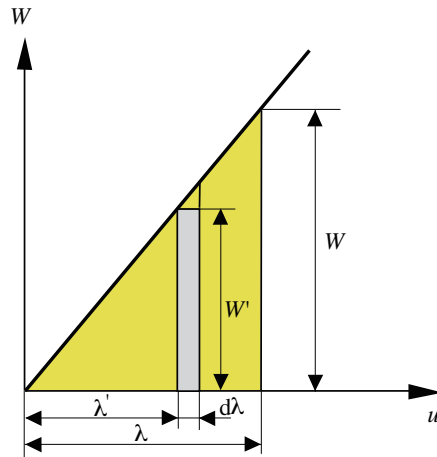


図 2-1 弾性ひずみエネルギー.

図 2-1 で、外力 W' が dW' 増加するとき、伸びも λ' から $d\lambda'$ 増加するものとする、この間にした仕事 dU は、高次の微小量を見捨てることとすると $dU = W'd\lambda'$ 、また関数は $W' = \frac{W}{\lambda}\lambda'$ であることから；

$$U = \int_0^\lambda dU = \int_0^\lambda W'd\lambda = \int_0^\lambda \frac{W}{\lambda}\lambda'd\lambda'$$

により (2.4) 式が得られる。

試験片の長さを l 、断面積を A 、ヤング率を E とすると、別の表現として；

$$U = \frac{W^2 l}{2EA} \tag{2.5}$$

重要 外力を受けた結果発生する内力によってひずみが発生することから、応力とひずみで表現するひずみエネルギー式もある。すなわち、 $W = \sigma A$ 、 $\sigma = E\varepsilon$ より、

$$U = \frac{\sigma^2 Al}{2E} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} Al \tag{2.6}$$

2.2 はりの曲げによるひずみエネルギー式

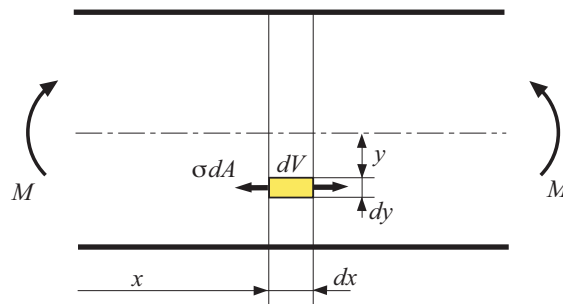


図 2-2 曲げモーメントを受けるはりの応力

曲げモーメント M を受けるはりの内部に発生する応力は、断面二次モーメントを I とすると；

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

であり、**図 2-2** のようにはりの断面の高さ (中立軸を基準にして) y 方向に線形分布となる¹。

この応力 σ による (弾性) ひずみエネルギーを考える。微小体積要素を $dV = dA dx$ とすると、引張 (あるいは圧縮) 応力 σ によるひずみエネルギーは；

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2}(\sigma dA)(\varepsilon dx) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dV \end{aligned}$$

したがって、はりの断面高さ方向 (面積) および全長 (長さ) にわたって dU を積分することで曲げモーメント M で表したひずみエネルギーが求められる。

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \int_A \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dA dx \\ &= \int_0^l \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA dx \\ &= \int_0^l \left(\frac{M^2}{2EI^2} \int_A y^2 dA \right) dx \\ &= \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \quad \left(\because \int_A y^2 dA = I \right) \end{aligned}$$

2.3 マクセルの定理

図 2-3(a) のように物体 (丸棒) の任意の点 A と点 B にそれぞれ外力 $P_i (i = 1, 2)$ が作用してつりあっているとする。

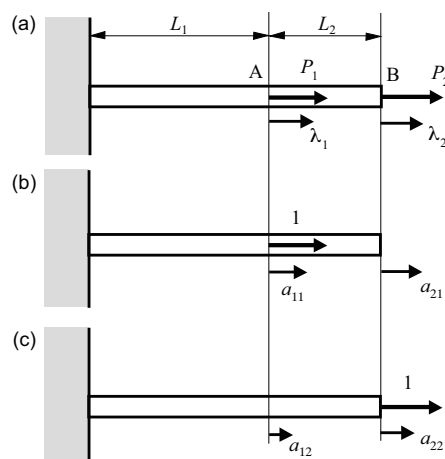


図 2-3 荷重と変形.

¹応用力学参照。

変形が小さいとき、外力 P_1, P_2 が同時に作用するときの点 A と点 B での外力作用方向の変位は、重ね合わせの原理によりそれぞれ；

$$\lambda_1 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2$$

$$\lambda_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2$$

と表わすことができる。ここに、係数 a_{11} は図 2-3(b) のように $P_1 = 1, P_2 = 0$ としたとき、点 A に作用する外力 P_1 による変位成分である。また係数 a_{12} は図 2-3(c) のように $P_1 = 0, P_2 = 1$ としたときの点 A に作用する外力 P_2 の外力による変位成分を意味する。 a_{21}, a_{22} についても同様の意味である。したがって、外力の大きさ P_1, P_2 と係数 a_{11}, a_{12} により A 点, B 点での変位が表されるのは明らかである。

いま、この状態から外力 P_1, P_2 に微小変化 dP_1, dP_2 を与えたときに生じる λ_1, λ_2 の変化を $d\lambda_1, d\lambda_2$ とすると、ひずみエネルギーの増分 dU は；

$$\begin{aligned} dU &= P_1 d\lambda_1 + P_2 d\lambda_2 \\ &= P_1(a_{11}dP_1 + a_{12}dP_2) + P_2(a_{21}dP_1 + a_{22}dP_2) \\ &= (a_{11}P_1 + a_{21}P_2)dP_1 + (a_{12}P_1 + a_{22}P_2)dP_2 \end{aligned}$$

ひずみエネルギー U は外力 P_1, P_2 の連続関数であるから、 P_1, P_2 の微小変化に伴うひずみエネルギー U の微小変化は；

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial U}{\partial P_2} dP_2 \quad (2.7)$$

と表せる。この関係が任意の dP_1, dP_2 に関して恒等的に成立するから、

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = a_{11}P_1 + a_{21}P_2, \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} = a_{12}P_1 + a_{22}P_2 \quad (2.8)$$

さらに、これらの偏導関数がそれぞれ P_1, P_2 の連続関数であるから；

$$\frac{\partial}{\partial P_1} \left(\frac{\partial U}{\partial P_2} \right) = \frac{\partial}{\partial P_2} \left(\frac{\partial U}{\partial P_1} \right) \quad (2.9)$$

これより、機械的に；

$$a_{12} = a_{21} \quad (2.10)$$

この関係式(2.10)を Maxwell の定理 (Maxwell's theorem), または相反定理 (reciprocal theorem) という。

補足 (2.10) 式の意味は、「 $P_2 = 1$ が単独で P_1 の作用点に生じさせる P_1 方向の変位は、 $P_1 = 1$ が単独で P_2 の作用点に生じさせる P_2 方向の変位に等しい」というもの。すなわち変位はお互い様ということ。

重要 一般形では、 $a_{ij} = a_{ji}$ 。

2.4 カスチリアノの定理

前節より,

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = a_{11}P_1 + a_{21}P_2, \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} = a_{12}P_1 + a_{22}P_2 \quad (2.11)$$

この式にマクセルの定理を適用すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial P_1} &= a_{11}P_1 + a_{21}P_2 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2 = \lambda_1 \\ \frac{\partial U}{\partial P_2} &= a_{12}P_1 + a_{22}P_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2 = \lambda_2 \end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial P_1} &= \lambda_1 \\ \frac{\partial U}{\partial P_2} &= \lambda_2 \end{aligned}$$

となる.

一般に外力 $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ が作用して物体に蓄えられる弾性ひずみエネルギーを U とすると, 外力 P_i の作用点における P_i 方向の変位 λ_i は,

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \lambda_i \quad (2.12)$$

これをカスチリアノ (Castigliano) の定理²という.

重要 ここで述べている外力 P_i は単なる力のみではなく, 曲げモーメント, ねじりモーメントを含む広い意味をもつ. このような外力を**一般化力 (generalized force)**という. また, それぞれの外力に対応した変位を**一般化変位 (generalized displacement)**という. この対応関係を表 2-1 にまとめる.

表 2-1 一般化力と一般化変位.

一般化力	一般化変位
力 P	変位 λ
曲げモーメント M	たわみ角 θ
ねじりモーメント T	ねじり角 φ

2.5 仮想仕事の原理

断面積 A , 長さ L の弾性棒が外力 F を受けて, u の伸びを発生している時, 棒内部に貯えられるひずみエネルギーは (2.3) 式に既出のように;

$$U = \frac{Pu}{2} = \frac{1}{2}Ku^2 \quad (2.13)$$

²正確には, カスチリアノの第 2 定理という.

ただし, $K = AE/L$ としている.

この状態から, 外力一定のものでさらに微小伸び δu を加えると, 外力 F による仕事は

$$\delta W = F\delta u \quad (2.14)$$

となる.

一方, このとき内部ひずみエネルギーは;

$$U' = \frac{1}{2}K(u + \delta u)^2 \quad (2.15)$$

となるので, 微小伸びによるエネルギーの増加分は;

$$\delta U = U' - U = \frac{1}{2}K\delta u(2u + \delta u) \quad (2.16)$$

ここで, $u \gg \delta u$ であるから, δu の 2 次項は無視できて;

$$\delta U \simeq Ku\delta u = F\delta u \quad (2.17)$$

したがって,

$$\delta U = \delta W \quad (2.18)$$

これは, 内部仮想仕事 δU と外部仮想仕事 δW が等しいことを意味している. この関係を**仮想仕事の原理** (Principle of virtual work) という.

また (2.18) 式の右辺を左辺に移項して:

$$\delta(U - W) = 0 \quad (2.19)$$

ここで, 改めて全ポテンシャルエネルギー Π として $\Pi = U - W$ とおくと,

$$\delta\Pi = 0 \quad (2.20)$$

この式 (2.20) は, 対象物がつりあいにあるとき, 全ポテンシャルエネルギーが極値を持つことを意味する. また, ポテンシャルエネルギーは最小値をとることをも意味する. このことから, (2.20) 式を**最小ポテンシャルエネルギーの原理** (Principle of minimum potential energy) という.

2.6 問題演習

問題 2-1 図 2-4 のように両端を固定した棒 AB の一部に軸力 P が図のように作用している。固定端 A での反力 R_A をカスチリアノの定理により求めなさい。ただし棒の断面積を A 、ヤング率を E とする。

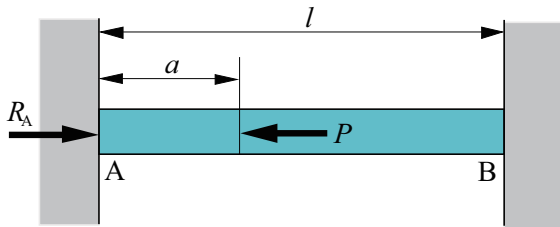


図 2-4

問題 2-2 図 2-5 のように上端を固定した長さ l の棒がある。今高さ h から荷重 W の重錘を棒の下端にある受け皿に落下させる。このときの棒の衝撃伸び λ を求めなさい。ただし棒の断面積を A 、ヤング率を E とする。

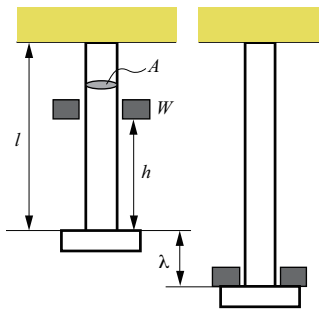


図 2-5

3 エネルギー法によるたわみの問題の解法

3.1 弾性ひずみエネルギーとカスチリアノの定理

はりの距離 x における曲げモーメントを M_x とすると、この断面の中立軸より y の位置の応力は $\sigma = M_x \cdot y / I_z$ であった。この応力が作用する面を dA 、軸方向長さを dx と置くと、微小体積 $dv = dA dx$ に貯えられる弾性ひずみエネルギー du は；

$$du = \frac{\sigma^2}{2E} dv = \frac{1}{2E} \left(\frac{M_x y}{I_z} \right)^2 dv$$

このエネルギーをはり全体にわたって求めると；

$$\begin{aligned} U = \int du &= \int_x \int_A \frac{1}{2E} \left(\frac{M_x y}{I_z} \right)^2 dA dx \\ &= \int_x \frac{M_x^2}{2EI_z^2} \int_A y^2 dA dx = \int_x \frac{M_x^2}{2EI_z} dx \end{aligned} \quad (3.1)$$

が得られる。

また既に述べたようにカスチリアノの定理より；

$$\lambda_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (3.2)$$

すなわち、「弾性ひずみエネルギー式を位置 i における載荷荷重 P_i で偏微分するとその場所での荷重方向のたわみ(変位)が求められる。」

便利な表現として；

$$y_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{1}{EI_z} \int_x M_x \frac{\partial M_x}{\partial P_i} dx \quad (3.3)$$

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} = \frac{1}{EI_z} \int_x M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_i} dx \quad (3.4)$$

もある。

3.2 片持支持集中荷重の場合

図3-1のような集中荷重 P を受ける長さ L の片持はりの最大たわみ y_{max} をエネルギー法により求めなさい。

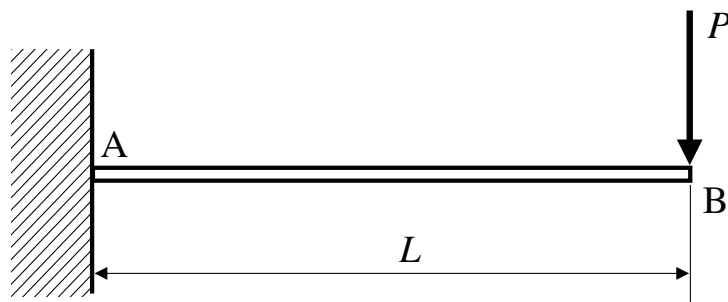


図3-1 集中荷重の場合のエネルギー法

解 最大たわみは荷重 P が作用する点 B において発生する。支点 A から距離 x での曲げモーメントは；

$$M_x = -PL + Px$$

よって弾性ひずみエネルギーは

$$U = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L M^2 dx$$

したがって、カスチリアノの定理より

$$\begin{aligned} y_{max} &= \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial P} dx \\ &= \frac{1}{EI_z} \int_0^L (Px - PL)(x - L) dx \\ &= \frac{P}{EI_z} \int_0^L (x - L)^2 dx \\ &= \frac{P}{EI_z} \left[\frac{1}{3}(x - L)^3 \right]_0^L \\ &= \frac{PL^3}{3EI_z} \end{aligned}$$

となる。

図 3-1 のような集中荷重 P を受ける長さ L の片持りの点 B のたわみ角 θ_B をエネルギー法により求めなさい。

解 荷重 P が作用する点 B において仮想的に曲げモーメント M_B が荷重以外に作用するものとする。また支点 A のモーメントは M_0 であるからモーメントのつりあいより $M_0 + M_B + PL = 0$ 、すなわち $M_0 = -M_B - PL$ となる。支点 A から距離 x での曲げモーメントは；

$$M_x = Px + M_0 = Px - M_B - PL$$

明らかに $\partial M_x / \partial M_B = -1$ である。

したがってカスチリアノの定理より；

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{\partial U}{\partial M_B} = \frac{1}{EI_z} \int_x M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_B} dx \\ &= \frac{1}{EI_z} \int_0^L (Px - M_B - PL)(-1) dx \\ &= \frac{-1}{EI_z} \left[\frac{P}{2}x^2 - M_Bx - PLx \right]_0^L \\ &= \frac{-1}{EI_z} \left\{ \frac{P}{2}L^2 - M_BL - PL^2 \right\} \\ &= \frac{-1}{EI_z} \left\{ -\frac{P}{2}L^2 \right\} \quad (M_B = 0) \\ &= \frac{PL^2}{2EI_z} \end{aligned}$$

