微分積分学[1]

吉田伸生 [2]

0 序

0.1 出発点と目標

この講義は大学の理科系学部 1 年生を対象とした微分積分学への入門である。

実数の定義から出発し、連続関数の性質、主に一変数の場合の微分法、積分法の基礎を述べ、更に多変数への橋渡しまでを目標とする。講義の基本方針は以下の通りである：

- 「学ぶだけの微積分」でなく、「使える微積分」を目指す。数多くの具体例と練習問題で、使い方を体で覚える。
- 十分な厳密性、一般性を確保すると同時に、抽象論に偏らず、できるだけ早い段階で具体例、特に 指数関数、三角関数,... を導入し、それらを丁寧に論じる。

なお、これらの目的に十分合致した既存の教科書に、残念ながら筆者はまだ出会っていないので、独自の講義ノートに従って講義を進める。

更に、物理学との関連や、微分積分学の発展の歴史にも適宜触れ、色々な切口から楽しめる講義にしたい。今の所の予定は次の通りであるが、多少変更される可能性が高い。

目 次

[1]2007 年度、京都大学理学部 1 年生向け講義「微分積分学 A・B」 用ノート 平成 20 年 5 月 9 日.

[2]京都大学大学院理学研究科 [e-mail] nobuo@math.kyoto-u.ac.jp, [URL] http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nobuo

予備知識：基本的には集合や論理に関する基本的用語のみを仮定する。一部の練習問題や多変数の微積分（講義の最後の方）には、線形代数の基礎的知識を仮定する。

「問」について： 講義中、幾つかの練習問題（「問」）を示す。易しいものから、少し手ごわいものまで様々である。($\star$) 印なしの問題は、「必須」、あるいは「単位を取るために最低限この程度は出来て欲しい」というもので、($\star$) 印付きものは、余力のある人向けである。

0.2 参考書

以下に挙げる文献は、筆者が講義の準備に際して参考にしたものである。参照・購入は受講者の判断に任せる。

参考文献

[岩堀] 岩堀長慶 （編） 「微分積分学」 裳華房

[Rud] Rudin, W.: “Principles of Mathmatical Analysis-3rd Edition” McGraw-Hill Book Company.

[杉浦] 杉浦光夫 「解析入門 I,II」 東京大学出版会

[高木] 高木貞治 「解析概論」 改訂第三版 岩波書店

[吉田 1] 吉田伸生 「ルベーグ積分入門–使うための理論と演習」 遊星社

[吉田 2] 吉田伸生 「解析学演習」 （未出版）

[岩堀] は講義の参考にするために、一部を見ただけだが、その印象で判断する限り、手際よく、読みやすく書かれた良書である。実数や一部の初等関数は厳密に定義づけていないが、数学専攻以外の人にとっては、それで十分だろう。[杉浦] は筆者が大学 1 年の時の教科書だった。実数の定義から始まって、がっちりと厳密に書かれている。数学専攻向きである。ただ、「がっちりと厳密に」という姿勢が強烈な上、exp, sin, cos... などの具体的な関数が、本文中に中々出てこないので、読んでいて「しんどいな〜」と感じた記憶がある。[吉田 1] はルベーグ積分の入門書で、（ルベーグ積分を使う方が容易だが）一年生の微積分でも解ける演習問題も多数収録されている。演習問題や微積分の歴史に関する記述を引用する。[吉田 2] は数学専攻の 3 年生向の演習問題集。その中から一年生の微積分で解ける演習問題を引用する。

0.3 論理・集合・写像に関する用語

論理・集合・写像に関する若干の用語・記号について簡単に説明する。

定義 0.3.1 命題 P, Q に対し

- $P \Longrightarrow Q$ は「P が成立するなら Q も成立する」という意味。$Q \Longleftarrow P$ も同義。
- $P \Longleftrightarrow Q$ は「$P \Longrightarrow Q$ かつ $P \Longleftarrow Q$」という意味。
- $\forall$ は「全ての」という意味。例えば、$\forall x, ...$ は「全ての x に対し ... が成立する」。
- $\exists$ は「存在」の意味。例えば、$\exists x, ...$ は「.... を満たす x が存在する」。

- $\exists 1$ は「唯一つ存在」の意味。例えば、$\exists 1 x, \ldots.$ は「.... を満たす x が唯一つ存在する」。

注：数学的内容を記述する際、$\forall$, $\exists$, $\exists 1$ 等の論理記号により、言葉よりも正確で簡潔な表現が可能である。その理由から、この講義でもしばしばこれらの記号を用いる。一方、これらの論理記号はあくまで日常的な略式記号と考えた方がよい。講義・セミナー・簡単な報告書で用いるのは構わないが、論文など、「よそ行き」文書での多用は勧めない。

なお、論理記号ではないが、講義中しばしば次の記号を用いる：

• $P \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} Q$ は「P という新たな記号、或いは概念を Q によって定義する」という意味。$P \overset{\text{def.}}{=} Q$ も同義。

定義 0.3.2 X, Y を集合とする。

• 集合 $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \backslash Y$ を以下のように定義する：

$$\begin{aligned} X \cup Y &= \{z \,;\, z \in X \text{ または } z \in Y\}, \quad X \cap Y = \{z \,;\, z \in X \text{ かつ } z \in Y\}, \\ X \backslash Y &= \{z \,;\, z \in X \text{ かつ } z \notin Y\}. \end{aligned}$$

• $x \in X$, $y \in Y$ を並べた記号 (x, y) 全体の集合を $X \times Y$ と記し、X と Y の**直積**と呼ぶ。$(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対し、

$$(x, y) = (x', y')$$

を $x = x'$ かつ $y = y'$ と定義する。

定義 0.3.3 X, Y を集合とする。

• ある規則 φ により、任意の $x \in X$ に対し x によって定まる Y の元 $\varphi(x)$ がひとつ選ばれるとき、この規則 φ を X から Y への**写像**という。φ が X から Y への写像であることを $\varphi : X \to Y$ と書き表す。また、x から $\varphi(x)$ が定まることを $x \mapsto \varphi(x)$ と書き表す（矢印の左端に短い縦線がある)。

• 写像 $\varphi : X \longrightarrow Y$, $A \subset X$ に対し、$\varphi(A) \subset Y$ を次のように定める：

$$\varphi(A) = \{\varphi(x) \,;\, x \in A\}$$

$\varphi(A)$ を φ による A の**像** (image) と呼ぶ。

• $\varphi(X) = Y$ なら φ は **全射** (surjective) であると言う。

• 写像 $\varphi : X \longrightarrow Y$, $B \subset Y$ に対し、$\varphi^{-1}(B) \subset X$ を次のように定める：

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \in X \,;\, \varphi(x) \in B\}$$

$\varphi^{-1}(B)$ を φ **による** B **の逆像** (inverse image) と呼ぶ。

• $y \in \varphi(X)$ に対し、$\varphi^{-1}(\{y\})$ が 2 つ以上の元を含まないとき、φ は **単射** (injective)、或は **一対一** (one to one) であると言う。

φ が単射、$y \in \varphi(X)$ なら $\varphi^{-1}(\{y\})$ は唯 1 つの元を含む。その元を $\varphi^{-1}(y)$ と記し、写像：$\varphi^{-1}: y \mapsto \varphi^{-1}(y)$ $(\varphi(X) \longrightarrow X)$ を φ の**逆写像** と呼ぶ。

φ が全射かつ単射なら φ は**全単射**（bijective）であると言う。

• Z を集合、$\psi: Y \longrightarrow Z$ を写像とする。写像：

$$x \mapsto \psi(\varphi(x)), \quad X \longrightarrow Z$$

を φ と ψ の **合成**と呼び、$\psi \circ \varphi$ と記す。

例 0.3.4 (a) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$, $\varphi(x_3) = y_2$ と定めれば、$\varphi : X \to Y$ である。 $\varphi(X) = Y$ だから φ は全射である。また、$\varphi^{-1}(\{y_2\}) = \{x_2, x_3\}$ だから φ は単射でない。

(b) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = x_2$ と定めれば、$\varphi: X \to Y$ である。 $\varphi(X) = \{y_1, y_2\} \neq Y$ だから φ は全射でない。また、$\varphi^{-1}(\{y_1\}) = \{x_1\}$, $\varphi^{-1}(\{y_2\}) = \{x_2\}$ だから φ は単射である。

(c) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $\varphi(x_j) = y_j$, $j = 1, 2, 3$ と定めれば、$\varphi: X \to Y$ である。 $\varphi(X) = Y$ だから φ は全射である。また、$\varphi^{-1}(\{y_j\}) = \{x_j\}$, $j = 1, 2, 3$ だから φ は単射でもあり、φ の逆写像 $\varphi^{-1}: Y \to X$ は $\varphi^{-1}(x_j) = x_j$, $j = 1, 2, 3$ で与えられる。

問 0.3.1 X, Y を集合、$\varphi: X \longrightarrow Y$, $\psi: Y \longrightarrow X$ を写像とする。次を示せ：

$$\varphi \text{ は全単射}, \ \varphi^{-1} = \psi \iff \begin{cases} \text{全ての } x \in X \text{ に対し } \psi \circ \varphi(x) = x \\ \text{全ての } y \in Y \text{ に対し } \varphi \circ \psi(y) = y \end{cases} \iff \psi \text{ は全単射}, \ \psi^{-1} = \varphi$$

1　実数

この講義を始めるにあたり我々は「実数全体の集合」というものが存在し、そこでは小学校以来親しんできた四則演算と不等号に関する規則がそのまま通用することを容認する。当たり前のことを言うようであるが、これについて少し注意を述べておく。

- 現代数学の論理とは、集合上にある構造（例えば「演算」、「順序」など）を公理として仮定するところから出発する。従って、現代数学の論理に従えば、実数に関する四則演算や不等号に関する規則もきちっと公理化すべきである (13.1 節参照)。それを省略するのは、小学校以来親しんできた四則演算や不等号に関する規則を改めて公理化することは非実用的という理由による。

- 我々が容認するのは、あくまでも四則演算と不等号に関する規則のみであり、それ以外の操作は今の所容認しない。例えば、「平方根をとる」といった操作は四則演算と不等号に含まれないので、今後改めて議論する。

四則演算と不等号に関する規則に加え、実数全体の集合に「連続の公理」（定義 1.3.6 参照）を仮定することが我々にとっての解析学の出発点となる。

1.1　数に関する記号

定義 1.1.1 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表し、$\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ を以下のように定める：

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 1+1(=2), 1+1+1(=3), ...\}, \quad (\textbf{自然数の集合}) \\
\mathbb{Z} &= \{a-b\ ;\ a, b \in \mathbb{N}\}, \quad (\textbf{整数の集合}) \\
\mathbb{Q} &= \{a/b\ ;\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ b \neq 0\}. \quad (\textbf{有理数体})
\end{aligned}$$

- 実数 a を $a > 0$, $a < 0$ に応じてそれぞれ**正数**, **負数**と呼ぶ。
- 実数 a に対し、$|a|$, a^+, a^- を次のように定義する：

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a \leq 0. \end{cases} \quad a^+ = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ 0, & a \leq 0. \end{cases} \quad a^- = \begin{cases} 0, & a \geq 0, \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$$

$|a|$, a^+, a^- をそれぞれ **絶対値** (absolute value), **正部** (positive part), **負部** (negative part) と呼ぶ。

問 1.1.1 絶対値、正（負）部について以下を示せ：(i) $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ なら $|x| > 0$. (ii) $c, x \in \mathbb{R}$ なら $|cx| = |c||x|$ (iii) $x, y \in \mathbb{R}$ なら $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$. (iv) $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$. (v) $x^+ = (|x| + x)/2$, $x^- = (|x| - x)/2$.