3.3 両端支持集中荷重の場合

図3-2のような集中荷重 P が全長 l の両端支持はりの A 支点から距離 a に作用している。A 支点のたわみ角をエネルギー法により求めなさい。

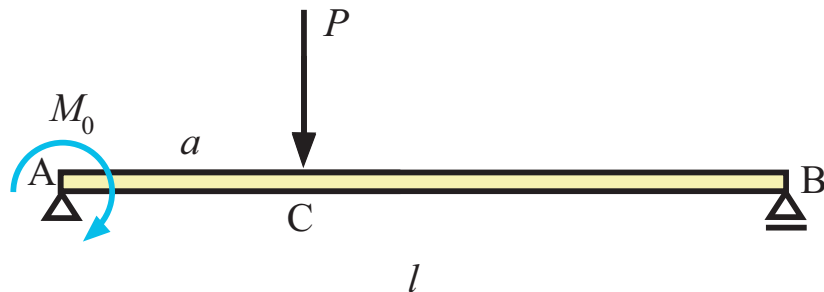


図3-2 たわみ角へのエネルギー法応用

解 図のように集中荷重 P が作用する時、A 支点、B 支点での支持反力をそれぞれ R_A, R_B とすると力のつりあいより $R_A + R_B - P = 0$ となる。(実際には作用していない) 仮想モーメント M_0 が図のように作用するときと同じ向きにたわみ角 θ_A が発生するものとする、B 点まわりのモーメントのつりあいより;

$$\begin{aligned} M_0 + R_A l - P(l - a) &= 0 \\ \therefore R_A &= P - \frac{a}{l}P - \frac{M_0}{l} \end{aligned} \quad (3.5)$$

[区間 AC]

$$\begin{aligned} M_x &= R_A x + M_0 \\ &= \left(P - \frac{a}{l}P - \frac{M_0}{l} \right) x + M_0 \end{aligned}$$

また $\partial M_x / \partial M_0 = -x/l + 1$.

[区間 CB]

$$\begin{aligned} M_x &= R_A x - P(x - a) + M_0 \\ &= \left(P - \frac{a}{l}P - \frac{M_0}{l} \right) x - P(x - a) + M_0 \\ &= -\frac{a}{l}Px - \frac{M_0}{l}x + Pa + M_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

また $\partial M_x / \partial M_0 = -x/l + 1$.

よって、表2-1のように力をモーメント、変位を角度とみなしたカスチリアノの定理を適用

すると：

$$\begin{aligned}
 \theta_A &= \frac{\partial U}{\partial M_0} \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^l M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_0} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \left(\int_0^a M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_0} dx + \int_a^l M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_0} dx \right) \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^a \left[\left(P - \frac{a}{l}P - \frac{M_0}{l} \right) x + M_0 \right] \left(-\frac{x}{l} + 1 \right) dx \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \int_a^l \left[-\frac{a}{l}x - \frac{M_0}{l}x + Pa + M_0 \right] \left(-\frac{x}{l} + 1 \right) dx \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a \left(-\frac{P}{l}x^2 + \frac{aP}{l^2}x^2 + Px - \frac{aP}{l}x \right) dx + \int_a^l \left(\frac{aP}{l^2}x^2 - \frac{2aP}{l}x + Pa \right) dx \right] (\because M_0 = 0) \\
 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{Pa^3}{6l} - \frac{Pa^2}{2} + \frac{Pal}{3} \right) \\
 &= \frac{Pa}{6EI} (2l - a)(l - a)
 \end{aligned}$$

となり、応用力学で求めていた A 支点でのたわみ角が得られることが確認される。

3.4 両端支持分布荷重の場合

図 3-3 のような分布荷重 q を受ける長さ L の両端支持はりの最大たわみ y_{max} をエネルギー法により求めなさい。

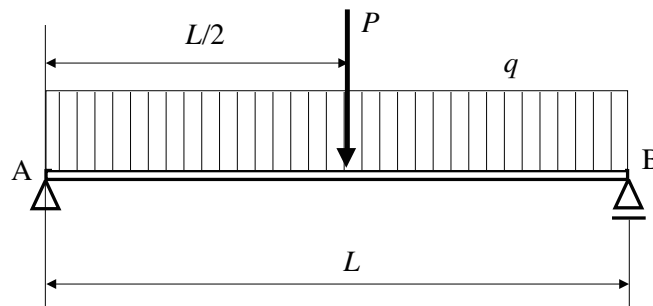


図 3-3 分布荷重の場合のエネルギー法

解 図のように仮想的な集中荷重 P が中間点 C に分布荷重と共に作用しているものとする。この時、支点 A の反力 $R_A = (P + qL)/2$ であるから、曲げモーメントは以下ようになる。

[区間 AC]

$$M_x = R_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{1}{2}(P + qL)x - \frac{qx^2}{2}$$

また $\partial M_x / \partial P = x/2$.

[区間 CB]

$$\begin{aligned} M_x &= R_A x - \frac{qx^2}{2} - P\left(x - \frac{L}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(P + qL)x - \frac{qx^2}{2} - P\left(x - \frac{L}{2}\right) \end{aligned}$$

また $\partial M_x / \partial P = -x/2 + L/2$.

カスチリアノの定理より、求めるたわみは；

$$\begin{aligned} y_{max} &= \frac{\partial U}{\partial P} \\ &= \frac{1}{EI_z} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial P} dx \\ &= \frac{1}{EI_z} \left\{ \int_0^{L/2} M \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int_{L/2}^L M \frac{\partial M}{\partial P} dx \right\} \\ &= \frac{1}{EI_z} \left\{ K_1 + K_2 \right\} \end{aligned}$$

ここに；

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{L/2} M \frac{\partial M}{\partial P} dx \\ &= \int_0^{L/2} \left\{ \frac{1}{2}(P + qL)x - \frac{1}{2}qx^2 \right\} \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{L/2} \{ (P + qL)x^2 - qx^3 \} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{P + qL}{3} x^3 - \frac{q}{4} x^4 \right]_0^{L/2} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{PL^3}{24} + \frac{5qL^4}{192} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_{L/2}^L M \frac{\partial M}{\partial P} dx \\ &= \int_{L/2}^L \left\{ -\frac{1}{2}Px + \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}PL \right\} \left(\frac{L}{2} - \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{P}{3} x^3 - \frac{2}{3} qLx^3 - PLx^2 + \frac{q}{4} x^4 + \frac{qL^2}{2} x^2 + PL^2 x \right]_{L/2}^L \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{PL^3}{24} + \frac{10qL^4}{384} \right) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}y_{max} &= \frac{1}{4EI_z} \left\{ K_1 + K_2 \right\} \\ &= \frac{1}{4EI_z} \left\{ \frac{PL^3}{24} + \frac{5qL^4}{192} + \frac{PL^3}{24} + \frac{10qL^4}{384} \right\} \\ &= \frac{1}{4EI_z} \left\{ \frac{5qL^4}{192} + \frac{10qL^4}{384} \right\} \quad (P = 0) \\ &= \frac{1}{EI_z} \frac{5qL^4}{384}\end{aligned}$$

これは既に重複積分により求めたものと等しいことがわかる。

この例のように、カスチリアノの定理は集中荷重による偏微分によりその場所でのたわみを求めるものであるから、分布荷重の場合は着目する場所に仮想集中荷重 P を付加して考えて、最後に仮想荷重 $P = 0$ とすることでたわみが求まる。

3.5 問題演習

問題 3-1 図 3-4 のような固定端から距離 L_1 に集中荷重 P を受ける長さ L の片持はりの最大たわみ y_{max} と最大たわみ角 θ_{max} をエネルギー法により求めなさい。【応用力学資料参照】

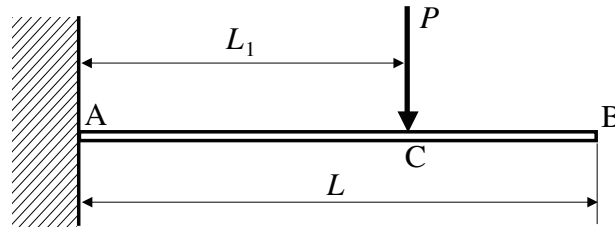


図 3-4 集中荷重の場合のエネルギー法の応用

問題 3-2 図 3-5 のような長さ L の片持はりが分布荷重 q を受けるときの最大たわみ y_{max} をエネルギー法により求めなさい。【応用力学資料参照】

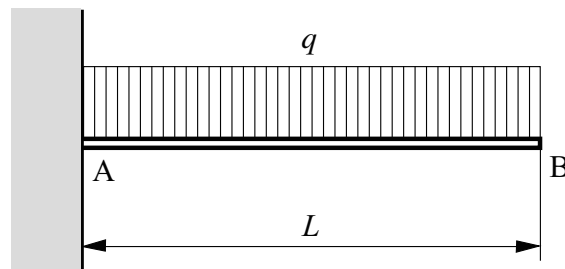


図 3-5 分布荷重の場合のエネルギー法の応用

4 不静定問題 (1)

4.1 静定と不静定

4.1.1 静定問題

未知数が2個(たとえば R_A , R_B)である単純支持はりの問題を考える。単純支持はりの場合、力のつりあい式が1個とモーメントのつりあい式が1個あるのでこの問題は解ける。すなわち静定 (statically determinate) である。

■静定問題：

力のつりあいとモーメントのつりあいのみで、未知反力が決定できる。

4.1.2 不静定問題

変形が拘束されている場合、不静定 (statically indeterminate) となる。すなわち新たに拘束条件が加わる。換言すると、力の未知数が(力とモーメントの剛体)つりあい式のみでは決定できない。問題の代表例として；

- 1次元問題
- 単純はりの問題 (固定条件)
- 連続はりの問題

などがある。

■不静定問題：

力のつりあいとモーメントのつりあいのみでは、未知反力が決定できない。変位 (たわみ) の拘束などの拘束条件を用いる必要がある。

4.2 1次元問題(その1)～引張圧縮

図4-1(a)のように両端を拘束された棒(断面積 A) AB の間の C 点に外力 P が作用する問題を考える。

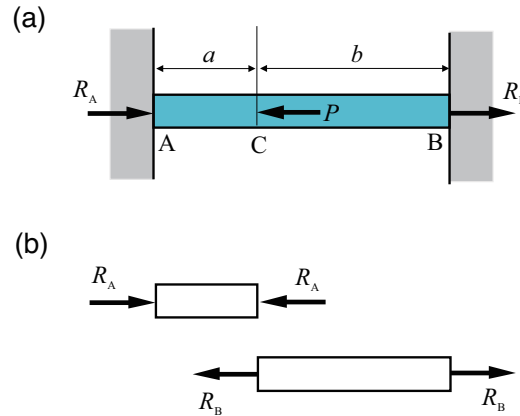


図 4-1 1次元不静定問題の例～引張圧縮

力のつりあい条件は：

$$R_A + R_B - P = 0 \quad (4.1)$$

しかしながら未知数は R_A と R_B のように2個あるが式は上のようにつりあい式のみである。(モーメントのつりあいはこの問題では適用できない。)つまりこのままでは解けない。したがって変形の拘束条件を考える必要がある。

図4-1(b)のように AC 間は棒は圧縮され、 CB 間は引張される。したがって引張を正としてのび λ は、それぞれの区間で；

$$\lambda_{AC} = -\frac{R_A a}{AE} \quad (4.2)$$

$$\lambda_{CB} = \frac{R_B b}{AE} \quad (4.3)$$

棒全体では伸び縮みがないので、

$$\lambda_{AC} + \lambda_{CB} = -\frac{R_A a}{AE} + \frac{R_B b}{AE} = 0$$

すなわち、

$$-R_A a + R_B b = 0 \quad (4.4)$$

以上より、

$$R_A = \frac{b}{l} P \quad (4.5)$$

$$R_B = \frac{a}{l} P \quad (4.6)$$

と求めることができる。

4.3 1次元問題(その2)～熱応力

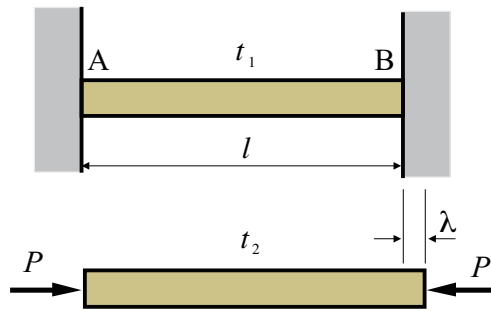


図 4-2 1次元不静定問題の例～熱応力

物体が温度変化を受けると膨張あるいは収縮するが、この変形が外部から拘束を受けたり、温度変化が一様でなかった場合、内部に**熱応力 (thermal stress)**が発生する。

温度変化 $\Delta t (= t_2 - t_1, \text{ただし } t_2 > t_1)$ と棒の伸び λ の関係は線膨張係数 α を用いて；

$$\lambda = l\alpha\Delta t = l\alpha(t_2 - t_1) \quad (4.7)$$

と表される。

図 4-2 のように長さ l の棒が温度 t_1 で両端を剛体壁に固定されているものとする。温度が t_2 に上昇したとき、棒の両端が拘束を受けなかったとすると熱膨張の結果、上式の伸びを生じるが、拘束を受けるため、剛体壁から作用反作用による圧縮力を受け、長さ $l + \lambda$ が λ だけ縮むことになる。したがって棒に生ずる圧縮ひずみ ε は；

$$\varepsilon = -\frac{l\alpha(t_2 - t_1)}{l} = -\alpha(t_2 - t_1) \quad (4.8)$$

となる。なお、圧縮荷重を受けなかったと仮定した時の棒の長さは $l + \lambda \simeq l$ とした。

応力—ひずみの関係より、熱応力は；

$$\sigma = E\varepsilon = -E\alpha(t_2 - t_1) \quad (4.9)$$

となる。

4.4 1次元問題(その3)～内部応力

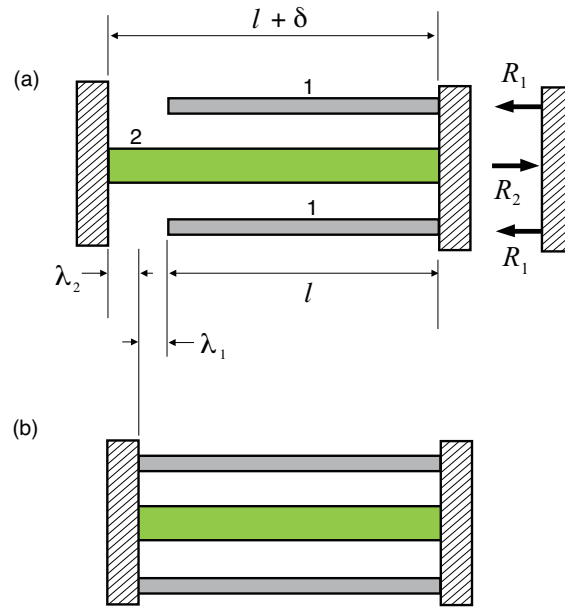


図 4-3 1次元不静定問題の例～内部応力

図 4-3 のような部材 1(初期長さ l) と部材 2(初期長さ $l + \delta$) から剛体側板を介して部品を組み上げるものとする。なお部材 1 の断面積, ヤング率をそれぞれ A_1, E_1 , また部材 2 の断面積, ヤング率をそれぞれ A_2, E_2 とする。また部材 1 は上下対称であるものとする。

剛体側板が部材 1, 部材 2 から受ける反力はそれぞれ R_1, R_2 であるから, 力のつりあいより;

$$2R_1 - R_2 = 0 \quad (4.10)$$

部材 1 の引張変形量は;

$$\lambda_1 = \frac{R_1 l}{A_1 E_1} \quad (4.11)$$

部材 2 の圧縮変形量 (絶対値) は;

$$\lambda_2 = \frac{R_2 (l + \delta)}{A_2 E_2} \quad (4.12)$$

各部材の変形量 λ_1 と λ_2 の絶対値の和が各部材の長さの差 δ であるから

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{R_1 l}{A_1 E_1} + \frac{R_2 (l + \delta)}{A_2 E_2} = \delta \quad (4.13)$$

となる。

$l + \delta \simeq l$ を考慮して (4.10) 式と (4.13) 式より反力を求めると;

$$R_1 = \frac{A_1 A_2 E_1 E_2 \delta}{(A_2 E_2 + 2A_1 E_1) l} \quad (4.14)$$

$$R_2 = \frac{2A_1 A_2 E_1 E_2 \delta}{(A_2 E_2 + 2A_1 E_1) l} \quad (4.15)$$

したがって組み上げた時の内部応力は引張を正として、

$$\sigma_1 = \frac{A_2 E_1 E_2 \delta}{(A_2 E_2 + 2A_1 E_1) l} \quad (4.16)$$

$$\sigma_2 = -\frac{2A_1 E_1 E_2 \delta}{(A_2 E_2 + 2A_1 E_1) l} \quad (4.17)$$

4.5 問題演習

問題 4-1 図 4-1 の問題をエネルギー法により求めなさい。【再確認用；既学習】

問題 4-2 図 4-4 のようなボルト-ナットと平ワッシャを介したスリーブ（中空円柱状材料；長さ l ）からなる機械部品がある。図のようにスリーブと平ワッシャは接触しているがボルトの軸力は発生しないときを初期状態とする。また、平ワッシャは軸力を受けても厚みは変化しない剛体であると仮定する。いま、左のナットを図の初期状態から右回りに 1 回転させてネジを締めたとき、スリーブに発生する圧縮応力 σ_p を求めなさい。ただし、スリーブのヤング率を E_p 、断面積を A_p 、ボルトのヤング率を E_b 、断面積を A_b とし、ボルトネジのピッチ（1 回転で進む距離）を p とする。【ヒント：ボルトとスリーブの伸び縮みとピッチの関係およびボルトとスリーブの軸力のつりあいをを用いる。】

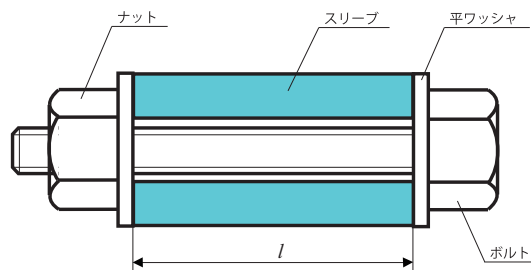


図 4-4 ボルト-スリーブ部品

5 不静定問題 (2)

5.1 両端固定単純はりの不静定問題

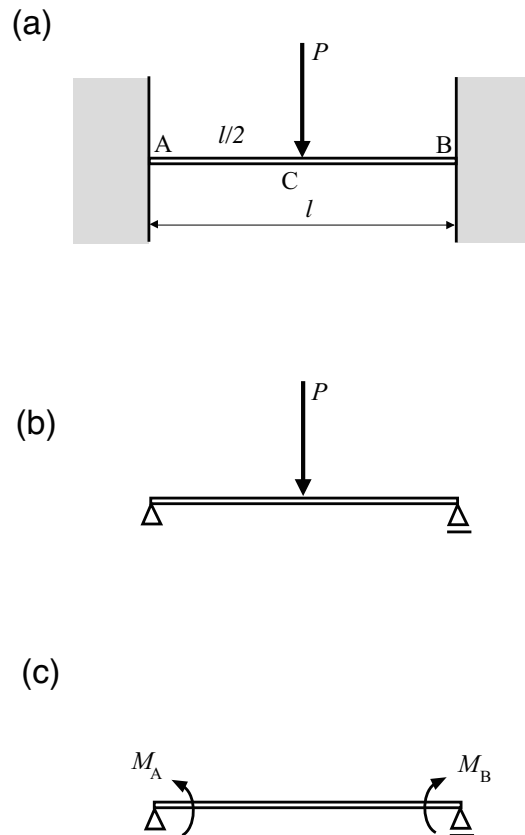


図 5-1 両端固定はり

図 5-1(a) のように、長さ l の単純はりの両端 A, B が固定され、中央点 C に集中荷重 P が載荷されているものとする。このとき固定端には反力以外にモーメントが発生し、固定端でのたわみ角が 0 となっている。

力のつりあいは；

$$R_A + R_B - P = 0 \quad (5.1)$$

また B 点まわりのモーメントのつりあいより、対称性 ($M_A = M_B$) を考慮すると；

$$R_A l + M_B - P \frac{l}{2} - M_A = R_A l - P \frac{l}{2} = 0 \quad (5.2)$$

このように力関係がすべて決まらない、すなわち $M_A (= M_B)$ が決定できないことがわかる。

単純はりの不静定問題を解くには、変位(たわみ)の条件を利用することが不可欠となる。応用力学での基本技としての『**重複積分**』により、たわみ角と変位を求め、未知数を考慮して積分定数を決定すると解が得られる。また、図の (b), (c) に分けて示したように『**重ね合わせ**』により単純な条件を重ね合わせて解くことも可能である。

5.1.1 例題

重ね合わせにより図 5-1 において中央点 C での最大たわみ y_{max} を求める。

- 図 5-1(b) の場合

集中荷重が単純はりの中央に作用する場合の両端支点での最大たわみ角 θ_1 とはりの中央でのたわみ y_1 は、それぞれ；

$$\theta_1 = \frac{Pl^2}{16EI_z} \quad (5.3)$$

$$y_1 = \frac{Pl^3}{48EI_z} \quad (5.4)$$

- 図 5-1(c) の場合

固定端のモーメントは対称であるからモーメントのみによる両端支持はりの最大たわみ角 θ_2 (固定端にて) と中央でのたわみ y_2 は、それぞれ負の値として；

$$\theta_2 = -\frac{M_A l}{2EI_z} \quad (5.5)$$

$$y_2 = -\frac{M_A l^2}{8EI_z} \quad (5.6)$$

- 計算

支点でのたわみ角は $\theta_1 + \theta_2 = 0$ であるから (5.3) 式と (5.5) 式より、

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI_z} - \frac{M_A l}{2EI_z} = 0$$

すなわち、

$$M_A = \frac{Pl}{8} \quad (5.7)$$

となる。

以上より最大たわみ y_{max} は；

$$\begin{aligned} y_{max} &= y_1 + y_2 = \frac{Pl^3}{48EI_z} - \frac{M_A l^2}{8EI_z} \\ &= \frac{Pl^3}{192EI_z} \end{aligned} \quad (5.8)$$

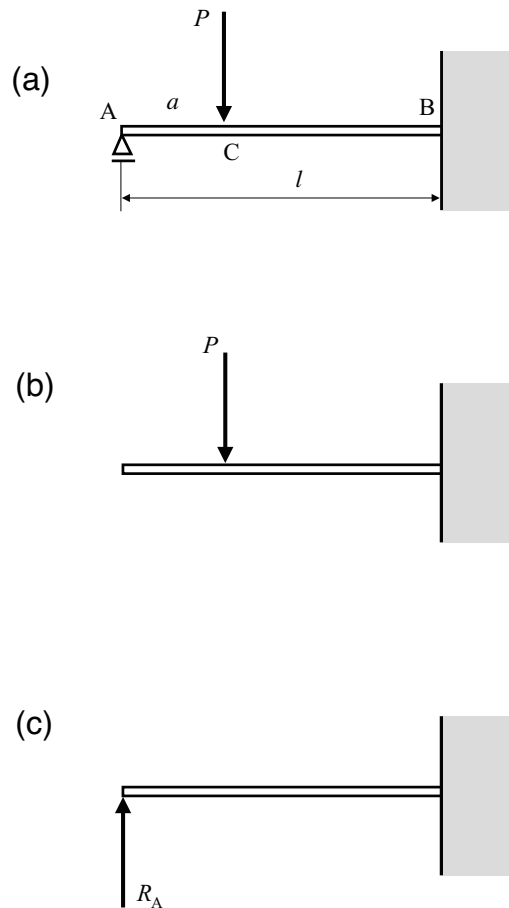


図 5-2 一端固定+他端単純支持はり

5.2 一端固定+他端単純支持はりの場合

図 5-2(a) に一端固定+他端単純支持はりの場合を示す。図のように長さ l の片持はりの先端部 A から距離 a の位置に荷重 P が载荷されているものとする。先端部 A は移動支点で支持されている。このとき力のつりあいとモーメントのつりあいは；

$$R_A + R_B - P = 0 \quad (5.9)$$

$$R_A l + M_B - P(l - a) = 0 \quad (5.10)$$

すなわち、支点反力 R_A, R_B とモーメント M_B が未知量であるので、不静定問題である。

重複積分法、重ね合わせ法以外にも、既に習得している『エネルギー法』も不静定問題へ適用できる。

5.2.1 例題

例としてエネルギー法により反力 R_A を求める問題を考える。

- 復習：カスティリアノの定理

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{\partial U}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial P_i} \quad (5.11)$$

ここで δ_i : i 点での荷重 P_i 方向の変位 (たわみ)。

• 計算

力のつりあいとモーメントのつりあいより；

$$R_A + R_B - P = 0 \quad (5.12)$$

$$R_A l - P(l - a) + M_B = 0 \quad (5.13)$$

区間 AC における曲げモーメント：

$$M = R_A x$$

区間 CB における曲げモーメント：

$$M = R_A x - P(x - a)$$

したがって両区間において

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

となるので (5.11) 式より支点 A ではたわみ $\delta_A = 0$ であるので；

$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{\partial U}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial R_A} \\ &= \frac{1}{EI_z} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R_A} dx \\ &= \frac{1}{EI_z} \left(\int_0^a M x dx + \int_a^l M x dx \right) \\ &= \frac{1}{EI_z} \left(\int_0^a R_A x^2 dx + \int_a^l [R_A x - P(x - a)] x dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

積分記号部分のみが関係することは明らかである故、

$$\int_0^a R_A x^2 dx + \int_a^l [R_A x - P(x - a)] x dx = 0$$

これを解いて；

$$R_A = P - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{l} \right) P + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{l} \right)^3 P = \frac{P(l^2 - 2la + a^2)(2l + a)}{2l^3} \quad (5.15)$$

したがって他の R_B が (5.12) 式より、また (5.13) 式より M_B が以下のように求められる。

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{Pa(3l^2 - a^2)}{2l^3} \\ M_B &= \frac{Pa(l - a)(l + a)}{2l^2} \end{aligned}$$

5.3 連続はりの不静定問題

5.3.1 復習

単純支持はりについて表のような結果であった。ただし断面二次モーメントを I とする。

表 5-2 荷重形式による支点でのたわみ角 θ と反力 R

荷重	集中 (図 5-3)	分布 (図 5-4)	モーメント (図 5-5)
θ_A	$Wa(l-a)(2l-a)/6EI$	$wl^3/24EI$	$l(2M_A + M_B)/6EI$
θ_B	$Wa(l^2 - a^2)/6EI$	$wl^3/24EI$	$l(M_A + 2M_B)/6EI$
R_A	$W(l-a)/l$	$wl/2$	$(M_B - M_A)/l$
R_B	Wa/l	$wl/2$	$(M_A - M_B)/l$

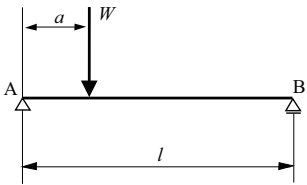


図 5-3 集中荷重

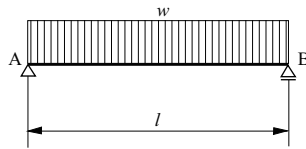


図 5-4 分布荷重

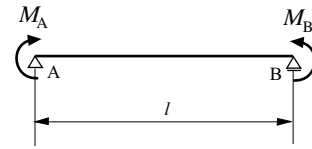


図 5-5 モーメント荷重

なお、表中のはりの右側のたわみ角 θ_B においては負の符号を省略していることに注意。

5.3.2 3モーメントの式

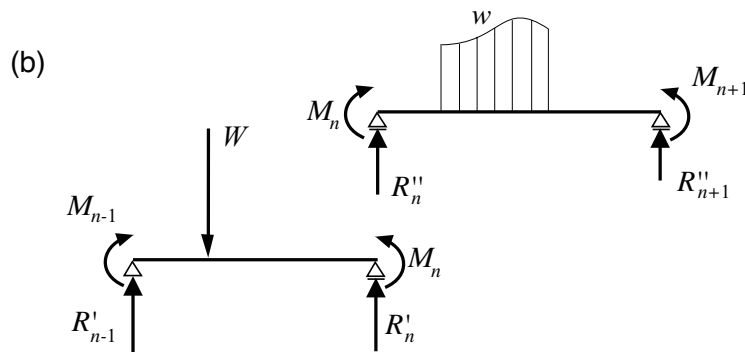
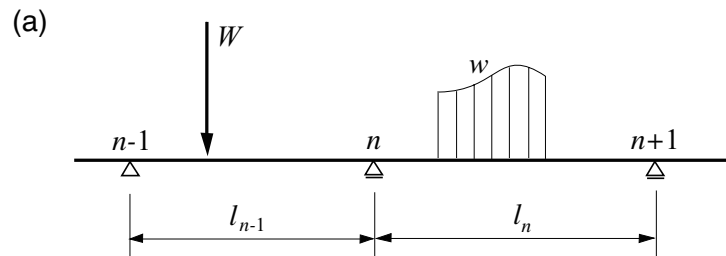


図 5-6 連続はり

3個以上の支点と2個以上の連続したスパンをもつはりを**連続はり** (continuous beam) という。連続はりは、少なくとも中間支点の数の不静定次数をもつ不静定はりであるので、不静定はりの解法を適用して解くことになる。

また、連続はりの簡便な解法がある。図5-6(a)のようなはりにおいて、集中荷重 W を受けるスパン長 l_{n-1} のはりを支える支点 $n-1, n$ と分布荷重 w を受けるスパン長 l を支える支点 $n, n+1$ の二つの単純支持はりに分けて考える。このとき、図5-6(b)のように、曲げモーメント M_{n-1}, M_n, M_{n+1} がそれぞれの単純支持はりに作用する。今、スパン l_{n-1} と l_n のはりについて、与えられたモーメント以外の負荷(集中あるいは分布荷重)による支点 n でのたわみ角を θ_n, θ_{n+1} とする。