問 1.1.2 $x, y \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ とする。以下を示せ:(i) $x^m - y^m = (x-y)\sum_{k=0}^{m-1} x^k y^{m-1-k}$. (ii) $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ なら $|x^m - y^m| \leq mr^{m-1}|x-y|$, $|x^m - y^m - mx^{m-1}(x-y)| \leq \frac{1}{2}m(m-1)r^{m-2}|x-y|^2$.

定義 1.1.2 $\mathbb{R}$ に 2 点 $+\infty, -\infty$ を付け加えた集合 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ を考える。$+\infty$ は単に ∞ と書くこともある。

• $\pm\infty$ に関する順序関係を次のように定義する：

$$a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ なら } a < +\infty,$$
$$a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ なら } -\infty < a.$$

$+\infty$ を **正の無限大** (positive infinity), $-\infty$ を**負の無限大** (negative infinity) と呼ぶ。また、集合 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ を **補完数直線**と呼ぶ。

• $\pm\infty$ に関する演算規則を次のように定義する：

$$a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ なら } a + \infty = \infty + a = \infty,$$
$$a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ なら } a - \infty = a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty,$$
$$0 < a \leq +\infty \text{ なら } a\infty = \infty a = \infty,\ (-a)\infty = \infty(-a) = a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty.$$
$$a \in \mathbb{R} \text{ なら } a/\infty = a/(-\infty) = 0.$$

なお、上記の「$0 < a \leq +\infty$」 は、「a が正実数、或は $a = +\infty$」を意味する。このような表記を以後しばしば用いる。

注 1：$\infty - \infty$, 0∞, ∞/∞ 等は定義していない。

注 2：定義 1.1.2 で与えた順序・演算に関する規則により、順序に関する規則 (O1)–(O6) は $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して成立する。

定義 1.1.3 $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ を次のように定義する：

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ a < x < b\},\ \ [a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}}\ ;\ a \leq x \leq b\},$$

(a, b) を**開区間** (open interval)、$[a, b]$ を**閉区間** (closed interval) と呼ぶ。更に $[a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$、$(a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ を次のように定義する：

$$[a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}}\ ;\ a \leq x < b\},\quad (a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}}\ ;\ a < x \leq b\}.$$

上記 (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ を総称して**区間** (interval) と呼び、それらが空でない場合、a を**下端**, b を**上端**と呼ぶ。

定義 1.1.4 A を集合とする。$n \in \mathbb{N}$ 及び全単射 $\varphi : \{x \in \mathbb{N}\ ;\ 1 \leq x \leq n\} \to A$ が存在するとき、A を**有限集合**（finite set）と呼び、n を $\sharp A$ と記す。有限集合でない集合を**無限集合**（infinite set）と呼ぶ。

1.2 最大・最小

この小節では最大・最小値について述べる。

定義 1.2.1 $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $m \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し次の条件を考える：

(U) $A \subset [-\infty, m]$. このとき、m は A の**上界** (upper bound) であるという。

(L) $A \subset [m, \infty]$. このとき、m は A の**下界** (lower bound) であるという。

• $m \in A$ かつ (U) なら m を A の**最大値** (maximum) と呼び、$\max A$ と記す。

• $m \in A$ かつ (L) なら m を A の**最小値** (minimum) と呼び、$\min A$ と記す。

• A が実数値の上界（下界）をもつとき、A は **上に（下に）有界** という。A が上にも下にも有界なら、A は **有界** (bounded) であると言う。

注：(**最大・最小値が** $\pm\infty$ **になる場合**) 最大・最小の定義から、

$$\max A = \begin{cases} \infty \iff \infty \in A, \\ -\infty \iff A = \{-\infty\} \end{cases}, \quad \min A = \begin{cases} -\infty \iff -\infty \in A, \\ \infty \iff A = \{\infty\} \end{cases}.$$

上記以外の場合、特に $A \subset \mathbb{R}$ に対し $\max A, \min A$ がもし存在すれば、実数値である。

問 1.2.1 $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対し $\max A, \min A$ はそれぞれ 2 つ以上存在しないことを示せ。

問 1.2.2 (**最大・最小値の双対性**) $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $m \in \overline{\mathbb{R}}$, $-A = \{-a \quad a \in A\}$ とするとき、次を示せ：$m = \max A \Leftrightarrow -m = \min(-A)$, $m = \min A \Leftrightarrow -m = \max(-A)$.

例 1.2.2 (**有限集合の最大・最小値**) $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ が有限集合なら $\max A, \min A$ の存在は $\sharp A$（定義 1.1.4）に関する帰納法で容易に判る（問 1.2.3）。$A = \{a, b\}$ の場合は $\max A = a \vee b$, $\min A = a \wedge b$ と記すこともある。

問 1.2.3 例 1.2.2 中に示唆された「帰納法」を実行せよ。

次の 例 1.2.3 は、後述する 例 1.3.10 への準備である。また、例 1.2.3 を用い剰余定理（問 1.2.5）を示すことができる。

例 1.2.3 $u \in \mathbb{Z}$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z} \cap [-\infty, u]$ なら $\max A$ が存在する。また、$\ell \in \mathbb{Z}$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z} \cap [\ell, \infty]$ なら $\min A$ が存在する。（すぐ後の注参照。）

証明: 双対性（問 1.2.2）より $\max A$ の場合を言えばよい。一般に $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対し以下が成立する：

(1) $\ell \in A \subset [-\infty, u]$, $m = \max(A \cap [\ell, u])$ なら、$m = \max A$.

証明は容易なので、問いとする（問 1.2.4）。
任意の $\ell \in A$ に対し $A' = A \cap [\ell, u]$ は有限集合（問 13.1.2). 従って $\max A'$ が存在（例 1.2.2）。従って $\max A$ も存在（上記 (1)）. □

注：例 1.2.3 は仮定「$u \in \mathbb{Z}$」、「$\ell \in \mathbb{Z}$ 」 をそれぞれ「$u \in \mathbb{R}$」、「$\ell \in \mathbb{R}$ 」におきかえても成立するが、その場合の証明にはアルキメデスの原理（例 1.3.10) が必要である。

問 1.2.4 例 1.2.3 証明中の (1) を示せ。

問 1.2.5 ($\star$) $d \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $x \in \mathbb{Z}$ に対し $x = qd + r$ を満たす $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0, .., d-1\}$ が唯ひとつ存在する (**剰余定理**)。これを、例 1.2.3 を応用して示せ。

問 1.2.5 で r を x を d で割った**余り**と言う。$r = 0$ ならば d 及び $-d$ は x の**約数** (divisor)、x は d 及び $-d$ のの**倍数** (multiple) と言う。$p \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ の正約数が 1 と p のみなら、p を**素数** (prime number) と呼ぶ。$x, y \in \mathbb{Z}$ に共通した正約数が 1 のみなら、

x, y を**互いに素** (relatively prime) と呼ぶ。また、問 1.2.5 で、$d_{-1} = x \neq 0$, $d_0 = d$ とし、帰納的に d_{n-1} を d_n で割った余りを d_{n+1} とする（$n = 0, 1, 2, ..$）。$d_n \geq 1$ なら、$0 \leq d_{n+1} \leq d_n - 1$. よって、$d_N \geq 1$ かつ $d_{N+1} = 0$ をみたす $N \in \mathbb{N}$ が存在する。 このようにして x と d の最大公約数 d_N を求める方法は、**ユークリッドの相除法**[3]として古くから知られていた。

問 1.2.6 ($\star$) 問 1.2.5 の x, d, q について q は $x/d \in [q, q+1)$ を満たす唯一つの整数であることを示せ。

問 1.2.7 ($\star$) $S \subset \{1, 2, \cdots, 2n\}$ が $n+1$ 個の元を含めば S の中に約数、倍数の関係にある 2 数が存在することを示せ。

1.3 連続の公理

連続の公理（定義 1.3.6）の必要性を示唆するために、次のような問題を提起しよう：これまで述べたことを用いて以下の命題が証明できるか？

(a) 与えられた実数 x に対し $x < n$ となる自然数 n が存在する。

(b) 方程式 $x^2 = 2$ は実数解を持つ。

実はこのような、一見明らかな（?）命題を示すにも今まで述べた事柄だけでは不十分で、連続の公理が必要である。因に上記 (a),(b) はそれぞれ 例 1.3.9, 例 2.3.6 で示される。

定義 1.3.1 $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $m \in \overline{\mathbb{R}}$ とする。

• 次の 2 条件が満たされるとき、 m を A の**上限** (supremum) と呼び、$\sup A$ と記す：

(U) $A \subset [-\infty, m]$, つまり、m は A の上界である（定義 1.2.1 参照）。

(S) $x < m$ なら $(x, m] \cap A \neq \emptyset$.

• 次の 2 条件が満たされるとき、 m を A の**下限** (infimum) と呼び、$\inf A$ と記す：

(L) $A \subset [m, \infty]$, つまり、m は A の下界である（定義 1.2.1 参照）。

(I) $m < x$ なら $[m, x) \cap A \neq \emptyset$.

注：$m \neq -\infty$ の場合の (S) は「m より小さく、かつ、いくらでも m に近い A の元が存在する」ことを意味する。$m = -\infty$ なら $x < m$ となる $x \in \overline{\mathbb{R}}$ は存在しないから、(S) は自明に成立する。同様に、$m \neq \infty$ の場合の (I) は「m より大きく、かつ、いくらでも m に近い A の元が存在する」ことを意味する。$m = \infty$ なら $m < x$ となる $x \in \overline{\mathbb{R}}$ は存在しないから、(I) は自明に成立する。

問 1.3.1 $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対し、$\sup A$, $\inf A$ はそれぞれ二つ以上存在しないことを示せ。

[3]Euclid($E\upsilon\kappa\lambda\varepsilon\iota\delta\eta\zeta$), 365 B.C.?–275 B.C.? ユークリッドの相除法は「原論」の中にも記されている。

補題 1.3.2 (**上限・下限の双対性**) $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $m \in \overline{\mathbb{R}}$, $-A = \{-a \quad a \in A\}$ とするとき、

$$m = \sup A \iff -m = \inf(-A),$$
$$m = \inf A \iff -m = \sup(-A).$$

証明： $-A$ の定義から、

$$A \subset [-\infty, m] \iff -A \subset [-m, \infty],$$
$$\forall x \in [-\infty, m) \text{ に対し } (x, m] \cap A \neq \emptyset \iff \forall x \in (-m, \infty] \text{ に対し } [-m, x) \cap A \neq \emptyset.$$

従って、m が A について (U),(S) （定義 1.3.1）を満たすここと、$-m$ が $-A$ について (L),(I) を満たすこことは同値である。従って、「$m = \sup A \Leftrightarrow -m = \inf(-A)$」を示せた。他方も同様に示せる。 □

次の命題からわかるように、上限・下限はそれぞれ最大・最小値の一般化である。

命題 1.3.3 (**最大値と上限、最小値と下限の関係**) $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $m \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し

(a) $m = \max A \iff m = \sup A \in A$

(b) $m = \min A \iff m = \inf A \in A$

証明：(a) $\Longrightarrow$: $m = \max A$ は 定義 1.3.1 (U) を満たすので、(S) を満たすことを言えばよい。所が $x < m$ なら $m \in (x, m] \cap A$ より 確かに (S) を満たす。
(a) $\Longleftarrow$: $m = \sup A \in A$ なら $m \in A$ かつ 定義 1.3.1(U) が満たされるから $m = \max A$.
(b):双対性（問 1.2.2, 補題 1.3.2）より (a) に帰着する。 □

例 1.3.5 の為に、次の自明だが有用な補題を準備する：

補題 1.3.4 $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ なら $(a, b) \neq \emptyset$.

証明： x を次のようにとれば $x \in (a, b)$：

$$x = \begin{cases} \text{任意の実数}, & (a = -\infty, b = \infty \text{ なら}), \\ a + 1, & (-\infty < a, b = \infty \text{ なら}), \\ b - 1, & (a = -\infty, b < \infty \text{ なら}), \\ (a + b)/2, & (-\infty < a, b < \infty \text{ なら}). \end{cases}$$

□

例 1.3.5 (**区間の最大・最小値、上限・下限**) $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $\overset{\circ}{I} = (a, b) \subset I \subset \overline{I} = [a, b]$ とする。このとき、

$$\sup I = b, \ \ \inf I = a.$$

従って、命題 1.3.3 より

$$\max I \text{ が存在} \iff b \in I \iff \max I = b,$$
$$\min I \text{ が存在} \iff a \in I \iff \min I = a.$$

証明: 双対性（補題 1.3.2）より、$\sup I = b$ を示せば十分。そのために 定義 1.3.1 の (U),(S) を検証する。
(U): $I \subset [-\infty, b]$ は明らか。
(S): $x < b$ なら $a \vee x < b$. 従って、補題 1.3.4 より $\emptyset \neq (a \vee x, b)$. ところが、$(a \vee x, b) \subset (x, b] \cap I$ だから $(x, b] \cap I \neq \emptyset$. □

定義 1.3.6 次の公理 (AC) を**連続の公理** (the axiom of continuity) と呼ぶ:

(AC) $A \subset \mathbb{R}$ が空でなく、かつ上に有界なら $\sup A$ が存在して、実数値である。

これで、実数の定義（定義 13.1.1）の説明が完了した。

補題 1.3.7 連続の公理 (AC) は次の (AC′) と同値である：

(AC′) $A \subset \mathbb{R}$ が空でなく、かつ下に有界なら $\inf A$ が存在して、実数値である。

証明: (AC) $\Rightarrow$ (AC′): 補題 1.3.2 を用いる。A が空でなく、下に有界なら、$-A$ は空でなく、上に有界。従って、(AC) より $\sup(-A)$ が存在し、実数値。このとき 補題 1.3.2 より $\inf A$ も存在し、$-\sup(-A)$ に等しい。
(AC′) $\Rightarrow$ (AC):上と同様に示せる。 □

命題 1.3.8 （sup inf の基本性質）

(a) 全ての $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\inf A \in \overline{\mathbb{R}}$ が存在する。

(b) $b \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し $\begin{cases} \sup A \leq b \Longleftrightarrow A \subset [-\infty, b], \\ b \leq \inf A \Longleftrightarrow A \subset [b, \infty]. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \sup A < +\infty \Longleftrightarrow A \text{ は上に有界}, \\ \inf A > -\infty \Longleftrightarrow A \text{ は下に有界}. \end{cases}$

(d) $\emptyset \neq A \subset [\ell, u]$ なら $\ell \leq u$. 特に $\inf A \leq \sup A$.

証明: (a): 双対性（補題 1.3.2）より $\sup A$ の存在を言えば十分。$\sup A$ の定義から、

$$\sup A \quad = \quad \begin{cases} +\infty, & \Longleftrightarrow \quad A \text{ が上に非有界} \\ -\infty, & \Longleftrightarrow \quad A = \emptyset, \{-\infty\}, \end{cases}$$

実際、「$\sup A = \infty$」、「A が上に非有界」は共に「(U),(S) が $m = \infty$ に対して成立する」と言い換えることができる。また、明らかに、「$\sup A = -\infty \iff A \subset \{-\infty\} \iff A = \emptyset, \{-\infty\}$」.

以上より、$A \subset \overline{\mathbb{R}}$ が上に有界かつ $A \neq \emptyset, \{-\infty\}$ の場合を言えばよい。このとき、$A \subset \overline{\mathbb{R}}$ は上に有界かつ $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ だから (AC) より $m = \sup(A \cap \mathbb{R})$ が存在。そこで $m = \sup A$ を言うため、定義 1.3.1 (U), (S) を検証する。
(U):$a \in A$ を任意とする。A は上に有界だから、$a = -\infty$ または $a \in A \cap \mathbb{R}$. $a = -\infty$ なら $a \leq m$ は自明。一方、$a \in A \cap \mathbb{R}$ なら、$m = \sup(A \cap \mathbb{R})$ より $a \leq m$.
(S): $x < m$ なら $\exists a \in A \cap \mathbb{R}$, $x < a$. 従って特に $\exists a \in A$, $x < a$.
以上で $m = \sup A$ となり、$\sup A$ の存在が分かった。

以下、$m^* = \sup A$, $m_* = \inf A$ とおく。
(b): 双対性（補題 1.3.2）より $\sup A$ の場合を示せば十分。
$\Rightarrow$: (U) による。
$\Leftarrow$:対偶を示すため、$b < m^*$ と仮定すると、(S) より $(b, m^*] \cap A \neq \emptyset$. よって $A \not\subset [-\infty, b]$.
(c): (b) から分かる。
(d): 明らか。 $\square$

問 1.3.2 $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ に対し、$\gamma A + \beta = \{\gamma a + \beta \ ; \ a \in A\}$ とする。$\gamma \in (0, \infty)$ に対し以下を示せ：$\sup(\gamma A + \beta) = \gamma \sup A + \beta$, $\inf(\gamma A + \beta) = \gamma \inf A + \beta$, $\sup(-\gamma A + \beta) = -\gamma \inf A + \beta$, $\inf(-\gamma A + \beta) = -\gamma \sup A + \beta$.

問 1.3.3 $\emptyset \neq A \subset (0, \infty]$ に対し、以下を示せ：$\sup\{1/a \ ; \ a \in A\} = 1/\inf A$, $\inf\{1/a \ ; \ a \in A\} = 1/\sup A$. 但し $1/0 = \infty$ とする。

問 1.3.4 (**sup inf の単調性**) $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対し、以下を示せ：(i) $A \subset [-\infty, b]$ となる $b \in B$ が存在。$\Longrightarrow$ $\sup A \le \sup B$. (ii) $A \subset [b, \infty]$ となる $b \in B$ が存在。$\Longrightarrow$ $\inf B \le \inf A$. (iii) $\emptyset \neq A \subset B \Longrightarrow \inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B$. (iv): (i)–(iii) で逆の不成立を次の例で確認せよ； $A = [0, 1]$, $B = (0, 1)$.

問 1.3.5 ($\star$) $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対し、A の上界全体の集合を $U(A)$, 下界全体の集合を $L(A)$ と書くとき、$\sup A = \min U(A)$, $\inf A = \min L(A)$ を示せ。

次の事実は自明に見えるが、厳密な証明には連続の公理を要する：

例 1.3.9 (**アルキメデスの原理**[4]) $\mathbb{Z}$ は上にも下にも非有界である。

証明：上に非有界であることを、背理法で示す。$\mathbb{Z}$ は空でないから、もし有界なら (AC) より $m \stackrel{\text{def}}{=} \sup \mathbb{Z} \in \mathbb{R}$. このとき、$m - 1 < m$ なので $\exists z \in \mathbb{Z}$, $m - 1 < z$ （定義 1.3.1 (S) より）. この z について $m < z + 1 \in \mathbb{Z}$. これは 定義 1.3.1 (U) に反する。下に非有界であることも (AC') を用いた背理法で同様に示せる。 $\square$

注：アルキメデスの原理を、「$\mathbb{Z}$ のみに関する命題」と早合点すると、連続の公理が使われることが奇怪に思われる。所が、「$\mathbb{Z}$ が上に非有界」とは、「全ての <u>実数</u> x に対し、$x < z$ を満たす $z \in \mathbb{Z}$ が存在する」ことである。こう見れば、実数の性質を使って証明することの自然さが判る。

例 1.3.10 **(a)** 空でない $A \subset \mathbb{Z}$ が上に有界なら $\max A$ が存在する。また、空でない $A \subset \mathbb{Z}$ が下に有界なら $\min A$ が存在する。

(b) (**実数の整数部**) $a \in \mathbb{R}$ なら $q \in (a-1, a]$, 即ち $a \in [q, q+1)$ を満たす $q \in \mathbb{Z}$ が唯一つ存在する。この q を $\lfloor a \rfloor$ と記し[5]、a の**整数部**と呼ぶ。（なお、$a \in \mathbb{Q}$ の場合は問 1.2.6 参照）

[4]Archimedes (287–212 B.C.)
[5]ガウスの記号：$[a]$ を使うこともある。

証明：(a): 双対性（問 1.2.2）より、$\max A$ について言えば十分。アルキメデスの原理より、任意の実数に対し、それより大きな整数が存在する。従って

$$A \text{ が上に有界} \implies \exists m \in \mathbb{Z},\ A \subset [-\infty, m] \overset{\text{例 1.2.3}}{\implies} \max A \text{ が存在。}$$

(b):$(a-1, a]$ は 2 つ以上の整数を含まない。実際、$b, c \in (a-1, a] \cap \mathbb{Z}$, $b < c$ なら

$$1 = a - (a-1) > c - b \geq 1$$

となり矛盾。そこで、$(a-1, a] \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ を次の 2 段階に分て示す。

(1) $A \overset{\text{def.}}{=} \mathbb{Z} \cap (-\infty, a]$ に $\max A$ が存在する。

(2) $m = \max A$ とおくと、$a - 1 < m$.