左スパン l_{n-1} のはりの右側支点 n におけるすべての負荷によるたわみ角 Θ_1 は荷重負荷および支点モーメント負荷によるたわみ角を重ね合わせることで次式のようになる。

$$\Theta_1 = -\frac{1}{6EI}l_{n-1}(M_{n-1} + 2M_n) - \theta_n \quad (5.16)$$

なお、上式中においては、表5-2でのたわみ角 θ_B において負号を考慮したものをを用いていることに注意。

同様に、右スパン l_n のはりの左支点 n におけるたわみ角は；

$$\Theta_2 = \frac{1}{6EI}l_n(2M_n + M_{n+1}) + \theta_{n+1} \quad (5.17)$$

となる。

(切断された)各スパンが支点 n で連続であるためには支点 n における左右スパンのたわみ角が等しい ($\Theta_1 = \Theta_2$) 必要がある。すなわち；

$$l_{n-1}(M_{n-1} + 2M_n) + l_n(2M_n + M_{n+1}) = -6EI(\theta_n + \theta_{n+1}) \quad (5.18)$$

あるいは

$$M_{n-1}l_{n-1} + 2M_n(l_{n-1} + l_n) + M_{n+1}l_n = -6EI(\theta_n + \theta_{n+1}) \quad (5.19)$$

が得られる。

この式(5.19)を**クラペイロンの3モーメントの式** (Clapeyron's 3 moments equation) という。

5.3.3 例題

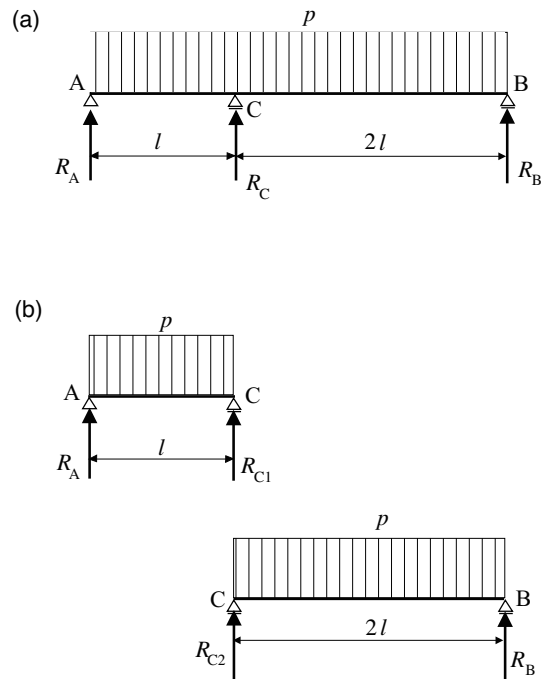


図 5-7 連続はり例題～2スパン等分布荷重の場合

図 5-7(a) のような等分布荷重 p を受ける連続はりの支持反力を求めなさい。

■ 準備

スパン l_{n-1} と l_n に等分布荷重 w_1 と w_2 が作用するとき、

$$M_{n-1}l_{n-1} + 2M_n(l_{n-1} + l_n) + M_{n+1}l_n = -\frac{1}{4}(w_1l_{n-1}^3 + w_2l_n^3) \quad (5.20)$$

■ 計算

連続はりの両端支点 A と B は単純支持であるので、

$$M_A = M_B = 0 \quad (5.21)$$

AC 間に対して式 (5.19) を適用すると、 $l_{n-1} = l$ 、 $l_n = 2l$ 、 $w_1 = w_2 = p$ であるから、

$$\begin{aligned} 2(l + 2l)M_c &= -\frac{p}{4}(l^3 + 8l^3) \\ \therefore M_c &= -\frac{3}{8}pl^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

【AC 間について】

力および C 点まわりのモーメントのつりあいより；

$$R_A + R_{C1} = pl, \quad R_A l - M_C - \frac{1}{2}pl^2 = 0 \quad (5.23)$$

(5.22) を代入して,

$$R_A = \frac{1}{8}pl, \quad R_{C1} = \frac{7}{8}pl \quad (5.24)$$

【CB間について】

力およびC点まわりのモーメントのつりあいより;

$$R_B + R_{C2} = 2pl, \quad R_B 2l - M_C - \frac{1}{2}p(2l)^2 = 0 \quad (5.25)$$

すなわち,

$$R_B = \frac{13}{16}pl, \quad R_{C2} = \frac{19}{16}pl \quad (5.26)$$

以上より求める反力は;

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{1}{8}pl \\ R_B &= \frac{13}{16}pl \\ R_C &= R_{C1} + R_{C2} = \frac{33}{16}pl \end{aligned}$$

5.4 問題演習

問題 5-1 図 5-1 の問題を重複積分法により解きなさい。

問題 5-2 図 5-2 の問題を重複積分法により解きなさい。

問題 5-3 図 5-2 の問題を重ね合わせ法により解きなさい。

問題 5-4 5.3.3 の例題のたわみ角, たわみおよびせん断力図と曲げモーメント図を求めなさい。

問題 5-5 図 5-2 の集中荷重 P が作用する一端固定+他端単純支持はりにおいて, 3モーメントの式を適用して固定端 (B 支点) の支持モーメント M_B を求めなさい。

【ヒント: B 点の壁面内に仮想はりが延長して存在するがスパン長さは無いものとして 3モーメントの式を適用する。】

■これまでに学習したこと

- エネルギー法
- 不静定問題とその解き方
 - ▲引張と圧縮～熱応力，内部応力
 - ▲両端固定はり，一端固定＋他端単純支持はり
 - ▲重複積分法による問題解法
 - ▲重ね合わせ法による問題解法
 - ▲エネルギー法による問題解法
 - ▲連続はり，3モーメントの式とその応用

6 棒のねじり

6.1 丸棒のねじり

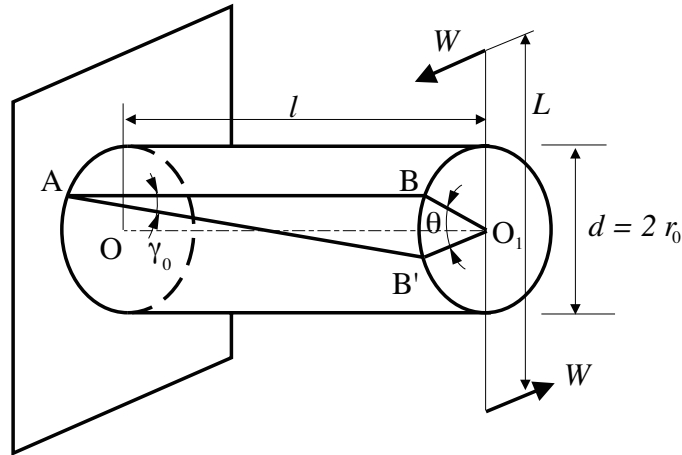


図 6-1 棒のねじり

図 6-1 のように一端を固定した丸軸の他端に偶力モーメント $T = WL$ が作用する際の丸軸の応力と変形について調べる。偶力モーメントを**ねじりモーメント** (torsional moment) あるいは**トルク** (torque) という。

以下のように仮定する。

1. 変形前に考えた軸の横断面は変形後も平面のままである。

2. 横断面上に考えた半径線 O_1B は点 O_1 の回りに回転して、変形後も直線のままである。

円周上の点 B が変形により点 B' に移動したとすると、母線 AB はらせん AB' となり、両者は角 γ_0 をなす。半径 r_0 の表面上の母線に注目すると、以下の関係が得られる。

$$\gamma_0 = \tan^{-1} \frac{BB'}{l} \cong \frac{BB'}{l} = \frac{r_0 \theta}{l} = r_0 \bar{\theta} \quad (6.1)$$

ここに θ をねじれ角、また $\bar{\theta} = \theta/l = d\theta/dx$ は単位長さあたりのねじれ角であり、比ねじれ角という。

一般的には；

$$\gamma = \frac{r\theta}{l} = r\bar{\theta} \quad (6.2)$$

したがって半径 r の位置のせん断ひずみ γ は；

$$\gamma = \gamma_0 \frac{r}{r_0} \quad (6.3)$$

この時、せん断応力 τ は応用力学の知識より；

$$\tau = G\gamma = Gr \frac{\theta}{l} = G\gamma_0 \frac{r}{r_0} = \tau_0 \frac{r}{r_0} \quad (6.4)$$

軸表面でのせん断応力 τ_0 は

$$\tau_0 = G\gamma_0 = Gr_0 \frac{\theta}{l} = Gr_0 \bar{\theta} \quad (6.5)$$

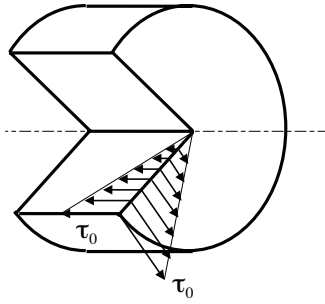


図6-2 せん断応力の分布

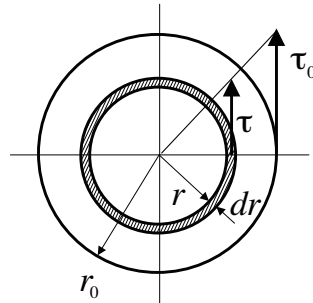


図6-3 微小部分のせん断応力

したがって、せん断応力は軸の横断面上に半径 r に比例する大ききで分布し、最大せん断応力は軸の表面上で生じていることがわかる。(図6-2参照)

次に、軸に作用するねじりモーメント T とせん断応力 τ_0 の関係を導く。図6-3の横断面において、斜線部の微小部分に着目してこの部分のせん断応力を τ (一定) とすると；

$$dT = \tau \times 2\pi r dr \cdot r = \tau \cdot 2\pi r^2 dr = 2\pi \frac{\tau_0}{r_0} r^3 dr \quad (6.6)$$

断面全体では、

$$T = \int dT = 2\pi \frac{\tau_0}{r_0} \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{\pi r_0^3}{2} \tau_0 = \frac{\pi d^3}{16} \tau_0 \quad (6.7)$$

すなわち、

$$\tau_0 = \frac{16}{\pi d^3} T \quad (6.8)$$

ただし、 $d = 2r_0$ (直径)である。

円形断面の断面二次極モーメントは応用力学の知識より $I_p = \pi d^4/32$ であった。したがって、

$$\tau_0 = \frac{T}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{T}{Z_p} \quad (6.9)$$

ここに；

$$Z_p = \frac{2I_p}{d} = \frac{\pi d^3}{16} \quad (6.10)$$

これを**極断面係数**または**ねじりの断面係数**という。

ねじりモーメント T とねじれ角 θ の関係を求めると；

$$\theta = \frac{\tau_0 l}{Gr_0} = \frac{Tl}{GI_p} \quad (6.11)$$

分母の GI_p はねじれにくさを表す量で**ねじり剛性**(torsional rigidity) という。

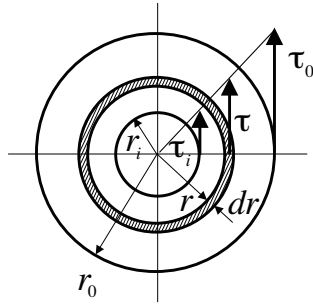


図 6-4 中空丸軸

6.2 伝達動力

軸がトルク $T(\text{Nm})$ を受けて毎秒 n 回転 (rps) している時、角速度 $\omega(\text{rad/s})$ は $\omega = 2\pi n$ であるから、伝達動力 (power) $P(\text{W})$ は；

$$P = \omega T = 2\pi n T \quad (6.12)$$

または

$$T = \frac{P}{2\pi n} \quad (6.13)$$

となる。

軸材料の許容せん断応力を $\tau_a(\text{Pa})$ とするとき、必要な軸の直径 $d(\text{m})$ を求めると、(6.8) 式の $\tau_0 = \tau_{max} = \tau_a$ において d について解くと；

$$d = \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi\tau_a}} \quad (6.14)$$

この式に (6.13) 式を代入すると；

$$d = \sqrt[3]{\frac{8P}{\pi^2 n \tau_a}} \cong 0.932 \sqrt[3]{\frac{P}{n \tau_a}} \quad (6.15)$$

6.3 中空丸軸のねじり

図 6-4 のように内径 $d_i = 2r_i$ 、外径 $d_0 = 2r_0$ の中空丸軸を考える。既出の (6.7) 式と同様に軸断面全体のせん断応力は；

$$T = \int dT = 2\pi \frac{\tau_0}{r_0} \int_{r_i}^{r_0} r^3 dr = \frac{\pi\tau_0}{16d_0} (d_0^4 - d_i^4) \quad (6.16)$$

τ_0 について解くと；

$$\tau_0 = \frac{16d_0 T}{\pi(d_0^4 - d_i^4)} \quad (6.17)$$

ここで、円筒断面について

$$I_p = \int_{d_i/2}^{d_0/2} r^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi}{32} (d_0^4 - d_i^4) \quad (6.18)$$

したがって、円筒断面に対する断面係数は；

$$Z_p = \frac{2I_p}{d_0} = \frac{\pi(d_0^4 - d_i^4)}{16d_0} \quad (6.19)$$

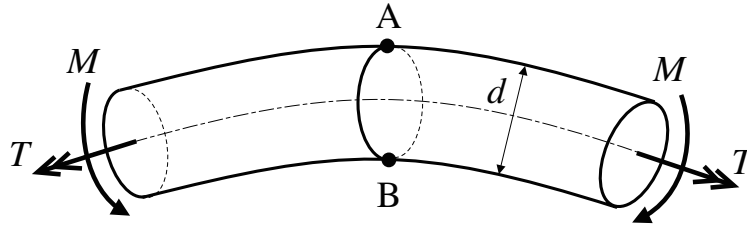


図6-5 曲げとねじりを受ける丸軸

であるから、

$$\tau_0 = \frac{T}{I_p} \cdot \frac{d_0}{2} = \frac{T}{Z_p} \quad (6.20)$$

6.4 応用：曲げとねじりを受ける丸軸

図6-5のように、直径 d の丸軸にねじりモーメント T と曲げモーメント M が同時に作用しているものとする。

曲げモーメントにより任意断面に生じる曲げ応力 σ は丸軸の上下端の点AおよびB($y = d/2$)で最大となり、

$$\sigma = \frac{32M}{\pi d^3} \left(\because \sigma = \frac{M}{I_z} y \right) \quad (6.21)$$

またねじりモーメント T によるせん断応力は丸軸の外周上で最大となり

$$\tau = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (6.22)$$

したがって曲げモーメントとねじりモーメントが同時に作用する時、最大応力は(6.21)式と(6.22)式の組合せにより点Aおよび点Bに生じる。

点Aおよび点Bでの最大主応力は応用力学の知識³より；

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \quad (6.23)$$

この式に(6.21)式、(6.22)式を代入すると

$$\sigma_{max} = \frac{16(M + \sqrt{M^2 + T^2})}{\pi d^3} = \frac{M + \sqrt{M^2 + T^2}}{2Z} = \frac{M_e}{Z} \quad (6.24)$$