これらが言えれば、$m \in (a-1, a] \cap \mathbb{Z}$ となり結論を得る。
(1) を示すために (a) の条件を検証する。
$\underline{A \text{ は上に有界}}$: $A \subset (-\infty, a]$ による。
$\underline{A \neq \emptyset}$: アルキメデスの原理より $\exists z \in \mathbb{Z}$, $z \leq a$. このとき, $z \in A$.
(2) を示すため、結論を否定し、$m \leq a-1$, 即ち $m+1 \leq a$ を仮定すると $m < m+1 \in A$.
これは m が A の上界であることに反する。 □

定義 1.3.11 $D \subset \mathbb{R}$ とする。任意の実数 $a < b$ に対し $(a, b) \cap D \neq \emptyset$ なら、D は $\mathbb{R}$ で **稠密** (dense) と言う。

「稠密」を感覚的に言うと、「隙間なく詰まっている」ことを表す。例えば $\mathbb{R}$ 自身は $\mathbb{R}$ で稠密である（補題 1.3.4)。

例 1.3.12 (有理数の稠密性) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密。

証明: 実数 $a < b$ に対しアルキメデスの原理より、$(b-a)^{-1} < n$, すなわち $na + 1 < nb$ を満たす $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ が存在する。更に 例 1.3.10 より $m \in (na, na+1]$ を満たす $m \in \mathbb{Z}$ が存在し、$m \in (na, nb)$, よって $m/n \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$. □

問 1.3.6 $(\star)$ 任意の $x \in \mathbb{R}$ と $N = 1, 2, \cdots$ に対し、$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq}$ を満たすような $p \in \mathbb{Z}$ 及び $q \in \{1, \cdots, N\}$ が存在すること（**ディリクレの定理**[6]）を示せ。ヒント：$N+1$ 個の点 $x_j = jx - \lfloor jx \rfloor \subset [0, 1)$ $(j = 0, 1, .., N)$ を考える。
ディリクレの定理は、有理数の稠密性（例 1.3.12）を別証明するに留まらず、実数 x とその近似有理数 p/q の「近さ」をより定量的に評価している（このような近似を Diophantus 近似 という)。

1.4 関数

1.4 節では関数に関する定義と性質を述べる。

[6] Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859)

定義 1.4.1 D を集合とする。

• 写像 $f : D \to \mathbb{R}$ を **関数** (function) と呼ぶ。

• $c \in \mathbb{R}$ とする。関数 $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し関数 cf, $f+g$,fg, f/g を次のように定める：

$$
\begin{aligned}
&(cf)(x) = cf(x), \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \\
&(f/g)(x) = f(x)/g(x).
\end{aligned}
$$

但し、f/g の定義域は $D(f/g) = \{x \in D\ ;\ g(x) \neq 0\}$ とする。

問 1.4.1 $(\star)$ 集合 D で定義された実数値関数全体の集合は 定義 1.4.1 で定義される加法・乗法に関して可換環であることを示せ。

定義 1.4.2 $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ とする。

• f が **非減少** (non-decreasing), 或いは **単調増加** (increasing) とは

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) \leq f(y)$$

が成立することであり、これを 「f は $\nearrow$」と略記する。更に

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) < f(y).$$

なら f を **狭義単調増加** (strictly increasing) と言う。

• $-f$ が非減少なら、f は **非増加** (non-increasing), 或いは **単調減少** (decreasing) といい、「f は $\searrow$」と略記する。また、$-f$ が狭義単調増加なら f を**狭義単調減少** (strictly decreasing) と言う。

• 単調増加関数と単調減少関数を総称して**単調関数** (monotone functions) と呼ぶ。

問 1.4.2 以下を示せ：(i) 狭義単調関数は単射。(ii) 狭義単調増加 (減少) 関数の逆関数は狭義単調増加 (減少)。

定義 1.4.3 D を集合とする。

• $f : D \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $E \subset D$ とする。このとき、$\sup\limits_E f$, $\inf\limits_E f$ を次のように定義する：

$$\sup_E f = \sup f(E), \quad \inf_E f = \inf f(E).$$

$\max f(E)$, $\min f(E)$ がもし、存在すれば $\max\limits_E f$, $\min\limits_E f$ と記す。$\sup\limits_E f$ は $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ と記すこともある。$\inf\limits_E f$, $\max\limits_E f$, $\min\limits_E f$ についても同様。

• $E \subset D$ に対し 集合 $\{f(x)\ ;\ x \in E\}$ が有界なとき、関数 f は E で **有界** (bounded) と言う。また E で**上に (下に) 有界**の定義も同様とする。言い替えると、

$$
\begin{aligned}
f \text{ が } E \text{ で有界} &\iff \sup_E |f| < \infty, \\
f \text{ が } E \text{ で上に有界} &\iff \sup_E f < \infty, \\
f \text{ が } E \text{ で下に有界} &\iff \inf_E f > -\infty.
\end{aligned}
$$

関数 f は D で有界なら、単に f は有界と言う。D で上に (下に) 有界な場合も同様とする。

命題 1.3.8 を関数に対する sup, inf の性質として書き換えておく：

命題 1.4.4 （**sup inf の基本性質：関数版**）A を集合、$f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ とするとき、

(a) $\inf_A f \le \sup_A f$.

(b) $\sup_A f \le \beta \iff$ 全ての $a \in A$ に対し $f(a) \le \beta$.

(c) $\inf_A f \ge \beta \iff$ 全ての $a \in A$ に対し $f(a) \ge \beta$.

証明: 命題 1.3.8 に帰着。 $\square$

上で見たように、関数に対する上限、下限の性質は、集合に対するそれらの性質から容易に導くことができる。

問 1.4.3 A を集合、$f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ とする。以下を示せ：
$\sup_A(\gamma f+\beta) = \gamma \sup_A f+\beta$, $\inf_A(\gamma f+\beta) = \gamma \inf_A f+\beta$, $\sup_A(-\gamma f+\beta) = -\gamma \inf_A f+\beta$, $\inf_A(-\gamma f + \beta) = -\gamma \sup_A f + \beta$.

問 1.4.4 A, B を集合、$f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$,$g : B \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ とする。以下を示せ：(i) 全ての $a \in A$ に対し $f(a) \le g(b)$ なる $b \in B$ が存在すれば、$\sup_A f \le \sup_B g$. (ii) 全ての $a \in A$ に対し $f(a) \ge g(b)$ なる $b \in B$ が存在すれば、$\inf\limits_B g \le \inf\limits_A f$. (iii) $A \subset B$ なら $\inf_B g \le \inf_A g \le \sup_A g \le \sup_B g$. (iv) $A = B$ かつ全ての a で $f(a) \le g(a)$ なら $\inf_A f \le \inf_A g$, $\sup_A f \le \sup_A g$.

問 1.4.5 A を集合、$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ とするとき、次を示せ：
$\inf\limits_A f + \inf\limits_A g \le \inf\limits_A (f + g) \le \sup\limits_A (f + g) \le \sup\limits_A f + \sup\limits_A g$..

問 1.4.6 ($\star$)（**予選決勝法**）B を集合、各 $b \in B$ に対し $A_b \subset \overline{\mathbb{R}}$ とする。このとき、次を示せ：$\sup\left(\cup_{b\in B} A_b\right) = \sup\limits_{b\in B} \sup A_b$, $\quad \inf\left(\cup_{b\in B} A_b\right) = \inf\limits_{b\in B} \inf A_b$.

問 1.4.7 ($\star$) A,B を集合、$f : A \times B \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ とする。このとき、以下を示せ：
(i)(**sup と sup は可換**) $\sup\limits_{(a,b)\in A\times B} f(a, b) = \sup\limits_{b\in B} \sup\limits_{a\in A} f(a, b) = \sup\limits_{a\in A} \sup\limits_{b\in B} f(a, b)$.
(ii)(**inf と inf は可換**) $\inf\limits_{(a,b)\in A\times B} f(a, b) = \inf\limits_{b\in B} \inf\limits_{a\in A} f(a, b) = \inf\limits_{a\in A} \inf\limits_{b\in B} f(a, b)$.
(iii) (**sup inf $\le$ inf sup**) $\sup\limits_{a\in A} \inf\limits_{b\in B} f(a, b) \le \inf\limits_{b\in B} \sup\limits_{a\in A} f(a, b)$.

問 1.4.8 ($\star$) $\{0, 1\} \subset A \cap B \subset A \cup B \subset [0, 1]$, $f(a, b) = |a - b|$ とするとき、次を示せ：
$\sup\limits_{a\in A} \inf\limits_{b\in B} f(a, b) = 0 < 1/2 \le \inf\limits_{b\in B} \sup\limits_{a\in A} f(a, b)$.

問 1.4.9 ($\star$) 問 1.4.7 で (a_0, b_0) が f の鞍点, 即ち条件 $f(a, b_0) \le f(a_0, b_0) \le f(a_0, b)$, $\forall(a, b) \in A \times B$ を満たすとき、次を示せ：$\sup\limits_{a\in A} \inf\limits_{b\in B} f(a, b) = \inf\limits_{b\in B} \sup\limits_{a\in A} f(a, b) = f(a_0, b_0)$.

2　極限と連続 I

2.1　極限とは？

$n = 1, 2, ...$ に対し n が大きくなるとき、$1/n$ は「限りなく 0 に近づく」ことは感覚的に受け入れられる。「限りなく 0 に近づく」という言葉を（$1/n$ が正であることを考慮して）「どんな正の数より小さくなる」と言い換えると数学的意味がもう少し明解になる。実際、正の数 ε を与えたとき、$n \leq 1/\varepsilon$ を満たす n は有限個で、それらを除く全ての n が（つまり $n > 1/\varepsilon$ なら）$1/n < \varepsilon$ を満たす。こうして、「限りなく近づく」という漠然とした言葉を、明解な不等式に置き換えることができた。この考え方を一般化して、数列の極限を定義しよう：

定義 2.1.1 (**数列とその極限**)

• $m \in \mathbb{N}$ とする。$\mathbb{N} \cap [m, \infty)$ で定義された実数値関数 $n \mapsto a_n$ を**数列** (sequence)、あるいは**実数列** (real sequence) と呼び、数列を

$$(a_n)_{n=m}^{\infty}, \quad (a_n)_{n \geq m},$$

あるいは単に (a_n) と表記する。m の値を特に指定しなければ $m = 0$ とする。

• $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し

$$B(a, \varepsilon) = \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) & (a \in \mathbb{R} \text{ のとき}), \\ (1/\varepsilon, \infty] & (a = \infty \text{ のとき}), \\ [-\infty, -1/\varepsilon) & (a = -\infty \text{ のとき}). \end{cases}$$

とする。$B(a, \varepsilon)$ は 「a に近い数」の集合を表し、a の**近傍**という。

• 数列 (a_n) に対し次が成り立てば、a を (a_n) の**極限** (limit) と言う:

$$\text{任意の } \varepsilon \in (0, \infty) \text{ に対し、有限個の } n \text{ を除き } a_n \in B(a, \varepsilon). \tag{2.1}$$

なお、この条件は「有限個の n を除き」の部分を言い換えて

$$\text{任意の } \varepsilon \in (0, \infty) \text{ に対し } m \in \mathbb{N} \text{ が存在し、} n \geq m \text{ なら } a_n \in B(a, \varepsilon).$$

と言っても同じである[7]。条件 (2.1) を、

$$\lim_n a_n = a, \quad \lim_{n \to \infty} a_n = a, \quad a_n \longrightarrow a$$

等と表記する。

• (2.1) で $a \in \mathbb{R}$ なら $(a_n)_n$ は $a \in \mathbb{R}$ **に収束する** (converges to a) と言う。

• (2.1) で $a = \pm\infty$ なら $(a_n)_n$ は $\pm\infty$ **に発散する** (diverges to $\pm\infty$) と言う。

注 1：(2.1) の「任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$」には「$\varepsilon \in (0, \infty)$ が どんなに小さくても」という気持を込めている。このように、文字 ε は「小さい」という気持を込めて使うことが多い。

[7]「有限個の n を除き」という表現をこの後もしばしば用いるが、同様に「$m \in \mathbb{N}$ が存在し、$n \geq m$ なら」と言い換えられる

注 2： 任意の $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $m \in \mathbb{N}$ に対し、明らかに

$$\lim_n a_n = a \Longleftrightarrow \lim_n a_{m+n} = a$$

従って、数列の極限の有無、その値は最初の有限個の項の如何に関わらない。

注 3： C を (a_n) の変数 n に無関係な正定数とする。(2.1) は $B(a,\varepsilon)$ を $B(a,C\varepsilon)$ で置き換えても同値な命題である。実際、置き換えた後の命題を $(*)$ とすると、

<u>(2.1) $\Rightarrow$ $(*)$:</u> (2.1) は任意の ε で成立するから ε のかわりに $C\varepsilon$ とすれば $(*)$ が出る。

<u>$(*)$$\Rightarrow$ (2.1) :</u> $(*)$ は任意の ε で成立するから ε のかわりに ε/C とすれば (2.1) が出る。

例 2.1.2 (a_n) を正数列とするとき、

(a) $a_n \longrightarrow \infty \iff 1/a_n \longrightarrow 0 \iff 1/(-a_n) = -1/a_n \longrightarrow 0$.