ただし、

$$M_e = \frac{M + \sqrt{M^2 + T^2}}{2}$$

でありこれを**相当曲げモーメント**という。

同様に点Aおよび点Bにおける最大せん断応力は応用力学の知識⁴より；

$$\tau_{max} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \quad (6.25)$$

³最大主応力の式： $\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right]$ において、 $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau$ を代入する。

⁴最大せん断応力の式： $\tau_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ において、 $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau$ を代入する。

であるから、(6.21)(6.22)式の関係代入して

$$\tau_{max} = \frac{16\sqrt{M^2 + T^2}}{\pi d^3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{Z_p} = \frac{T_e}{Z_p} \quad (6.26)$$

ただし、

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2}$$

でありこれを**相当ねじりモーメント**という。

6.5 例題

問題 図6-6のように直径が d_1 から d_2 に一様に変化する長さ l の丸棒にねじりモーメント T が作用する時、ねじれ角を求めなさい。

【解答】

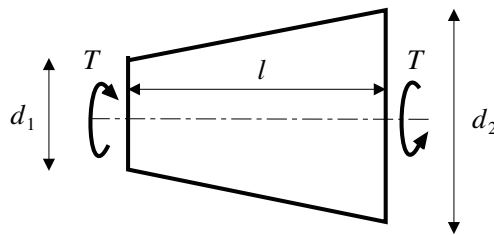


図6-6 ねじり例題

ねじりモーメント作用時の左端から距離 x にある長さ dx の微小部分の微小ねじれ角 $d\theta$ は、微小部分を直径 d 、高さ dx の円柱と見なして、

$$d\theta = \frac{T}{GI_p} dx$$

直径 d は距離 x を用いた形で、

$$d = d_1 + x(d_2 - d_1)/l$$

と表される。

また、断面二次極モーメント I_p において、直径 d が x の関数であるから、

$$I_p = \frac{\pi}{32} [d_1 + x(d_2 - d_1)/l]^4$$

以上より、求めるねじれ角は：

$$\begin{aligned} \theta &= \int d\theta = \frac{32T}{\pi G} \int_0^l [d_1 + x(d_2 - d_1)/l]^{-4} dx \\ &= \frac{32Tl(d_1^2 + d_1d_2 + d_2^2)}{3\pi Gd_1^3d_2^3} \end{aligned} \quad (6.27)$$

6.6 問題演習

問題 6-1 図 6-7 のように A 点で壁に固定された一様材料からなる片持はり AC がある。なお AB 間は長さ L 、BC 間は長さ a とする。はりの先端 C 点に集中荷重 P が作用する時、C 点のたわみを求めなさい。なお、はりの曲げ剛性を EI とする。

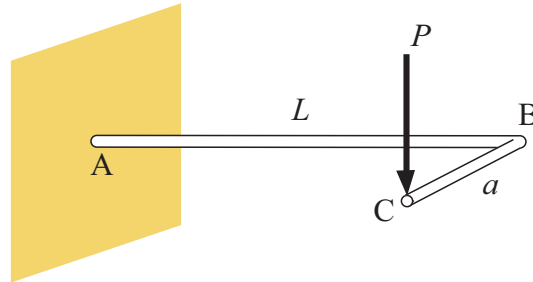


図 6-7 ねじりを受ける片持はり

問題 6-2 同一材料からなり、等しい横断面積をもつ中実丸軸と中空丸軸が同一回転速度で伝達できる馬力を比較しなさい。

7 特殊なはり

7.1 組合せはり

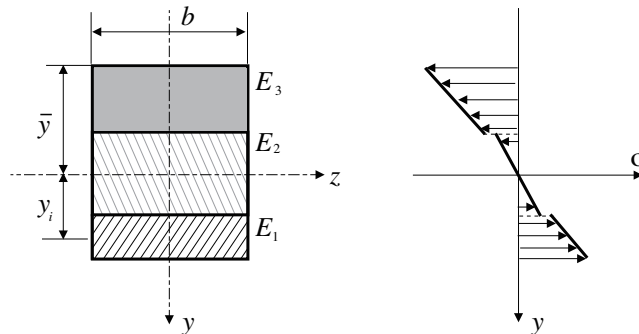


図 7-1 組合せはり

例えば図 7-1 のように材料特性の異なる材料を一体として変形するように貼りあわせてはりとしたものを**組合せはり** (composite beam) という。このはりにおいては、単一材料のはりとは異なり、曲げモーメント M が作用する時の曲げ応力 σ がゼロである中立軸の位置が断面形状だけでは求まらない。はりのある断面の軸方向の垂直ひずみ ε_x は、はりの厚さ方向に直線的に変化するが、組み合わせはりにおいては縦弾性係数が y の位置により異なるので、ひずみに対応する曲げ応力 σ は直線的には分布しないことに注意⁵。

さて図 7-1 のように n 層の異種材料からなる組合せはりを考える。 i 番目の部材の縦弾性係数を E_i 、断面積を A_i 、中立軸からの距離を y_i とする。はり断面の上の面から中立軸までの位置を \bar{y} とすると；

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i \int y dA_i}{\sum_{i=1}^n E_i A_i} \quad (7.1)$$

となる。すなわち組合せはりにおいては、図心の位置と中立軸の位置が異なる。

同様に曲げ応力は i 番目の板の中立軸からの距離 y_i と断面二次モーメント I_i に材料特性 E_i の重みをかけた次式のようなになる。

$$\sigma_i = \frac{E_i y_i}{\sum_{i=1}^n E_i I_i} M \quad (7.2)$$

(7.1) 式において $\sum_{i=1}^n E_i I_i$ がはり全体の曲げ剛性であるので、たわみの基礎式は；

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{\sum_{i=1}^n E_i I_i} \quad (7.3)$$

7.2 例題

問題 (7.1) 式と (7.2) 式を証明しなさい。

【解答】 各層間にすべりが無い時、はりの軸方向ひずみ ε は中立軸からの距離に比例する。

⁵応用力学より、単一材料の場合は $\sigma = My/I$ であった。

このとき、層 i に生ずる応力 σ_i は

$$\sigma_i = E_i \varepsilon_i = E_i \frac{y_i}{R} \quad (7.4)$$

ここに、 y_i は中立軸からの距離； R は中立軸までの曲率半径； E_i は層 i の材料のヤング率である。はりの軸力の平衡条件より；

$$\sum_{i=1}^n \int_{A_i} \sigma_i dA = 0 \quad (7.5)$$

よって

$$\frac{1}{R} \left(E_1 \int_{A_1} y_1 dA + E_2 \int_{A_2} y_2 dA + \cdots + E_n \int_{A_n} y_n dA \right) = 0 \quad (7.6)$$

ところが、はり断面の上面 (z - z 面) から着目する i 層の任意面までの垂直距離 $y (= \bar{y} + y_i)$ を用いると断面一次モーメント S_i は；

$$S_i = \int_{A_i} y_i dA = \int_{A_i} (y - \bar{y}) dA = \int_{A_i} y dA - \bar{y} A_i = (S_i)_z - \bar{y} A_i \quad (7.7)$$

と表現される。

この関係を (7.6) 式に代入して；

$$E_1 \int_{A_1} y dA - E_1 \bar{y} A_1 + E_2 \int_{A_2} y dA - E_2 \bar{y} A_2 + \cdots + E_n \int_{A_n} y dA - E_n \bar{y} A_n = 0 \quad (7.8)$$

$$\sum_{i=1}^n E_i A_i \bar{y} = \sum_{i=1}^n E_i \int_{A_i} y dA \quad (7.9)$$

すなわち；

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i \int_{A_i} y dA}{\sum_{i=1}^n E_i A_i} \quad (7.10)$$

同様にモーメントのつりあいより；

$$M = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \sigma_i y_i dA \quad (7.11)$$

一方、(7.11) 式の右辺は (7.4) 式を用いると；

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \int_{A_1} \sigma_1 y_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 y_2 dA + \cdots + \int_{A_n} \sigma_n y_n dA \\ &= \frac{E_1}{R} \int_{A_1} y_1^2 dA + \frac{E_2}{R} \int_{A_2} y_2^2 dA + \cdots + \frac{E_n}{R} \int_{A_n} y_n^2 dA \\ &= \frac{E_1}{R} I_1 + \frac{E_2}{R} I_2 + \cdots + \frac{E_n}{R} I_n \\ &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n E_i I_i \end{aligned} \quad (7.12)$$

よって；

$$M = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n E_i I_i \quad (7.13)$$

あるいは；

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{\sum_{i=1}^n E_i I_i} \quad (7.14)$$

これを (7.4) 式に代入すると；

$$\sigma_i = E_i \frac{y_i}{R} = \frac{E_i y_i}{\sum_{i=1}^n E_i I_i} M \quad (7.15)$$

7.3 鉄筋コンクリート

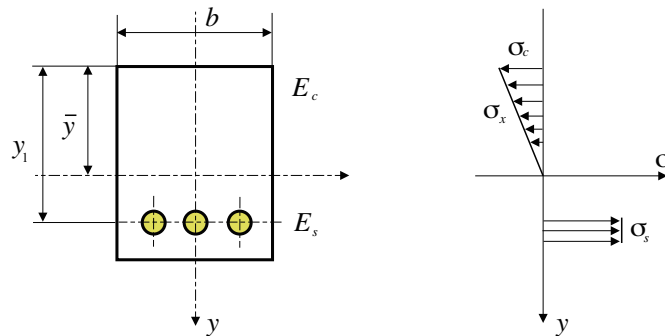


図 7-2 鉄筋コンクリート

鉄筋コンクリートは一種の組合せはりを見なせる。コンクリートは圧縮には強いが、引張には弱い。したがってコンクリートの引張側に鉄筋を入れて引張応力を鉄筋に負担させると、はりは著しく強くなる。ここでは、鉄筋のみが引張応力を負担し、圧縮側にあるコンクリートが圧縮応力を負担するものとし、鉄筋の断面積はコンクリートの断面積に比べて著しく小さいので、鉄筋の中心に作用する応力が鉄筋の断面積に一樣に分布して作用するものと仮定する。

いま図 7-2 に示すような鉄筋コンクリートはりにおいて、鉄筋とコンクリートの縦弾性係数をそれぞれ E_s 、 E_c とする。また鉄筋の全断面積を A_s とする。はりの曲率半径を R 、上端の圧縮側表面から中立軸および鉄筋中心までの距離をそれぞれ \bar{y} 、 y_1 とすると、コンクリートの最大圧縮応力 σ_c 、鉄筋の最大引張応力 σ_s は、 $\varepsilon = y/R$ を用いて；

$$\sigma_c = E_c \varepsilon = E_c \frac{\bar{y}}{R}, \quad \sigma_s = E_s \frac{y_1 - \bar{y}}{R} \quad (7.16)$$

で与えられる。

はりには軸方向の外力は作用しないものとする、軸方向のつりあいから；

$$\frac{b\bar{y}\sigma_c}{2} = A_s\sigma_s \quad (7.17)$$

(7.16) 式を (7.17) 式に代入し、 $n = E_s/E_c$ とおくと；

$$b\bar{y}^2 + 2A_s n \bar{y} - 2A_s n y_1 = 0 \quad (7.18)$$

なお、通常 $n=10\sim 15$ である。

これを解くと；

$$\bar{y} = \frac{-nA_s + \sqrt{n^2 A_s^2 + 2nA_s b y_1}}{b} \quad (\bar{y} > 0) \quad (7.19)$$

つぎに曲げモーメントのつりあいから；

$$M = \frac{1}{2} \sigma_c b \bar{y} \frac{2}{3} \bar{y} + \sigma_s A_s (y_1 - \bar{y}) \quad (7.20)$$

よって(7.20)式と(7.17)式より σ_s , σ_c を求めると；

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s (y_1 - \bar{y}/3)}, \quad \sigma_c = \frac{2M}{b \bar{y} (3 - \bar{y}/3)} \quad (7.21)$$

プレストレスト・コンクリート PC(Prestressed Concrete)：

コンクリートには圧縮力に強く引張力に弱いという特性がある。プレストレスト・コンクリートでは、PC鋼材を使って、荷重が作用する前にコンクリート部材に圧縮力がかかった状態（プレストレス）とし、荷重を受けた時にコンクリートに引張応力が発生しないようにする、もしくは引張応力を制御するものである。鉄筋コンクリートよりも引張応力によるひび割れを防ぐが、コストもかかる。

通常、プレストレストコンクリートをPC（ピーシー）、鉄筋コンクリートをRC（アールシー）と呼ぶ。ただし、建築分野では、プレキャストコンクリートのことをPCと呼び、プレストレストコンクリートのことをPSと呼ぶこともある。特に区別する場合には、プレキャストコンクリートはPCaと表記される。橋梁など梁部材では支間を大きく取ることができることから、大規模構造物に適している。

PCによって建設された橋梁をPC橋と呼び、国内の新設コンクリート橋のほとんどがこのタイプによる。

コンクリートにプレストレスを導入するにはPC鋼材と呼ばれる高強度の鋼材を使う。PC鋼材は鉄筋の5～6倍の強度を持っている。プレストレストコンクリートを造るためには、PC鋼材を引っ張って（この作業を緊張という）張力を与えた後にコンクリートと固定する。すると引っ張られていたPC鋼材は元に戻ろうとして、コンクリートに圧縮力を与えることができる。

プレストレスの導入方法は、プレテンション方式とポストテンション方式に大別することができる。これは、コンクリートを打設する前（プレ）に緊張するか、打設した後（ポスト）に緊張するかによる。

（出典：Wikipedia, プレストレスト・コンクリート建設業協会 Web より一部改変）

7.4 曲りばり

7.4.1 曲りばりの応力とひずみ

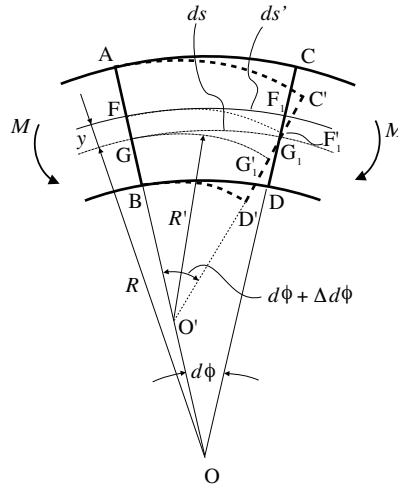


図 7-3 曲りばり

図 7-3 のように，曲りばりの軸に直交する 2 つの断面 AB および CD を考える．両断面の変形前の図心をそれぞれ G ， G_1 とおく．また，両断面で曲率半径 R は共通とし，その中心を O とする．なお，2 つの直交断面の中心角 $d\phi$ は小さいものとする．この曲りばりが外力の作用を受けて変形し，断面 AB に対して断面 CD が $C'D'$ に，また断面 $C'D'$ の図心は G'_1 に移動し，曲率半径が R' となるとともに，曲率中心も O から O' に移ったものとする．

棒の中心軸から y だけ離れた位置 FF_1 の長さ ds' は， GG_1 の長さを ds とすると；

$$ds' = (R + y)d\phi = Rd\phi + yd\phi = ds + yd\phi \quad (7.22)$$

と表せる．

曲りばりが外力を受けて変形し， ds' が $\Delta ds'$ ， $d\phi$ が $\Delta d\phi$ だけ増加するものとするとき， FF_1 のひずみ $\varepsilon(y)$ は；

$$\varepsilon(y) = \frac{\Delta ds'}{ds'} = \frac{1}{(R + y)d\phi} [(R' + y)(d\phi + \Delta d\phi) - (R + y)d\phi] \quad (7.23)$$

GG_1 のひずみを $\varepsilon(0)$ ，中心角の増加率を ω とすると；

$$\begin{aligned} \varepsilon(0) &= \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{1}{Rd\phi} [R'(d\phi + \Delta d\phi) - Rd\phi] \\ \omega &= \frac{\Delta d\phi}{d\phi} \end{aligned}$$

となるから，これらを (7.23) 式に代入すると；

$$\varepsilon(y) = \varepsilon(0) + (\omega - \varepsilon(0)) \frac{y}{R + y} \quad (7.24)$$

となる．Hooke の法則より F での応力 $\sigma(y)$ は

$$\sigma(y) = E\varepsilon(y) = E \left[\varepsilon(0) + (\omega - \varepsilon(0)) \frac{y}{R + y} \right] \quad (7.25)$$

となる。 $\varepsilon(0)$ および ω は未知数であるが、これらを決定する条件は断面積を A とおくと、

$$P = \int_A \sigma(y) dA = E \int_A \left\{ \varepsilon(0) + (\omega - \varepsilon(0)) \frac{y}{R+y} \right\} dA \quad (7.26)$$

$$M = \int_A y \sigma(y) dA = E \int_A y \left\{ \varepsilon(0) + (\omega - \varepsilon(0)) \frac{y}{R+y} \right\} dA \quad (7.27)$$

で与えられる。上式中の右辺最終項について、 $\int dA = A$ 、 $\int y dA = 0$ であり、

$$\int_A \frac{y}{R+y} dA = -\kappa A \quad (7.28)$$

とおき、 κ を曲りばりの断面係数という。また式 (7.28) を参考に、変形してみると：

$$\int \frac{y^2}{R+y} dA = \int \frac{(y^2 + yR) - yR}{R+y} dA = \int_A \left(y - \frac{Ry}{R+y} \right) dA = AR\kappa \quad (7.29)$$

が得られる ($\because \int y dA = 0$)。

したがって、(7.28)、(7.29) を (7.26) ならびに (7.27) に代入して；

$$EA \left\{ \varepsilon(0) - (\omega - \varepsilon(0)) \kappa \right\} = P, \quad EA(\omega - \varepsilon(0)) R \kappa = M \quad (7.30)$$

これから $\varepsilon(0)$ 、 ω を求めると、

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{M}{R} \right) \quad (7.31)$$

$$\omega = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{M}{R} + \frac{M}{R\kappa} \right) \quad (7.32)$$

この式を (7.24) 式、(7.25) 式に代入するとひずみと応力は次式で与えられる。

$$\varepsilon(y) = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{M}{R} + \frac{M}{R\kappa} \cdot \frac{y}{R+y} \right) \quad (7.33)$$

$$\sigma(y) = \frac{1}{A} \left(P + \frac{M}{R} + \frac{M}{R\kappa} \cdot \frac{y}{R+y} \right) \quad (7.34)$$

また (7.34) 式の $\sigma(y) = 0$ とおいて y を求めることにより、中立軸の位置 (図心 G からの) \bar{y} が得られる。

7.4.2 曲りばりの断面係数

7.4.2.1 長方形断面

幅 b 、高さ h の長方形断面において、 $A = bh$ 、 $dA = bdy$ より；

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{A} \int_A \frac{y}{R+y} dA = -\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{y}{R+y} dy \\ &= \frac{R}{h} \ln \frac{R+h/2}{R-h/2} - 1 \end{aligned} \quad (7.35)$$

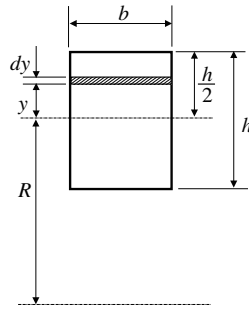


図 7-4 長方形断面

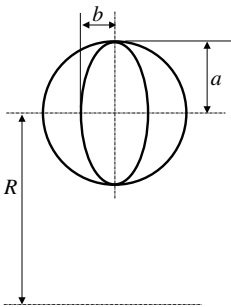


図 7-5 円形(楕円)断面

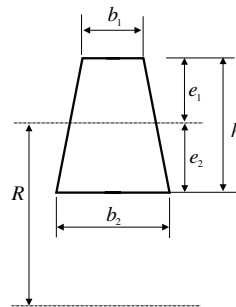


図 7-6 台形断面

7.4.2.2 円形(楕円)断面

断面の半径を a とおくと、 $A = \pi a^2$ 、 $dA = 2\sqrt{a^2 - y^2}dy$ であるから；

$$\begin{aligned} \kappa &= -1 + \frac{R}{A} \int_{-a}^a \frac{2\sqrt{a^2 - y^2}}{R + y} dy \\ &= -1 + 2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R} \right)^2} \right\} \end{aligned} \quad (7.36)$$

また楕円断面において、 $A = \pi ab$ 、 $dA = 2\sqrt{a^2 - y^2} \times (b/a)dy$ を用いると κ の値は円形断面の値と等しくなる。

7.4.2.3 台形断面

$A = (b_1 + b_2)h/2$ 、 $dA = bdy = [b_1 + (b_2 - b_1)(e_1 - y)/h]dy$ より；

$$\kappa = -1 + \frac{2R}{(b_1 + b_2)h} \left[\left\{ b_1 + \frac{1}{h}(b_2 - b_1)(R + e_1) \right\} \ln \left(\frac{R + e_1}{R - e_2} \right) - (b_2 - b_1) \right] \quad (7.37)$$

ただし、

$$e_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2}, \quad e_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \quad (7.38)$$

7.4.3 薄肉曲りばりのひずみエネルギー

一般に曲りばりに貯えられるひずみエネルギー U は、軸力 N によるもの U_N 、曲げモーメント M によるもの U_M と曲げモーメントと軸力が同時に作用する時のもの U_{MN} の和となる。こ

ここでせん断ひずみによるひずみエネルギーは無視できるものとする。このとき；

$$\begin{aligned} U &= U_N + U_M + U_{MN} \\ &= \int \frac{N^2}{2EA} ds + \int \frac{M^2}{2EAR^2} \frac{1+\kappa}{\kappa} ds + \int \frac{MN}{EAR} ds \end{aligned} \quad (7.39)$$

さて、断面寸法がはりの長さにくらべて十分小さいと見なせる薄肉曲りばりを考える。式(7.39)において、軸力が作用しない($N=0$)ものとし、またはりの断面高さに比べて曲率半径 R が十分に大きいことから $\kappa AR^2 \cong I_z$, $R \cong \infty$, このとき $\kappa \cong I_z/AR^2 \cong 0$ として；

$$U \cong U_M = \int \frac{M^2}{2EI_z} ds \quad (7.40)$$

が得られる。この式は、真直はりの場合のひずみエネルギー式と一致していることがわかる。

7.5 例題

問題 図7-7のような薄肉曲りばり AB の中間点 C に垂直荷重 P が作用するとき、支点 A, B における水平反力 H を求めなさい。ただしはりの半径を R とする。

【解答】

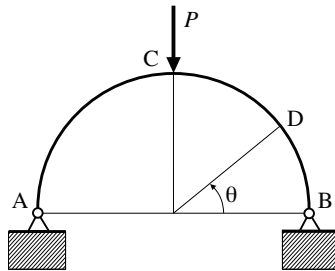


図7-7 薄肉曲りばり

図7-7において、任意の点D(角度 θ , $0 \leq \theta \leq \pi/2$)における曲げモーメントは；

$$M = \frac{PR}{2}(1 - \cos \theta) - HR \sin \theta$$

また $\partial M/\partial H = -R \sin \theta$ であるから、カスチリアノの定理より

$$\begin{aligned} \delta_H &= \frac{\partial U}{\partial H} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{M(\partial M/\partial H)}{EI} R d\theta \quad \left(\because \frac{\partial U}{\partial H} = \frac{\partial U}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial H} \right) \\ &= \frac{2}{EI} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{PR}{2}(1 - \cos \theta) - HR \sin \theta \right\} (-R \sin \theta) R d\theta \\ &= \frac{2R^3}{EI} \left[\frac{P}{2} \cos \theta + \frac{P}{4} \sin^2 \theta + \frac{H\theta}{2} - \frac{H}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2R^3}{EI} \left(-\frac{P}{4} + \frac{H\pi}{4} \right) = 0 \end{aligned}$$

すなわち、 $P = \pi H$ 。これより $H = P/\pi$ 。

7.6 問題演習

問題 7-1 式 (7.24) となることを示しなさい。

問題 7-2 図 7-8 のような半径 R の曲りばりの中間点 C に外力モーメント M_0 が作用するとき、点 B の下向きの変位を求めなさい。ただし、はりの曲げ剛性を EI とする。

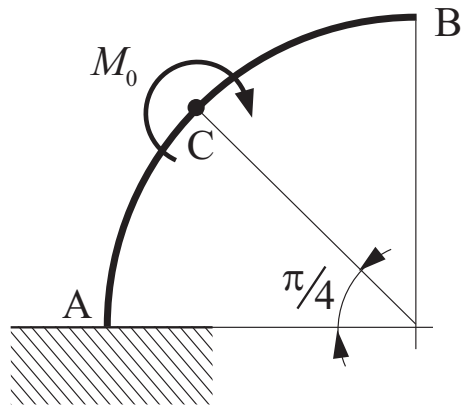


図 7-8 モーメントが作用する薄肉曲りばり

■これまでに学習したこと

- エネルギー法 (カスチリアノの定理)
- 静定と不静定
- 不静定問題
 - ▲引張と圧縮～熱応力, 内部応力
 - ▲両端固定はり, 一端固定+他端単純支持はり
 - ▲連続はり, 3モーメントの式
- 棒のねじり
 - ▲せん断応力とねじりモーメントとの関係
 - ▲伝達動力の関係式
 - ▲ばねの問題
- 特殊なはり
 - ▲組合せはり
 - ▲鉄筋コンクリート
 - ▲曲りばり

8 有限要素法

8.1 はじめに

有限要素法 (finite element method⁶) は、対象を**有限個** (finite) の**要素** (element) に分割して数値モデルを適用し、要素を構成する**節点** (node) の自由度分の未知数について、電子計算機により数値的に近似解を得る手法である。その最初の論文は数学者 Courant(1943)⁷ に見ることができる。計算機の実用化と共に実現した最初の実用的な適用は約 10 年後の Turner らによる航空機などの構造の変形応力解析⁸ である。これは当時の航空機技術の発展と密接な関係があり、特に第二次世界大戦末期のジェットエンジンの開発・実用化が背景にある。すなわち、プロペラ機に見られるような直線翼からジェット機による音速近くの高速度飛行へ移行しつつある時代に当たる。つまり空気抵抗が小さく、かつ軽量の翼形状が要求され、後退翼、三角(デルタ)翼が考案されたがこのような構造の設計を実現する技術は未だ開発されていなかった。その解決方法として有限要素法が生まれた。なお、有限要素という言葉が最初に使われたのは Clough(1960) の論文⁹ と言われている。

有限要素法も当初は構造物の応力解析が主であったが、数学的な理論の整備と共に最近では流体力学などの非構造分野の諸問題に適用され成果をあげている。また、生産現場では計算機支援設計(CAD)のサブシステムとして有限要素法が組み込まれており、設計変更による強度計算が可能となり、計算機上での製品の仮想試作・仮想実験により作業工程の短縮に貢献している。さらに、従来では不可能と思われていたワークステーション、パソコンなどの小型計算機でも、CPU性能の向上につれて複雑な解析が可能となり、解析プログラムも洗練されてきた。特に理論、実験という二大研究手法に対して第3のアプローチとして、計算機を積極的に用いる計算力学、計算物理、計算化学などが急速に発展し、最近では、いわゆるメッシュレス解法のような要素を用いない解析も提案されてきている。

ここでは今後地域環境工学でも有限要素法による数値シミュレーションがますます利用されることは明らかであるとの認識をもとに、初心者にとって難解とされる有限要素法ではあるが、最も基本的な材料力学問題の数値解析を例として、その原理、プログラミング技法を中心に平易に解説するものである。

8.2 1次元の問題

8.2.1 基本的な考え方

簡単な例題として、**図 8-1(a)** の 1次元棒(全長 L ; 均一断面積 A ; ヤング率 E) を考える。棒には外力 F_1, F_2 が作用し、それにより(長さの変化として)変位 u_1, u_2 が発生するものとする。また x 軸方向を正とする。このとき、 $\sigma = E\varepsilon$ を思い出すと、 $F/A = E \times u/L$ であることに注意。

⁶略して FEM ともいう。

⁷R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, Bull. Am. Math. Soc., **49**, 1-23, 1943.

⁸M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures, J. Aero. Sci., **23**, 805-823, 1956.

⁹R. W. Clough. The finite element in plane stress analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, PA, Sept., 1960.

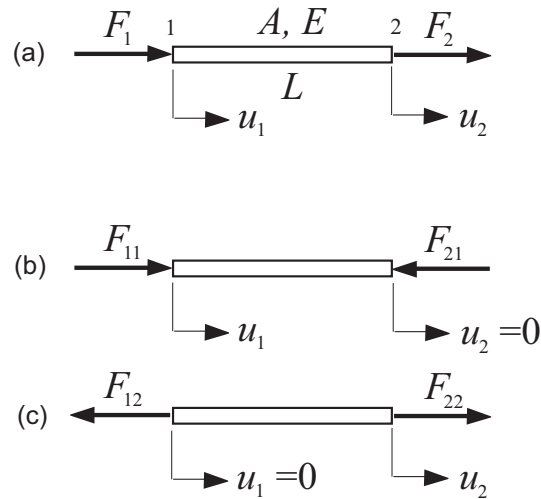


図 8-1 1次元の例題.

外力を図 8-1(b) ならびに同図 (c) の各力に分解すると作用反作用の関係から；

$$F_{11} = F_{21} = \frac{AE}{L}u_1 \quad (8.1)$$

$$F_{12} = F_{22} = \frac{AE}{L}u_2 \quad (8.2)$$

外力について端点 1,2 でそれぞれ合力を計算すると；

$$F_{11} - F_{12} = F_1 \quad (8.3)$$

$$-F_{21} + F_{22} = F_2 \quad (8.4)$$

あるいは、外力ベクトルとして $\mathbf{F}^T = \{F_1 \ F_2\}$ を用いると；

$$\begin{bmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (8.5)$$

式 (8.5) に式 (8.1) と (8.2) を代入すると；

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (8.6)$$

この式は、変位に関する連立方程式になっていることは明らかである。また、線形代数の知識より、このままでは解けないことも分かる。よって式 (8.6) を解くためには、どちらかの変位を拘束する必要がある。

また確認として、 $u_2 = 0$ として棒の右側を固定すると；

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (8.7)$$

したがって；

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} u_1 = \begin{Bmatrix} F_{11} \\ -F_{21} \end{Bmatrix} \quad (8.8)$$

8.2.2 基本的な概念

前出の式(8.6)のように、明らかに『FEMにおいて解くべき式=バネの式』である。つまりバネ定数と変位の積で力を表すようになっている。以下にその意味を示す。

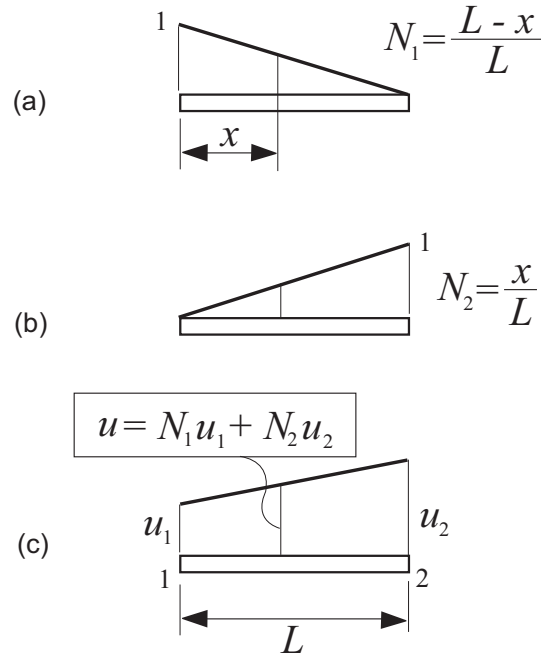


図 8-2 1次元棒要素の形状関数.