(b) $c > 0$ かつ有限個の n を除き $a_n \geq cn$ なら $a_n \longrightarrow \infty, 1/a_n \longrightarrow 0.$

証明： (a): 「$a_n \in B(\infty,\varepsilon) \;\Leftrightarrow\; 1/a_n \in B(0,\varepsilon) \;\Leftrightarrow\; -1/a_n \in B(0,\varepsilon)$」より明らか。

(b): (a) より、$a_n \to \infty$ を言えば十分。今、$\varepsilon \in (0,\infty)$ を任意とする。有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除き $n > \frac{1}{c\varepsilon}$（アルキメデスの原理）. 従って有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除き $a_n \geq cn > \frac{1}{\varepsilon}$. □

例 2.1.3 **(a)** $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ に対し $\lim_n n^p = \infty$ $\lim_n n^{-p} = 0.$

(b) $r > 1$ なら $\lim_n r^n = \infty$, $\lim_n r^{-n} = 0.$

証明： (a): $n^p \geq n$ と 例 2.1.2 による。

(b): $r^n \geq 1 + (r-1)n$ （帰納法で容易に示せる）と、例 2.1.2 による。 □

問 2.1.1 $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $a_n \longrightarrow a$ とする。このとき、$|a_n| \longrightarrow |a|$ を示せ。

問 2.1.2 (a_n) が整数値、$\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}$ とする。有限個の n を除き $a_n = a$ となることを示せ。

問 2.1.3 $D \subset \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ で稠密とする。このとき、任意の $a \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し D に値をとる数列 (a_n) であって $a_n \longrightarrow a$ なるものが存在することを示せ。

問 2.1.4 (**部分列による収束判定 I**) $K_1, K_2 \subset \mathbb{N}$, $K_1 \cup K_2 = \mathbb{N}$, K_i $(i = 1,2)$ の元を小さい順に並べたものを $k_i(0) < k_i(1) < ...$ とする (例えば、$K_1 =$ 偶数全体, $K_2 =$ 奇数全体, $k_1(n) = 2n$, $k_2(n) = 2n+1$. 一般に、K_1, K_2 共に無限集合の場合と、片方だけが無限集合の場合がある)。このとき、$a \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し次の条件 (a),(b) は同値であることを示せ：
(a) $a_n \to a$, (b) K_i が無限集合となる i に対し $a_{k_i(n)} \to a$.

問 2.1.5 $a_n = (-1)^n$ は収束しないことを示せ。

問 2.1.6 $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $\overline{B}(a,\varepsilon)$ は $a \in \mathbb{R}$, $a = \infty$, $a = -\infty$ に応じてそれぞれ $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $[1/\varepsilon, \infty]$, $[-\infty, -1/\varepsilon]$ を表すものとする。このとき (2.1) は $B(a,\varepsilon)$ を $\overline{B}(a,\varepsilon)$ で置き換えても同値な命題であることを示せ。

問 2.1.7 数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ に対し、**上極限** $\overline{\lim_n} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$, **下極限** $\underline{\lim_n} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ を次のように定める：$\overline{\lim_n} a_n = \inf_{m\geq 0} \sup_{n\geq m} a_n = \inf_{m\geq 0} \sup_{n\geq 0} a_{m+n}$, $\quad \underline{\lim_n} a_n = \sup_{m\geq 0} \inf_{n\geq m} a_n = \sup_{m\geq 0} \inf_{n\geq 0} a_{m+n}$.
任意の $m \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し以下を示せ：(i) $\inf_{n\geq m} a_n \leq \underline{\lim_n} a_n \leq \overline{\lim_n} a_n \leq \sup_{n\geq m} a_n$, (ii) $\overline{\lim_n} a_n < a \iff$ 有限個の n を除き $a_n < a$ (iii) $a < \underline{\lim_n} a_n \iff$ 有限個の n を除き $a < a_n$ (iv) $a < \overline{\lim_n} a_n \iff$ 無限個の n に対し $a < a_n$ (v) $\underline{\lim_n} a_n < a \implies$ 無限個の n に対し $a_n < a$ (vi) $\lim_n a_n = a \iff \underline{\lim_n} a_n = \overline{\lim_n} a_n = a$

問 2.1.8 $(\star)$ $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ に対し、

$$F(a_0, a_1, ..., a_n) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

を**連分数** と言う。$a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が与えられたとし、$P_n, Q_n \in \mathbb{Z}$ $(n = -1, 0, 1, 2, ...)$ を、次のように定める: $P_{-1} = 1, P_0 = a_0$, $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$, $P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}, Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$ $n \geq 1$. このとき、$n \geq 0$ に対し以下を示せ: (i) $Q_n < Q_{n+1}$, (ii) $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}$, (iii) $P_n/Q_n = F(a_0, a_1, \cdots, a_n)$.
(iii) のヒント：帰納法 ((ii) を用いる)。

問 2.1.9 $(\star)$ $x \in \mathbb{R}$ に対し、$x_0 = x$ とし、$x_{n-1} = \lfloor x_{n-1} \rfloor + \frac{1}{x_n}$ により $x_n > 1, n = 1, 2, \cdots$ を定める (ある N で、$x_N \in \mathbb{Z}$ となれば、x_{N+1} 以降は定義しない)。更に、こうして作られた $a_n = \lfloor x_n \rfloor$ に対し $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}$ $(n = -1, 0, 1, 2, ...)$ を 問 2.1.8 のように定める。以下を示せ：(i) $x_1, ...x_n$ までが定義されるなら、$x = F(a_0, ..., a_{n-1}, x_n)$, $|x - \frac{P_n}{Q_n}| < \frac{1}{Q_n^2}$. (ii) $x \in \mathbb{Q}$ なら、ある N で、$x_N \in \mathbb{Z}$ となり $x = F(a_1, ..., a_{N-1}, x_N)$. (iii) $x \notin \mathbb{Q}$ なら全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し x_n が定義され、$\lim_n \frac{P_n}{Q_n} = x$. (iv) x が無理数であることと、$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ を満たす規約分数 p/q が無限個存在することは同値である。なお、$K \leq \sqrt{5}$ のとき、かつそのときに限り、任意の $x \notin \mathbb{Q}$ に対し、$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Kq^2}$ を満たす規約分数 p/q が無限個存在すること (Hurwitz の定理) も知られている。

2.2 極限の性質

2.2 節を通じ、$a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, (a_n), (b_n), (c_n) は実数列とする。

命題 2.2.1 (**収束列は有界**) $a_n \longrightarrow a$ とする。

(a) $a \neq -\infty$ なら $\inf_{n\geq 0} a_n > -\infty$. また、$a \neq \infty$ なら $\sup_{n\geq 0} a_n < \infty$.

(b) $a \in \mathbb{R}$ なら $\sup_{n\geq 0} |a_n| < \infty$.

証明: (a): sup, inf の双対性（補題 1.3.2）より、前半を言えばよい。仮定より、$\exists b \in \mathbb{R}$, $\exists m, \forall n \geq m, b < a_n$ (実際、$a = \infty$ なら、$b = 1$ とすればよく、$a \neq \infty$ なら、$b = a - 1$ とすればよい)。一方、$n = 0, 1, .., m-1$ なら $\min\{a_0, a_1, ..., a_{m-1}\} \leq a_n$. 以上より全ての n に対し $m \stackrel{\text{def.}}{=} \min\{a_0, a_1, ..., a_{m-1}, b\} \leq a_n$. 従って、$-\infty < m \leq \inf_{n\geq 0} a_n$
(b): (a) から判る。 $\square$

命題 2.2.2 **（順序の保存）** $a_n \to a$, $b_n \to b$ かつ無限個の n に対し $a_n \le b_n$ なら、 $a \le b$.

証明: 背理法による。$b < a$ なら、$\exists c \in \mathbb{R}$, $b < c < a$ (補題 1.3.4). すると、$a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$ より、有限個の n を除き $b_n < c < a_n$. これは仮定に反する。 □

系 2.2.3 (**極限の一意性**) 数列 $(a_n)_{n\ge 0}$ に対し極限 $a \in \overline{\mathbb{R}}$ は高々ひとつである。

証明: $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a_n \longrightarrow a$, $a_n \longrightarrow b$ とすると、命題 2.2.2 から $a \le b$ かつ $a \ge b$. □

命題 2.2.4 (**はさみうちの原理 I**) $a_n \to a$, $c_n \to a$ かつ有限個の n を除き $a_n \le b_n \le c_n$ なら、 $b_n \to a$.

証明: $\varepsilon > 0$ を任意とする。仮定より有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除き $a_n, c_n \in B(a, \varepsilon)$. よって有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除き $b_n \in [a_n, c_n] \subset B(a, \varepsilon)$. □

問 2.2.1 (**はさみうちの原理 II**) 有限個の n を除き $a_n \le b_n$ とする。以下を示せ：$a_n \to \infty$ なら、$b_n \to \infty$, また、$b_n \to -\infty$ なら、$a_n \to -\infty$.

問 2.2.2 $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ とする。任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し、$\inf\limits_{n\ge m} a_n \le a \le \sup\limits_{n \ge m} a_n$ を示せ。

問 2.2.3 $\emptyset \ne A \subset \overline{\mathbb{R}}$ とする。このとき、A に値をとる数列 (a_n), (b_n) で、$a_n \longrightarrow \sup A$, $b_n \longrightarrow \inf A$ となるものが存在することを示せ。

命題 2.2.5 (**演算の連続性**) $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$ とするとき、

(a) $a_n + b_n \longrightarrow a + b$, 但し $\{a, b\} \ne \{\infty, -\infty\}$ とする。

(b) $a_n b_n \longrightarrow ab$, 但し $\{|a|, |b|\} \ne \{0, \infty\}$ とする。

(c) $a_n^{-1} \longrightarrow a^{-1}$, 但し $a \ne 0$ かつ全ての n に対し $a_n \ne 0$ とする。

証明: (a): $\underline{a, b \in \mathbb{R} \text{ の場合}}$：$\varepsilon > 0$ を任意とする。仮定より有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除き $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$. よって、有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除き

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon.$$

これより結論を得る（定義 2.1.1 後の注 3 参照)。
$\underline{|a| = \infty \text{ または } |b| = \infty \text{ の場合}}$：例えば $a = \infty$ とすると $b \ne -\infty$. 従って $c \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{n\ge 0} b_n > -\infty$ (収束列の有界性). このとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n + b_n \ge a_n + c$. また、有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除き $a_n > -2c$, 故に $a_n + c \ge \frac{1}{2} a_n$. よって、はさみうちより $a_n + b_n \longrightarrow \infty$. その他の場合も同様に結論を得る。
(b): $\underline{a, b \in \mathbb{R} \text{ の場合}}$：収束列は有界性より $M \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{n\ge 0} |b_n| < \infty$. $\varepsilon > 0$ を任意とする。仮定より有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除き $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$. よって、有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除き

$$|a_n b_n - ab| \le |(a_n - a) b_n| + |a(b_n - b)| \le \varepsilon \cdot M + |a| \cdot \varepsilon = (M + |a|)\varepsilon.$$