まず、変位について、1次元棒要素を例に、棒上の任意の場所 x での変位を表現するために形状関数 (shape function) N を導入する。

図 8-2(a) のように、端点 (これを FEM では節点という) 1 から距離 x の点での変位を u とし、端点 1 にて $N_1 = 1$ となり、端点 2 にて $N_1 = 0$ となる関数 $N_1 = (L - x)/L$ ，ならびに同図 (b) のように端点 1 にて $N_2 = 0$ ，端点 2 にて $N_2 = 1$ となる関数 $N_2 = x/L$ を用いると、一般に端点 1 から距離 x での変位 u は、両端の変位 u_1, u_2 と形状関数を用いて、重ね合わせの考え方より；

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad (8.9)$$

と表される。

また、距離 x における軸ひずみ ε を微小要素 (基準長さ dx) について求めると；

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{dx} \right) u \\ &= \left(\frac{dN_1}{dx} \right) u_1 + \left(\frac{dN_2}{dx} \right) u_2 \\ &= -\frac{1}{L} u_1 + \frac{1}{L} u_2 = \frac{u_2 - u_1}{L} \end{aligned} \quad (8.10)$$

となり、応用力学での軸ひずみの意味が確認できる。

ここで、新たに形状関数の微分を意味する**ひずみ変位関係マトリックス B** (いわゆる **B マトリックス**)を導入する。これは節点変位と要素ひずみを結びつけるものである。すなわち；

$$\mathbf{B} = \left[\frac{d\mathbf{N}}{dx} \right] \quad (8.11)$$

このとき、節点変位ベクトル $\mathbf{w}^T = \{u_1 \ u_2\}$ を用いると；

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \frac{dN_1}{dx_1} \ \frac{dN_2}{dx_2} \right\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{w} \quad (8.12)$$

仮想仕事の原理 (principle of virtual work)¹⁰より、任意の仮想変位 $\delta\mathbf{w}$ による内部仕事と外部仕事は等しいことから；

$$\begin{aligned} \text{内部仕事} : \int \delta(\boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\sigma} \, dV &= \int \delta\mathbf{w}^T \mathbf{B}^T E \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \\ &= \int \delta\mathbf{w}^T \mathbf{B}^T E (\mathbf{B}\mathbf{w}) \, dV \\ &= (\delta\mathbf{w}^T) \int \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \, dV \mathbf{w} \end{aligned} \quad (8.13)$$

この内部仕事が、外力と変位のスカラー積である外部仕事 $(\delta\mathbf{w}^T)\mathbf{F}$ と等しくなる。すなわち、 $\delta\mathbf{w}^T$ は共通なので；

$$\left(\int \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \, dV \right) \mathbf{w} = \mathbf{F} \quad (8.14)$$

これより；

$$\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{F} \quad (8.15)$$

となり、外力と変位が線形となるバネの式が得られる。問題としては、外力の荷重条件が与えられた時、連立一次方程式を解くことで未知変位を求めることになる。

また、上式中の \mathbf{K} は；

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \, dV = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A \, dx = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

であり、**要素剛性マトリックス** (elemental stiffness matrix) という。物理的な意味は、バネ定数と同じ次元(力/長さ)を持っていることに注意する。

8.2.3 バネモデルの例題

例題：図 8-3 のバネ系の剛性マトリックスを求めなさい。また、このままでは連立一次方程式は求解不能であることを示しなさい。なお、図において $f_i (i = 1, 2)$ は外力、 $u_i (i = 1, 2)$ は変位を表わす。またバネ定数を K とする。

¹⁰本資料エネルギー法参照。

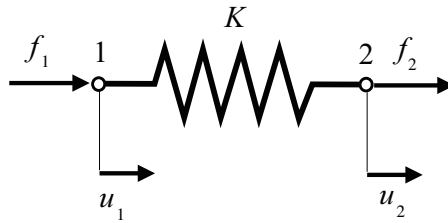


図 8-3 一次元有限要素の例題

【解答】

A) 前節のはりの場合の考えをそのまま当てはめればよい。図において、

- $u_1 = 0$ とすると：

$$f_{22} = Ku_2, f_{12} = -f_{22} = -Ku_2$$

- $u_2 = 0$ とすると：

$$f_{11} = Ku_1, f_{21} = -f_{11} = -Ku_1$$

これらを重ね合わせると、 $f_1 = f_{11} + f_{12}$, $f_2 = f_{21} + f_{22}$ であるから、

$$\begin{cases} f_1 = f_{11} + f_{12} = Ku_1 - Ku_2 \\ f_2 = f_{21} + f_{22} = -Ku_1 + Ku_2 \end{cases}$$

よって、

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (8.17)$$

B) 線形代数より、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $|A| \neq 0$ のとき、ただ一つの解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ を持つ。本問題の場合、

$$\begin{vmatrix} K & -K \\ -K & K \end{vmatrix} = K^2 - K^2 = 0$$

であるゆえ、このままでは求解できない。解くためには、境界条件 (例えば $u_2=0$) を導入する必要がある。

【補足】 1次元有限要素バネモデルの拡張

(8.17) の関係をもとに、1次元バネが複数個接続される直列バネ系や並列バネ系の場合に系全体の剛性方程式がどのように表現できるかを確認しなさい。

8.3 はりの問題の有限要素法の理論*

本節では、はりを対象とした有限要素法について、定式化の理論を取りまとめる。

既に学習しているように、エネルギー原理によれば曲げモーメント M 作用時のひずみエネルギーは；

$$\delta U = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} \delta x \quad (8.18)$$

また外力 q (単位長さあたりの分布力) の作用による仕事は；

$$\delta W = qw\delta x \quad (8.19)$$

要素内のたわみ w は 3 次の Hermite(エルミート) 補間で表せるものとする。そのとき、節点たわみ w_i と節点たわみ角 θ_i ($i=1,2$) により任意の場所のたわみが次式のように形状関数を用いて表現できる。

$$w \simeq [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{w} \quad (8.20)$$

ここに $\theta_1 = \partial w / \partial x$ (節点 1 において)。なお形状関数ははりの長さを L として：

$$N_1 = \frac{1}{L^3}(L^3 - 3Lx^2 + 2x^3) \quad (8.21)$$

$$N_2 = \frac{1}{L^2}(L^2x - 2Lx^2 + x^3) \quad (8.22)$$

$$N_3 = \frac{1}{L^3}(3Lx^2 - 2x^3) \quad (8.23)$$

$$N_4 = \frac{1}{L^2}(x^3 - Lx^2) \quad (8.24)$$

として定義される。

また、たわみの微分方程式は；

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8.25)$$

$$= \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{w} \quad (8.26)$$

ここに \mathbf{D} は材料定数 EI 、また $\mathbf{A} = -\partial^2 / \partial x^2$ である。

式 (8.18) の M 1 個を (8.25) 式で置き換えて；

$$\delta U = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) M \delta x \quad (8.27)$$

したがって；

$$\delta U = \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{w})^T M \delta x \quad (8.28)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{w})^T \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{w} \delta x \quad (8.29)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T (\mathbf{A}\mathbf{N})^T \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{w} \delta x \quad (8.30)$$

長さ L の要素の全ひずみエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{w}^T (\mathbf{AN})^T \mathbf{DAN} \mathbf{w} \, dx \quad (8.31)$$

ここで $\mathbf{B} = \mathbf{AN}$ を代入し、 \mathbf{w} は節点の情報であるので積分の外に出すと；

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{DB} \, dx \, \mathbf{w} \quad (8.32)$$

同様に、(8.19) 式も変形して整理すると全ポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} \Pi &= U - W \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{DB} \, dx \, \mathbf{w} - \mathbf{w}^T q \int_0^L \mathbf{N}^T \, dx \end{aligned} \quad (8.33)$$

この汎関数の停留条件より；

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{w}^T} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{DB} \, dx \, \mathbf{w} - q \int_0^L \mathbf{N}^T \, dx = 0 \quad (8.34)$$

すなわち

$$\int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{DB} \, dx \, \mathbf{w} = q \int_0^L \mathbf{N}^T \, dx \quad (8.35)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{DB} \, dx \\ \mathbf{F} &= q \int_0^L \mathbf{N}^T \, dx \end{aligned}$$

を代入すると

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{w} \quad (8.36)$$

が得られる。

この式は、係数マトリックス \mathbf{K} に未知変位 \mathbf{w} を作用させた結果、力 \mathbf{F} が発生することを意味する「バネの式」であり、変位の自由度分の式からなる連立一次方程式である。この連立一次方程式を境界条件を考慮して解くことで、有限要素法による数値解が求められる。

8.4 プログラミング

前述のはりの問題解析用に作成した FEM プログラムの例 (beamx.f90) を以下に示す。プログラム言語は Fortran90 である¹¹。プログラムの実行時には、別途データファイルを用意しておく必要がある。

```
!*****
!      PROGRAM beamx.f90
!
!      for Strength of Material/FEM
!
!*****
module beams
  integer, PARAMETER:: NPMAX=180,NEMAX=200,NMMAX=10,NBMAX=30
  CHARACTER(12):: PNAME,DNAME
  real(8):: tf(NPMAX*2),tk(NPMAX*2,NPMAX*2)
  real(8):: y(NPMAX),x(NPMAX),fy(NPMAX*2)
  real(8):: ei(NMMAX)
  integer:: II(NEMAX),JJ(NEMAX),MM(NEMAX)
  integer:: IB(NBMAX),IXY(NBMAX,2),ig(npmax*2)
  integer:: NP,NE,NB,NM,NF,ndfe,n
  real(8):: de,elen
  integer:: ll(4)
end module beams
program beamx
  use beams
  implicit none
  real(8):: bee(4,4),EK(4,4),sh(4),eu(4),w
  integer:: i,lb,j,k,k1,k2,ie,je,ke,l,it,jt,m

  ndfe=4
!=====
!      input data
!=====
  do i=1,nbmax
    do j=1,2
      ixy(i,j) = 0
    end do
  end do

  call datar

  n=2*np

  call mclr(tk,NPMAX*2,npmax*2)
  call vclr(tf,NPMAX*2)
!=====
!      FEM Main Calculation
!=====
!
!      --- Element Loop Begins
  do L=1,ne
    i = ii(L)! left node
    j = jj(L)! right node
    m = mm(L)! material#
    elen = x(j) - x(i)! length of element
```

¹¹ 2 回生配当科目『情報処理学及び演習 I』と同程度のプログラム作成・実行について学習しているものとする。

```

!                                     --- [B]T[B] with integration
bee(1,1) = 12.0d0/(elen*elen*elen)
bee(3,3) = bee(1,1)
bee(1,2) = 6.0d0/(elen*elen)
bee(2,1) = bee(1,2)
bee(1,4) = bee(1,2)
bee(4,1) = bee(1,4)
bee(1,3) = -bee(1,1)
bee(3,1) = bee(1,3)
bee(3,4) = -bee(1,2)
bee(4,3) = bee(3,4)
bee(2,3) = bee(3,4)
bee(3,2) = bee(2,3)
bee(2,2) = 4.0d0/elen
bee(4,4) = bee(2,2)
bee(2,4) = 2.0d0/elen
bee(4,2) = bee(2,4)
!                                     --- [D] ==> EI (const.)
de=ei(m)
!
!   add to Global Stiffness Matrix by Bandmatrix Method
!
LL(1)=2*i-1
LL(2)=2*i
LL(3)=2*j-1
LL(4)=2*j
do ie=1,ndfe
  do je=ie,ndfe
    it=LL(ie)
    jt=LL(je)
    tk(it,jt)=tk(it,jt) + bee(ie,je)*de
    tk(jt,it)=tk(it,jt) ! symmetric entry
  end do
end do
!                                     --- Element Loop End
end do
!=====
!   Boundary Condition
!=====
!                                     [ Set Load Condition ]
do i=1,n
  tf(i) = fy(i) ! loading condition at DOF#
  ig(i) = 0      ! index of confining DOF (1: confine)
end do
!                                     [ Set Displacement Boundary Condition ]
do i=1,nb
  do l=1,2
    if (ixy(i,l) == 0) goto 556! if not confined
    k = 2*ib(i)-2+1
    ig(k) = 1 ! confining DOF
    do j = 1, n
      tk(k,j) = 0.0d0! column line
      tk(j,k) = 0.0d0! row line
    end do
    tk(k,k) = 1.0d0! diagonal term ==> 1
    tf(k) = 0.0d0! RHS term
  end do
end do

```

```

556      continue
      end do
    end do
!=====
!      Solve by Gauss Elimination Method
!=====
      call gauss
!=====
!      Result Printout
!=====
      write(*,*)
      write(*,*) '-----'
      write(*,*) '[Deflection]'
      write(*,*) '  DOF#          y(or i)'
      call printv(tf,n)
!
      write(*,*)
      write(*,*) '[Shear & Bending Moment]'
      write(*,*) '  DOF#          F(or M)'
      do l=1,ne
        i = ii(l)! left node
        j = jj(l)! right node
        m = mm(l)! material#
        de = ei(m)
        elen = x(j) - x(i)! length of element
!
!                                     --- [B]T[B] with integration
        bee(1,1) = 12.0d0/(elen*elen*elen)
        bee(3,3) = bee(1,1)
        bee(1,2) = 6.0d0/(elen*elen)
        bee(2,1) = bee(1,2)
        bee(1,4) = bee(1,2)
        bee(4,1) = bee(1,4)
        bee(1,3) = -bee(1,1)
        bee(3,1) = bee(1,3)
        bee(3,4) = -bee(1,2)
        bee(4,3) = bee(3,4)
        bee(2,3) = bee(3,4)
        bee(3,2) = bee(2,3)
        bee(2,2) = 4.0d0/elen
        bee(4,4) = bee(2,2)
        bee(2,4) = 2.0d0/elen
        bee(4,2) = bee(2,4)
!
        eu(1) = tf(2*i-1 )
        eu(2) = tf(2*i   )
        eu(3) = tf(2*j-1 )
        eu(4) = tf(2*j   )
!
        if(ig(2*i-1)==1) eu(1) = 0.0d0
        if(ig(2*i  )==1) eu(2) = 0.0d0
        if(ig(2*j-1)==1) eu(3) = 0.0d0
        if(ig(2*j  )==1) eu(4) = 0.0d0
!
      do k=1,ndfe
        w = 0.0d0
        do k2=1,ndfe
          w = w + bee(k,k2)*eu(k2)*de