これより結論をうる（定義 2.1.1 後の注 3 参照)。
$\underline{|a| = \infty \text{ または } |b| = \infty \text{ の場合}}$: $|a| = \infty$ なら $|b| \ne 0$. 例えば $a = \infty$,$b > 0$ とする。こ

のとき、有限個の n を除き $a_n > 0$ かつ $b_n > b/2$, 従って $a_n b_n > a_n b/2$. よって、はさみうちより $a_n b_n \longrightarrow \infty$. 他の場合も同様である。
(c): $a \in \mathbb{R}$ の場合: $\varepsilon > 0$ を任意とする。仮定より有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除き $|a_n - a| < \varepsilon \wedge (|a|/2)$, 特に $|a_n - a| < \varepsilon$ かつ $|a_n| \geq |a| - |a - a_n| \geq |a|/2$. よって、有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除き

$$|a_n^{-1} - a^{-1}| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} < \frac{2\varepsilon}{|a|^2}.$$

これより結論をうる（定義 2.1.1 後の注 3 参照)。
$|a| = \infty$ の場合: 例えば $a = \infty$ とし、$\varepsilon > 0$ を任意とする。有限個の n を除き $a_n > 1/\varepsilon$ より $0 < a_n^{-1} < \varepsilon$. $a = -\infty$ の場合も同様に結論を得る。 □

次の例は結果、証明法ともに色々応用できる優れものである：

例 2.2.6 (a_n), (b_n) は実数列、$s_n = \sum_{j=1}^n a_j(b_j - b_{j-1})$, $t_n = \sum_{j=1}^{n-1}(a_{j+1} - a_j)b_j$ とする。$a \in \mathbb{R}$, $0 = b_0 < b_1 < .... < b_n \to \infty$ のとき、「$a_n \to a$」は「$s_n/b_n \to a$ かつ $t_n/b_n \to 0$」と同値である。上記 s_n/b_n を (a_n) の **チェザロ平均**と言う（$b_n = n$ の場合が典型的)。また、「$a_n \to a \ \Rightarrow \ t_n/b_n \to 0$」を**クロネッカーの補題**と言う[8]。

証明: 簡単な計算で次のことが分かる：

(1) $s_n + t_n = a_n b_n$.

従って、$a_n \to a \ \Rightarrow \ s_n/b_n \to a$ を言えば、残りは (1) から分かる。$a_n \to a$ より $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq m$, $|a_n - a| < \varepsilon/2$. また、$(a_n)$ は有界なので、$C = \sup_{n \geq 1} |a_n - a| < \infty$ とする。$a = \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^n a(b_j - b_{j-1})$ と書けることに注意すると、$n \geq m$ に対し

$$\begin{aligned}\left|\frac{s_n}{b_n} - a\right| &\leq \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{m-1}(b_j - b_{j-1})|a_j - a| + \frac{1}{b_n}\sum_{j=m}^{n}(b_j - b_{j+1})|a_j - a| \\ &\leq \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{m-1}(b_j - b_{j-1})C + \frac{1}{b_n}\sum_{j=m}^{n}(b_j - b_{j-1})\frac{\varepsilon}{2} \leq \underbrace{\frac{b_{m-1}C}{b_n}}_{(2)} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

今、m は固定されているので、$\lim_n(2) = 0$. 従って、$\exists \ell \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq \ell$, $(2) < \varepsilon/2$. 以上より、$n \geq m \vee \ell$ なら、$\left|\frac{s_n}{b_n} - a\right| < \varepsilon$. □

問 2.2.4 (a_n) は実数列、$\lim_n \frac{1}{n}a_n = 0$ とする。$\lim_n \frac{1}{n}\max_{1 \leq j \leq n} a_j = 0$ を示せ。

問 2.2.5 例 2.2.6 の記号で、$a_n \not\longrightarrow a \in \mathbb{R}$ だが $s_n/b_n \longrightarrow a$ となる例を挙げよ。

問 2.2.6 $(\star)$ 実数列 (a_n), (b_n) に対し $s_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} ... + a_{n-1} b_1$ とおく。$a_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}$, $b_n \longrightarrow b \in \mathbb{R}$ なら $s_n/n \longrightarrow ab$ となることを示せ。

問 2.2.7 $(\star)$ (a_n), (b_n) を実数列、$\overline{a} = \overline{\lim_n} a_n$, $\underline{a} = \underline{\lim}_n a_n$, $\overline{b} = \overline{\lim_n} b_n$, $\underline{b} = \underline{\lim}_n b_n$ とする (問 2.1.7 参照)。このとき、以下を示せ：(i) $\{\overline{a}, \overline{b}\} \neq \{-\infty, \infty\}$ なら $\overline{\lim_n}(a_n + b_n) \leq \overline{a} + \overline{b}$. (ii) $\{\underline{a}, \underline{b}\} \neq \{-\infty, \infty\}$ なら $\underline{a} + \underline{b} \leq \underline{\lim}_n(a_n + b_n)$. (iii) (b_n) が有界なら $\overline{a} + \underline{b} \leq \overline{\lim_n}(a_n + b_n) \leq \overline{a} + \overline{b}$, $\underline{a} + \underline{b} \leq \underline{\lim}_n(a_n + b_n) \leq \underline{a} + \overline{b}$. (vi) $b_n \to b \in \mathbb{R}$ なら $\overline{\lim_n}(a_n + b_n) = \overline{a} + b$, $\underline{\lim}_n(a_n + b_n) = \underline{a} + b$.

[8]Ernesto Cesáro (1859–1906), Leopold Kronecker (1823–91)

問 2.2.8 ($\star$) 例 2.2.6 の記号で、$\underline{\lim_n} a_n \le \underline{\lim_n} s_n/b_n \le \overline{\lim_n} s_n/b_n \le \overline{\lim_n} a_n$. を示せ。

問 2.2.9 ($\star$) 実数列 (a_n) が全ての $m, n \ge 1$ に対し「$a_{m+n} \le a_m + a_n$」を満たすとき $\lim_n a_n/n = \inf_{n\ge 1} a_n/n$（両辺 $= -\infty$ も許す） を示せ。ヒント: $m \ge 1$ を任意に固定し、$n \ge m$, $n = mq + r$ (q は n/m の整数部分) とすると $a_n \le qa_m + a_r$. 従って $\overline{\lim_n} a_n/n \le a_m/m$.

2.3 単調列定理と中間値定理

次の定理は大変基本的であり、級数の絶対収束や非負項級数の収束を論じる際にも重要な役割を果たす：

定理 2.3.1 (単調列定理) (a_n) は $\overline{\mathbb{R}}$ に値をとる数列とする。

(a) (a_n) が単調増加なら $\lim_n a_n = \sup_{n\ge 0} a_n$. 従って、単調増加列に対し、「収束」と「上からの有界性」は同値、また、「非収束」と「∞ への発散」は同値である。

(b) (a_n) が単調減少なら $\lim_n a_n = \inf_{n\ge 0} a_n$ 従って、単調減少列に対し、「収束」と「下からの有界性」は同値、また、「非収束」と「$-\infty$ への発散」は同値である。

証明: (a):より一般に、次の条件 (1) が成り立てば $\lim_n a_n = \sup_{n\ge 0} a_n$：

(1) $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall n \ge m$, $a_\ell \le a_n$.

実際、$a = \sup_{n\ge 0} a_n$ とすると、$a_n \longrightarrow a$ の定義は次のように書き換えられる：

(2) $\forall b < a$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall n \ge m$, $b < a_n$.

$b < a$ なら sup の性質より、$\exists \ell \in \mathbb{N}$, $b < a_\ell$. この ℓ に対し条件 (1) の m をとれば、$\forall n \ge m$ に対し、$b < a_\ell \le a_n$ となり (2) 成立。
(b):より一般に、次の条件 (3) が成り立てば $\lim_n a_n = \inf_{n\ge 0} a_n$：

(3) $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall n \ge m$, $a_\ell \ge a_n$.

このことは (a) の証明と同様の議論で示せる（問 2.3.1）。 □

定理 2.3.1 は特に「有界かつ単調な数列は収束する」ことを述べている。このことは、直感的にも受け入れ易い。実際、19 世紀始め頃までの数学者（例えば コーシー) はこの事実を証明を要しない「自明な性質」と見做していた[9]。もっとも、その時代には実数の厳密な定義がなかったので、証明のしようがなかった。現代では、実数の定義も整備され、定理 2.3.1 も厳密に証明できる。

問 2.3.1 定理 2.3.1 証明中の (3) が成り立てば $\lim_n a_n = \inf_{n\ge 0} a_n$ であることを示せ。

問 2.3.2 $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ は非減少とする。以下を示せ：(i) $a < c_n < c \le b$, $c_n \to c$ とするとき、$\lim_n f(c_n) = \sup_{a<x<c} f(x)$. (ii) $a \le c < c_n < b$, $c_n \to c$ とするとき、$\lim_n f(c_n) = \inf_{c<x<b} f(x)$.

[9] Augustin Cauchy, 1789–1857

問 2.3.3 ($\star$) $s_{m,n} \in \mathbb{R}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ が全ての $m, n \in \mathbb{N}$ に対し $s_{m+1,n} \geq s_{m,n}$, $s_{m,n+1} \geq s_{m,n}$ を満たすとき、$\lim_m \lim_n s_{m,n} = \lim_n \lim_m s_{m,n}$ を示せ。

系 2.3.2 （**区間縮小法**）実数列 (a_n), (b_n) について (a_n) は非減少、(b_n) は非増加、$a_n \leq b_n$ $(n = 0, 1, 2, ..)$ かつ $a_n - b_n \to 0$ なら (a_n), (b_n) は共に収束し、極限は等しい。

証明： $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$ と単調列定理より (a_n), (b_n) は共に収束する。一方、$a_n = b_n + (a_n - b_n)$ と演算の連続性より、(a_n), (b_n) の極限は等しい。 □

次に中間値定理（定理 2.3.4）を述べるが、その前に区間を定義域とする一変数関数に対し連続関数という概念を定義する（より一般的な定義は 定義 4.2.1 で与える）。連続関数は、直感的に言うと「グラフに切れ目が無い関数」である。

定義 2.3.3 $I \subset \mathbb{R}$ を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ とする。全ての $a \in I$ に対して次の条件が満たされるとき、f は**連続**であるという：

$$I \text{ 内の数列 } (a_n) \text{ が } \lim_n a_n = a \text{ を満たすなら } \lim_n f(a_n) = f(a). \tag{2.2}$$

また、I で定義された実数値連続関数全体の集合を $C(I)$, あるいはより正確に、$C(I \to \mathbb{R})$ と記す。

注 1： (2.2) は、$\lim_n a_n = a$ の他に、「全ての n に対し $f(a_n) \neq f(a)$ 」という付加条件を満たす (a_n) に対して言えれば、付加条件なしの (a_n) に対しても成立する。

注 2： 連続性は "$\delta - \varepsilon$ 論法" という別の流儀でも定義できる。実は (2.2) は、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次のような $\delta > 0$ が存在することと同値である：

$$\text{全ての } x \in I \cap (a - \delta, a + \delta) \text{ に対し } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

このように言い換えは後で述べる命題 4.1.6 で、より一般に取り扱う (ここでは単なる予告)。

定理 2.3.4 (中間値定理) $I \subset \mathbb{R}$ は区間、$f \in C(I \to \mathbb{R})$ とする。このとき、

$$(\inf_I f, \sup_I f) \subset f(I).$$

注: $f(I) \subset [\inf_I f, \sup_I f]$ は自明だから、定理 2.3.4 の結果は $f(I)$ が $\inf_I f$, $\sup_I f$ を端点とする区間であることを意味する。
証明: 次を言えばよい：

(1) $a, b \in I$, $f(a) \leq s \leq f(b)$ なら $\exists c \in I$, $s = f(c)$.