```

```

        end do
        sh(k) = w
    end do
    call printv(sh,4)
end do
!
stop
end program
subroutine mclr(a,m,n)
    implicit none
    integer::k,l,m,n
    real(8):: a(m,*)
    do k=1,n
        do l=1,m
            a(l,k)=0.0d0
        end do
    end do
    return
end subroutine mclr
subroutine vclr(a,m)
    implicit none
    real(8):: a(*)
    integer:: k,m
    do k=1,m
        a(k)=0.0d0
    end do
    return
end subroutine vclr
subroutine printv(x,n)
    implicit none
    real(8):: x(*)
    integer:: i,n
    do i=1,n
        write(*,983) i,x(i)
    end do
983 format(i5,3x,f12.5)
    return
end subroutine printv
subroutine datar
    use beams
    implicit none
    integer:: ierr,i,j,k,l
!
    WRITE(*,*) ' [Strength of Material]---fortran90 edition-'
    WRITE(*,*) '      Beamx FEM (Ver.1.0) April 5,2011'
    WRITE(*,*)
    WRITE(*,'(a,$)') ' ==> Enter DATA FILE Name?: '
395 READ(*,'(1A12)') dname
    IF(DNAME=='') THEN
        WRITE(*,*) ' ... Invalid File Name. Re-enter please!.'
        GOTO 395
    ENDIF
    OPEN(5,FILE=DNAME,STATUS='OLD')
    READ(5,'(1A12)',IOSTAT=IERR) pname
    IF (IERR==-1) THEN
        WRITE(*,*) ' ... No File exists. Press return key to quit.'
        STOP
    ENDIF

```

```

write(*,*)
WRITE(*,'(a,$)') ' Prob: '
write(*,'(a12)') pname
write(*,*) '-----'
write(*,*) '[Input Data]'
READ(5,*) NP
WRITE(*,900) NP
900 FORMAT(/,' Total Node Number = ',I3)
WRITE(*,901)
901 FORMAT(' Node# X-coord. Y-coord.')
```

```

DO L=1,NP
  READ(5,*) X(L),Y(L)
  WRITE(*,902) L,X(L),Y(L)
902 FORMAT(I5,3X,2F12.3)
end do

READ(5,*) NM
WRITE(*,903) NM
903 FORMAT(/,' Total Number of Material = ',I3)

WRITE(*,904)
904 FORMAT(' Mat# EI')
```

```

DO L=1,NM
  READ(5,*) ei(L)
  WRITE(*,905) L,ei(L)
905 FORMAT(I5,3X,3F15.6)
end do

READ(5,*) NE
WRITE(*,906) NE
906 FORMAT(/,' Total Element Number = ',I3)
WRITE(*,907)
907 FORMAT(' Elem# I J Mat')
```

```

DO L=1,NE
  READ(5,*) II(L),JJ(L),MM(L)
  WRITE(*,908) L,II(L),JJ(L),MM(L)
908 FORMAT(I5,6X,3I4)
end do

READ(5,*) NB
WRITE(*,909) NB
909 FORMAT(/,' Total Boundary Condition = ',I3)

WRITE(*,910)
910 FORMAT(' Node# Y-dir. Rot-dir.')
```

```

DO L=1,NB
  READ(5,*) IB(L),IXY(L,1),IXY(L,2)
  WRITE(*,911) IB(L),IXY(L,1),IXY(L,2)
911 FORMAT(I5,5X,2I8)
end do

CALL VCLR(FY,NP)
READ(5,*) NF
WRITE(*,912) NF
912 FORMAT(/,' Total Loading Condition = ',I3)
WRITE(*,913)
913 FORMAT(' DOF# Fy(or Mom)')
```

```

DO L=1,NF
```



```

        READ(5,*)      I,FY(I)
        WRITE(*,915)  I,FY(I)
915  FORMAT(I5,5X,2F10.3)
    end do
    CLOSE(5)
    return
end subroutine datar
subroutine gauss
    use beams
    implicit none
    real(8):: Q
    integer:: k,j,i
!
!      --- Forward Elimination ---
DO i=1,N-1
    DO J=i+1,N
        q = tk(j,i)/tk(i,i)
        tf(j) = tf(j) - q*tf(i)
        DO k=i+1,N
            tk(j,k) = tk(j,k) - q*tk(i,k)
        end do
    end do
end do
!      --- Backward Substitution --
tf(n) = tf(n)/tk(n,n)
DO i=n-1,1,-1
    DO j = i+1, N
        tf(i) = tf(i) - tk(i,j)*tf(j)
    end do
    tf(i) = tf(i)/tk(i,i)
end do
return
end subroutine gauss

```

FEM プログラムの大まかな流れ：

- 初期化
- データ入力
- 要素ごとに
 - 要素剛性マトリックスの計算
 - 全体剛性マトリックスへの加算
- 境界条件および荷重条件の設定
- 連立一次方程式の求解
- 結果の出力
- (必要ならば) 要素ごとに応力計算・出力

8.5 例題 1：集中荷重を受ける単純支持はり

8.5.1 データの準備

簡単な例題として，単純支持はりに集中荷重が作用する問題を解析する．**図 8-4** が問題図である．なお，はりには軸力が作用しないため，水平方向の自由度はないものとして簡略化する方法 (例えば文献 [6]) もあるが，**図 8-5** においては，全自由度数 (節点数 \times 2 自由度) についてカウントしていることに注意．

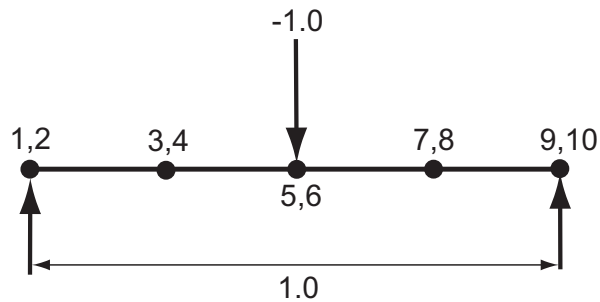


図 8-4 集中荷重を受ける単純支持はり.

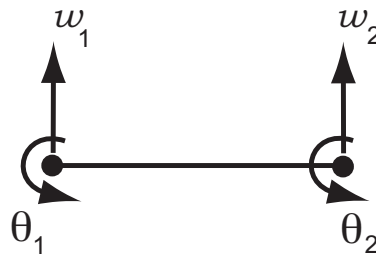


図 8-5 節点自由度の表現.

プログラム `beam.f` を一部変更したものをコンパイルして実行すると，各種データの入力を促される．ここでは以下のように設定した．

- 全節点数: 5
- 全自由度: 10
- 全要素数: 4
- 各要素長さ: 0.25
- EI の値: 1.0
- 拘束節点 (支点) 数: 2
- 拘束節点番号, 垂直方向拘束, 回転拘束
 - 1,0,1
 - 5,0,1
- 全荷重条件数: 1

- 荷重条件自由度番号, 荷重条件
 - 5,-1.0

準備したデータファイル **beam1.dat** の内容を以下に示す。

```
simple_beam
5
0.0,0.0
0.25,0.0
0.5,0.0
0.75,0.0
1.0,0.0
1
1.0
4
1, 2, 1
2, 3, 1
3, 4, 1
4, 5, 1
2
1, 1, 0
5, 1, 0
1
5, -1.0
```

8.5.2 実行結果

データファイル **beam1.dat**(問題名は `simple_beam`) を用いて `beamx` を実行した結果を以下に示す。

```
fiat:/Users/fiat/prg/student/material> ./beamx
[Strength of Material] -Fortran90 edition-
Beam FEM (Ver.1.0) April 5,2011

==> Enter DATA FILE Name?: beam1.dat

Prob: simple_beam
-----
---Input Data---

Total Node Number = 5
Node#      X-coord.    Y-coord.
  1         0.000      0.000
  2         0.250      0.000
  3         0.500      0.000
  4         0.750      0.000
  5         1.000      0.000

Total Number of Material = 1
Mat#       EI
  1         1.000000

Total Element Number = 4
Elem#      I   J   Mat
```

1	1	2	1
2	2	3	1
3	3	4	1
4	4	5	1

Total Boundary Condition = 2

Node#	Y-dir.	Rot-dir.
1	1	0
5	1	0

Total Loading Condition = 1

DOF#	Fy (or Mom)
5	-1.000

[Deflection]

DOF#	y (or i)
1	0.00000
2	-0.06250
3	-0.01432
4	-0.04688
5	-0.02083
6	0.00000
7	-0.01432
8	0.04688
9	0.00000
10	0.06250

[Shear & Bending Moment]

DOF#	F (or M)
1	0.50000
2	0.00000
3	-0.50000
4	0.12500
1	0.50000
2	-0.12500
3	-0.50000
4	0.25000
1	-0.50000
2	-0.25000
3	0.50000
4	0.12500
1	-0.50000
2	-0.12500
3	0.50000
4	0.00000

8.5.3 結果の検討

Deflectionでの自由度番号5が、はりの中央の節点の最大たわみを発生する節点位置のたわみ方向である。単純支持はりのたわみ問題の知識より、中央に集中荷重 W の作用するはり(長

さ)の最大たわみは, $W = 1, l = 1, EI = 1$ の時;

$$y_{max} = \frac{Wl^3}{48EI} \simeq 0.021$$

であり, 上記の FEM の解析結果は, はりのたわみ問題の理論解とほぼ等しいことがわかる.

また図 8-6 に示すように, 対応するせん断力の分布 (SFD) や最大曲げモーメント分布 (BMD) の値も, 既に応用力学で学習している理論解と等しいことも確認できる.

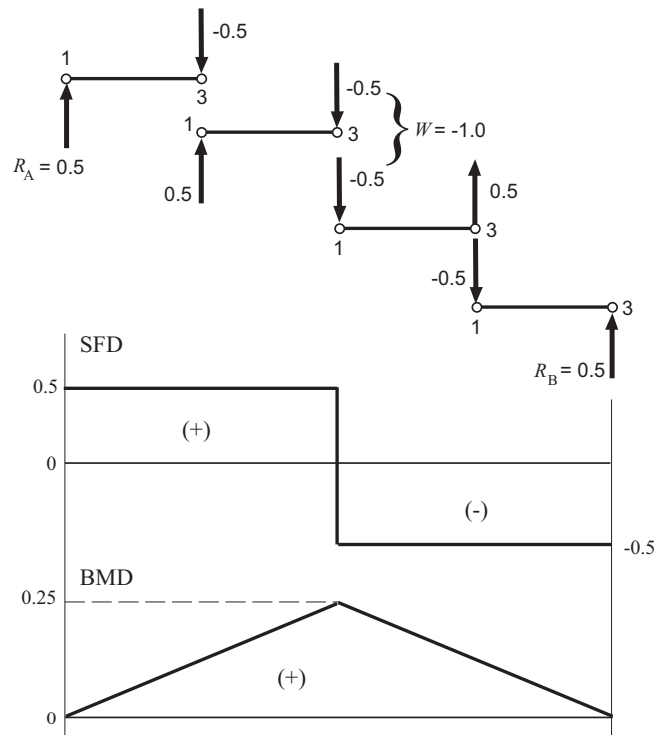


図 8-6 結果の解釈 (せん断力図と曲げモーメント図) [6].

8.6 例題 2：集中荷重を受ける片持はり

8.6.1 データの準備

はりの例題の他の例として集中荷重を受ける片持はりの場合を解析する。図 8-7 が問題図である。

はりを 4 個の要素に分けて、幾何学的境界条件として左端節点 1 の垂直方向の移動 [自由度番号 1] ならびに回転 [自由度番号 2] を止める。荷重条件は、右端の節点 5 の垂直方向 [自由度番号 9] に下向き荷重-1 が作用するものとする。

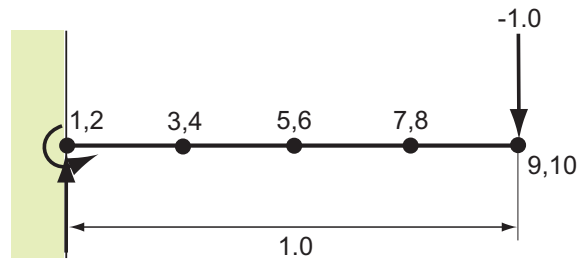


図 8-7 集中荷重を受ける片持はりの問題.

用意したデータファイル beam2.dat の内容を以下に示す。

```
cantilever
5
0.0,0.0
0.25,0.0
0.5,0.0
0.75,0.0
1.0,0.0
1
1.0
4
1, 2, 1
2, 3, 1
3, 4, 1
4, 5, 1
1
1, 1, 1
1
9, -1.0
```

8.6.2 解析実行結果

以下に実行結果を示す。

```
fiat:/Users/fiat/prg/student/material> ./beamx
[Strength of Material]---fortran90 edition-
Beamx FEM (Ver.1.0) April 5,2011

==> Enter DATA FILE Name?: beam2.dat
```

Prob: cantilever

[Input Data]

Total Node Number = 5
Node# X-coord. Y-coord.
1 0.000 0.000
2 0.250 0.000
3 0.500 0.000
4 0.750 0.000
5 1.000 0.000

Total Number of Material = 1
Mat# EI
1 1.000000

Total Element Number = 4
Elem# I J Mat
1 1 2 1
2 2 3 1
3 3 4 1
4 4 5 1

Total Boundary Condition = 1
Node# Y-dir. Rot-dir.
1 1 1

Total Loading Condition = 1
DOF# Fy(or Mom)
9 -1.000

[Deflection]

DOF# y(or i)
1 0.00000
2 0.00000
3 -0.02865
4 -0.21875
5 -0.10417
6 -0.37500
7 -0.21094
8 -0.46875
9 -0.33333
10 -0.50000

[Shear & Bending Moment]

DOF# F(or M)
1 1.00000
2 1.00000
3 -1.00000
4 -0.75000
1 1.00000
2 0.75000
3 -1.00000
4 -0.50000
1 1.00000
2 0.50000
3 -1.00000

4	-0.25000
1	1.00000
2	0.25000
3	-1.00000
4	0.00000

自由端の最大たわみ [自由度番号 9] を見ると, $y_{max} = -0.3333$ である. 応用力学で学習したように, 片持はりの自由端に集中荷重が作用するときのたわみが;

$$y_{max} = \frac{PL^3}{3EI} \quad (8.37)$$

であったことを思い出すと, 今の条件が $P = -1$ かつ $L = EI = 1$ であることから, FEM でも同じ結果が得られることが分かる. 同様にせん断力や曲げモーメントの分布も既学習の結果と同じであることが確認できる.

参考文献

- [1] 日本機械学会編: JSME テキストシリーズ 材料力学, 日本機械学会, 2007.
- [2] 有光 隆: 図解でわかる はじめての材料力学, 技術評論社, 1999.
- [3] 材料力学教育研究会編: 新形式 材料力学の学び方・解き方, 共立出版, 1994.
- [4] 柴田俊忍, 大谷隆一, 駒井謙治郎, 井上達雄: 材料力学の基礎, 培風館, 1991.
- [5] 鵜戸口英善, 川田雄一, 倉西正嗣: 材料力学 上巻, 裳華房, 1957.
- [6] I.M. Smith, D.V.Griffiths: Programming the finite element method, 2nd Edition, John Wiley & Sons Ltd., 1982.