その際、$a = b$ なら $f(a) = s = f(b)$ より $c = a$ とすればよい。
以下、$a < b$ の場合の証明を述べるが、$b < a$ の場合の証明も同様である。区間 $[a_n, b_n] \subset I$, $n = 0, 1, ...$ を以下の手順で定める: 先ず、$[a_0, b_0] = [a, b]$. 更に $[a_n, b_n]$ の中点を $c_n = (a_n + b_n)/2$ と書くとき、

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, c_n], & s < f(c_n) \text{ なら}, \\ [c_n, b_n], & f(c_n) \leq s \text{ なら}, \end{cases}$$

さて、帰納法により

(2) $f(a_n) \le s \le f(b_n)$.

実際 $n=0$ なら、仮定 $f(a) \le s \le f(b)$ より (2) は正しい。n で正しいとする。

$$s < f(c_n) \text{ なら } f(a_{n+1}) = f(a_n) \underbrace{\le}_{\text{帰納法の仮定}} s < f(c_n) = f(b_{n+1}),$$
$$f(c_n) \le s \text{ なら } f(a_{n+1}) = f(c_n) \le s \overbrace{\le} f(b_n) = f(b_{n+1}).$$

また、定義から

$$a_n \text{ は有界かつ } \nearrow, \quad b_n \text{ は有界かつ } \searrow, \quad b_n = a_n + 2^{-n}(b-a).$$

従って、区間縮小法（系 2.3.2）より (a_n), (b_n) の極限は存在し等しい。その値を c とすると極限が順序を保つことから $c \in I$. かつ

$$f(c) \stackrel{f \text{ の連続性}}{=} \lim_n f(a_n) \stackrel{(2)}{\le} s \stackrel{(2)}{\le} \lim_n f(b_n) \stackrel{f \text{ の連続性}}{=} f(c).$$

従って $s = f(c)$ となり、(1) が示せた。 □

中間値定理（定理 2.3.4） も、19 世紀のはじめ頃まで、明確には認識されていなかった、あるいは「自明」と考えられていた。連続関数という概念さえも確立していなかった時代だから当然かも知れない。チェコ の数学者 ボルツァーノは 1817 年に発表した先駆的論文で連続関数の概念、及び定理 2.3.4 の証明を発表した[10]。しかし、この仕事はその後半世紀もの間殆んど知られることがなく、1821 年に コーシー が ボルツァーノ と独立に連続関数を定義し 定理 2.3.4 を示している。

問 2.3.4 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し以下を示せ：(i) f が全射なら、$\lim_n f(a_n) = \infty, \lim_n f(b_n) = -\infty$ を満たす数列 (a_n), (b_n) が存在する。(ii) f が連続かつ、$\lim_n f(a_n) = \infty, \lim_n f(b_n) = -\infty$ を満たす数列 (a_n), (b_n) が存在すれば f は全射である（特に、奇数次の多項式は、少なくともひとつ実根を持つ）。

問 2.3.5 $f : [0,1] \to [0,1]$ が連続なとき、$f(c) = c$ を満たす $c \in [0,1]$ の存在を示せ。

問 2.3.6 $f \in C(\mathbb{R})$ が最大値または最小値を持つとする。このとき、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $f(a+b) = f(b)$ を満たす $b \in \mathbb{R}$ の存在を示せ。

命題 2.3.5 (**狭義単調関数の逆関数**) $I \subset \mathbb{R}$ は区間、$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ は単調関数とする。

(a) $f \in C(I \to \mathbb{R}) \iff f(I)$ は区間

(b) f が連続かつ狭義単調増加（狭義単調減少）なら $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ は連続かつ狭義単調増加（狭義単調減少).

証明[11]**:** (a): $\Rightarrow$: 中間値定理（定理 2.3.4）による。
$\Leftarrow$: $a_n, a \in I$, $a_n \to a$, $a_n \ne a$ として $\lim_n f(a_n) = f(a)$ を言えばよい（定義 2.3.3 後の注参照）。$K_1, K_2 \subset \mathbb{N}$ を

$$K_1 = \{n \in \mathbb{N}\,;\ a_n < a\}, \quad K_2 = \{n \in \mathbb{N}\,;\ a_n > a\}$$

[10] Bernard Bolzano (1781–1848)

[11] (a) $\Leftarrow$ について、ここでは 定義 2.3.3 に忠実に証明するが、$\delta - \varepsilon$ 論法に慣れている人にとっては $\delta - \varepsilon$ 論法に基づく別証明の方が自然かも知れないので、 2.3 節の末尾に補足として述べる。

と定めれば、$K_1\cup K_2=\mathbb{N}$. $K_i=\{k_i(0)<k_i(1)<..\}$ とするとき、次を示す：

(1) K_i が無限集合なら $\lim_n f(a_{k_i(n)})=f(a)$,

そうすれば、これらと部分列による収束判定 I（問 2.1.4） より、$\lim_n f(a_n)=f(a)$ が結論され、証明が終る。以下、f が非減少の場合を考え (f が非増加でも同様)、$i=1$ の場合を示す（$i=2$ でも同様)。$a_{k_1(n)}\to a$ と、f が非減少であることから、

(2) $\forall \ell\in\mathbb{N}$, $\exists m\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq m$, $f(a_{k_1(\ell)})\leq f(a_{k_1(n)})$.

従って、単調列定理（定理 2.3.1）の証明より

$$\lim_n f(a_{k_1(n)})=s\leq f(a),\quad \text{但し } s\stackrel{\text{def.}}{=}\sup_n f(a_{k_1(n)})$$

所が、$s<f(a)$ と仮定すると、全ての n に対し $f(a_{k_1(n)})\leq s<f(a)$. このことと $f(I)$ が区間であることから、$s=f(b)$ となる $b\in I$ が存在する。すると、単調性から $a_{k_1(n)}\leq b<a$. これは $a_n\to a$ に反する。従って、$s=f(a)$.
(b): f が狭義単調増加の場合を考える（狭義単調減少でも同様)。f は狭義単調なので単射（問 1.4.2)。従って、逆写像 $f^{-1}:f(I)\longrightarrow I$ が存在し、全単射（問 0.3.1）かつ狭義単調増加（問 1.4.2). 更に I が区間であることと (a) より f^{-1} は連続。 $\square$

例 2.3.6 (**非負 m 乗根**) $m\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ とする。連続な狭義単調増加関数：

$$x\mapsto x^m\ \ ([0,\infty)\longrightarrow[0,\infty))$$

の逆関数 (命題 2.3.5 より連続かつ狭義単調増加) を $x\mapsto x^{1/m}$ と記す。$a\geq 0$ に対し $a^{1/m}$ を a の**非負 m 乗根**と呼び、$\sqrt[m]{a}$ とも記す。また、$\sqrt[2]{a}$ は $\sqrt{a}$ と記す。

問 2.3.7 以下を示せ：(i) $a\in(0,\infty)$ に対し $\lim_n a^{1/n}=1$. (ii) 正数列 (a_n), $a\in\overline{\mathbb{R}}$ に対し $\lim_n a_{n+1}/a_n=a \implies \lim_n a_n^{1/n}=a$. (iii) 非負数列 (a_n) に対し $\lim_n\left(\sum_{j=1}^n a_j^n\right)^{1/n}=\sup_{n\geq1}a_n$.

問 2.3.8 ($\star$) 正数列 (a_n) に対し次を示せ：$\varliminf_n a_{n+1}/a_n\leq\varliminf_n a_n^{1/n}\leq\varlimsup_n a_n^{1/n}\leq\varlimsup_n a_{n+1}/a_n$.

問 2.3.9 $a_0>b_0>0$ とし、正数列 a_n, b_n $(n\geq1)$ を $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, $b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$ によって順次定める。このとき、$\lim_n a_n$, $\lim_n b_n$ が共に存在して等しいことを示せ。

問 2.3.10 $a>0$, $b,c\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $S=\{x\in\mathbb{R}\,;\,f(x)=0\}$ とする。以下を示せ：$S\neq\emptyset$ と $b^2-4ac\geq0$ は同値であり、$b^2-4ac\geq0$ なら、$S=\{s_-,s_+\}$, 但し $s_\pm\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. また、$x\notin[s_-,s_+]$ なら $f(x)>0$, $x\in(s_-,s_+)$ なら $f(x)<0$.

問 2.3.11 ($\star$) $I\subset\mathbb{R}$ は $-\infty\leq a<b\leq\infty$ を端点とする区間, $f:I\to\mathbb{R}$, $x_n\in I$ $(n\in\mathbb{N})$ は $x_{n+1}=f(x_n)$ を満たすとする。以下を示せ：(i) $x_0\leq f(x_0)$ かつ f は $[x_0,b)$ 上非減少なら、全ての n に対し、$x_n\leq x_{n+1}$ かつ $x_n\leq f(x_n)$. 更に、「$x\in(c,m)$ ならば、$f(x)<x$」 を満たす $m\in(a,b)$ が存在するなら、 x_n は極限 $x_\infty\in(a,m]$ を持つ。ヒント：単調列定理。(ii) $x_0\geq f(x_0)$ かつ f は $(-\infty,x_0]\cap I$ 上非減少なら、全ての n に対し、$x_n\geq x_{n+1}$ かつ $x_n\geq f(x_n)$. 更に、「$x\in(a,m)$ ならば、$f(x)>x$」 を満たす $m\in(a,b)$ が存在するなら、 x_n は極限 $x_\infty\in[m,b)$ を持つ。(iii) f が連続かつ $\lim_n x_n=x_\infty\in I$ が存在すれば、$x_\infty=f(x_\infty)$.

問 2.3.12 $(\star)$ $b, c > 0$, $s = b + \sqrt{b^2 + c}$, $f(x) = \sqrt{2bx + c}$ とする。以下を示せ：
(i) $0 \le x < s$, $x = s$, $x > s$ に応じて、それぞれ $x < f(x)$, $x = f(x)$, $x > f(x)$.
(ii) $x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ が $x_{n+1} = f(x_n)$ を満たすなら、$\lim_n x_n$ が存在し s に等しい。ヒント：問 2.3.11.

問 2.3.13 $(\star)$ $I \subset \mathbb{R}$ は閉区間 ($\pm\infty$ が端点でもよい), $f : I \to \mathbb{R}$ は非増加かつ有界、$x_n \in I$ $(n \in \mathbb{N})$ は $x_{n+1} = f(x_n)$ を満たすとする。以下を示せ：(i) (x_{2n}), (x_{2n+1}) は収束する。ヒント： $g = f \circ f$ は非減少。(ii) f が連続かつ $s = f \circ f(s)$ を満たす $s \in I$ が唯一なら、x_n は s に収束する。(iii) $I = [0, \infty)$ $f(x) = 1/(ax + b)$ $(a, b > 0)$ の場合に (x_n) が収束することを示し、極限を求めよ。

問 2.3.14 $(\star)$ (**無理数の稠密性**) 以下を示せ：(i) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (ii) $x, y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$ なら $x + y\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (iii) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密. ヒント：稠密でないとすると $\exists a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(a, b) \subset \mathbb{Q}$. 所が、$x \in (a, b)$ に対し n が十分大きければ $x + \sqrt{2}/n \in (a, b)$.

命題 2.3.5(a) $\Leftarrow$ の別証明：$\varepsilon > 0$, $a \in I$ を任意とし、次の二つを示す：

(1) $a \in I$ が I の左端点でなければ、次のような $a_1 \in I$ が存在する：

$$a_1 < a \text{ かつ、全ての } x \in (a_1, a) \text{ に対し } 0 \le f(a) - f(x) < \varepsilon.$$

(2) $a \in I$ が I の右端点でなければ、次のような $a_2 \in I$ が存在する：

$$a < a_2 \text{ かつ、全ての } x \in (a, a_2) \text{ に対し } 0 \le f(x) - f(a) < \varepsilon.$$

もし、(1),(2) が示せたとして $\delta = (a - a_1) \wedge (a_2 - a)$ とすると

$$\text{全ての } x \in (a - \delta, a + \delta) \cap I \text{ に対し } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

となり、証明が終る。(1) を示す（(2) の証明も同様）。a は I の左端点でないので、$b < a$ となる $b \in I$ が存在する。もし、$f(b) = f(a)$ なら全ての $x \in (b, a)$ に対し $f(x) = f(a)$ だから (1) が言える。一方、$f(b) < f(a)$ なら、$f(b) < f(a) - \varepsilon_0 < f(a)$ となる $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ が存在する。ところが、$f(I)$ は区間だから $f(a_1) = f(a) - \varepsilon_0$ となる $a_1 \in I$ が存在する。また、 f の単調性から $a_1 \in (b, a)$. そこで $x \in (a_1, a)$ とすると

$$0 \le f(a) - f(x) \le f(a) - f(a_1) = \varepsilon_0 < \varepsilon.$$

これで (1) が言えた。 □

2.4 $\mathbb{R}^d$ と $\mathbb{C}$

定義 2.4.1 （実多次元空間）

• d を正整数、$A_1, ..., A_d$ を集合とする。$A_1, ..., A_d$ から、この順序で要素 $a_j \in A_j$ $(j = 1, .., d)$ を取り出して並べたもの全体の集合

$$A_1 \times \cdots \times A_d = \{(a_j)_{j=1}^d \,;\, a_j \in A_j,\ j = 1, .., d.\}$$

を $A_1, ..., A_d$ の**直積** (direct product) と呼ぶ。特に $A_j = A$ $(j = 1, ..., d)$ の場合の直積は A^d とも書く。上記 a_j を **第 j 座標** あるいは **第 j 成分** と呼ぶ。

• $\mathbb{R}^d$ を**実 d-次元空間**、その元を **d-次元実ベクトル**、あるいは単に**点**と呼ぶ。

• $c \in \mathbb{R}$ 及び $\mathbb{R}^d$ の元 $x = (x_j)_{j=1}^d, y = (y_j)_{j=1}^d$ に対し、**定数倍** $cx \in \mathbb{R}^d$, **和** $x + y \in \mathbb{R}^d$ を $cx = (cx_j)_{j=1}^d$, $x + y = (x_j + y_j)_{j=1}^d$ と定める。また、$x \cdot y \in \mathbb{R}$ 及び $|x| \in [0, \infty)$ を次のように定める：

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i, \quad |x| = \sqrt{x \cdot x}.$$

$x \cdot y$ を**内積** (inner product), $|x|$ を**ユークリッドノルム** (Euclidean norm), あるいは単に絶対値と呼ぶ。上記の演算と内積を考え併せたときの $\mathbb{R}^d$ を d **次元ユークリッド空間**と呼ぶ。

• 集合 $B \subset \mathbb{R}^d$ が $\sup\limits_{x \in B} |x| < \infty$ を満たす時、B は**有界** (bounded) であると言う。

問 2.4.1 $x, y \in \mathbb{R}^d$ とする。ユークリッドノルム について以下を示せ：(i) $x \neq 0$ なら $|x| > 0$. (ii) $c \in \mathbb{R}$ なら $|cx| = |c||x|$ (iii) $|x \cdot y| \leq |x||y|$. (iv) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

問 2.4.2 集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ の **直径** (diameter) を $\mathrm{diam}(A) = \sup\limits_{x,y \in A} |x - y|$ と定義する。A が有界であることと $\mathrm{diam}(A) < \infty$ は同値であることを示せ。

定義 2.4.2 （複素数）

• $\mathbb{R}^2$ で和と絶対値は 定義 2.4.1 で述べた通りとし、更に次の積を与える：

$$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b) \tag{2.3}$$

$\mathbb{R}^2$ はこの和と積により可換な体をなす。この体を**複素数体** (complex field) と呼び、$\mathbb{C}$ と記す[12]。また、$\mathbb{C}$ の元を**複素数** (complex number) と呼ぶ。

• 以後、$\mathbf{i} = (0, 1)$ とし、$z = (a, b) \in \mathbb{C}$ を

$$z = a + b\mathbf{i} \tag{2.4}$$

と記す。特に $a + 0\mathbf{i}$, $0 + b\mathbf{i}$ はそれぞれ a, $b\mathbf{i}$ と書く。$\mathbf{i}$ は **虚数単位**と言う[13]。この表記で (2.3) を書き直すと次の通り：

$$(a + b\mathbf{i})(a' + b'\mathbf{i}) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)\mathbf{i}.$$

• 表記 (2.4) において $a \in \mathbb{R}$ を z の**実部** (real part) と呼び $\mathrm{Re}\, z$ と記す。$b \in \mathbb{R}$ を z の**虚部** (imaginary part) と呼び $\mathrm{Im}\, z$ と記す。更に $a - b\mathbf{i}$ を z の**共役** (conjugate) と呼び、$\overline{z}$ と記す。これらの間に次の関係がある：

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \ \ \mathrm{Im}\, z = \frac{z - \overline{z}}{2\mathbf{i}},$$

[12] この定義は William Hamilton (1805–65) の流儀による

[13] 虚数単位を i と書くのはオイラー以来の伝統である[14]。この講義ノートでは添字などに使う i と紛れないように太字にした。

• 集合、

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z = 0\}, \quad \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z = 0\}$$

をそれぞれ **実軸** (real axis), **虚軸** (imaginary axis) と呼ぶ。実軸と $\mathbb{R}$ の同一視により、$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ と見做す。

問 2.4.3 $x, y \in \mathbb{C}$ とする。以下を示せ：(i) $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$, $\overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y}$, (ii) $|x|^2 = x\overline{x}$, (iii) $|xy| = |x||y|$, (iv) $x \neq 0$ なら $1/x = \overline{x}/|x|^2$, $\overline{1/x} = 1/\overline{x}$, $|1/x| = 1/|x|$.

問 2.4.4 $x, y \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ とする。以下を示せ:(i) $x^m - y^m = (x-y)\sum_{k=0}^{m-1} x^k y^{m-1-k}$. (ii) $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ なら $|x^m - y^m| \leq m r^{m-1}|x-y|$, $|x^m - y^m - m x^{m-1}(x-y)| \leq \frac{1}{2}m(m-1)r^{m-2}|x-y|^2$.

問 2.4.5 $\alpha \in \mathbb{C}$,$n \in \mathbb{N}$ に対し **(一般) 二項係数** $\binom{\alpha}{n}$ を次で定める：$\binom{\alpha}{0} = 1$, また、$n \geq 1$ なら $\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!$. 以下を示せ：(i) $\binom{\alpha-1}{n-1} + \binom{\alpha-1}{n} = \binom{\alpha}{n}$. (ii) $\binom{\alpha}{n+1}(n+1) + \binom{\alpha}{n} n = \alpha\binom{\alpha}{n}$. (iii) $\binom{-\alpha}{n} = (-1)^n\binom{\alpha+n-1}{n}$.
注： 上記は通常の二項係数の一般化だが、単に形だけの一般化ではなく、用途がある。$x \in (-1, \infty)$ に対し $\alpha \in \mathbb{C}$ による巾乗 $(1+x)^\alpha$ が定義でき、$|x| < 1$ なら、$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ と展開できる（一般二項定理；後述)。

問 2.4.6 $(\star)$ $c \in \mathbb{C}$ 及び $\mathbb{C}^d$ の元 $x = (x_i)_{i=1}^d, y = (y_i)_{i=1}^d$ に対し、$cx, \overline{x}, x+y \in \mathbb{C}^d$ を $cx = (cx_j)_{j=1}^d$, $\overline{x} = (\overline{x_j})_{j=1}^d$, $x + y = (x_j + y_j)_{j=1}^d$ と定める。また、内積 $x \cdot y \in \mathbb{C}$ 及び絶対値 $|x| \in [0, \infty)$ を $x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i\overline{y_i}$, $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ と定める。$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ という同一視により $\mathbb{C}^d = \mathbb{R}^{2d}$ と見るとき、 $\mathbb{C}^d$ における内積・絶対値は $\mathbb{R}^{2d}$ における内積・絶対値（定義 2.4.1）と等しいことを示せ。

問 2.4.7 $(\star)$ $x, y \in \mathbb{C}$,$|x| < 1, |y| < 1$ とするとき、$\left|\frac{x-y}{1-\overline{x}y}\right| < 1$ を示せ。

問 2.4.8 $(\star)$ $x \in \mathbb{C}$,$0 \leq a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n \neq 0$, $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 0$ のとき、$|x| \leq 1$ を示せ。

定義 2.4.3 （点列とその収束・有界性）

• $m \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{N} \cap [m, \infty)$ から $\mathbb{R}^d$ への写像 $n \mapsto a_n$ を**点列** (sequence) と呼ぶ。これは、$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ の場合も含み、このときは **複素数列** (complex sequence) とも呼ぶ。数列の場合同様、点列を

$$(a_n)_{n=m}^{\infty}, \quad (a_n)_{n \geq m},$$

或いは単に (a_n) と表記する。m の値を特に指定しなければ $m = 0$ とする。

• $a \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$\lim_n |a_n - a| = 0$$

なら点列 (a_n) が $a \in \mathbb{R}^d$ **に収束する**と言い、

$$\lim_n a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad a_n \longrightarrow a$$

等と表記する。

• 集合 $\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ が有界なら (a_n) は**有界**と言う。

例 2.4.4 $z \in \mathbb{C}$ に対し $|z| < 1$ なら $z^n \longrightarrow 0$. 実際、$|z^n| = |z|^n \longrightarrow 0$.

問 2.4.9 $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ に対し、$(1-z)\prod_{j=1}^n (1+z^{2^{j-1}}) = 1 - z^{2^n}$, 更に $|z| < 1$ のとき $\lim_n \prod_{j=1}^n (1+z^{2^{j-1}}) = 1/(1-z)$ を示せ。

以後、$a, b \in \mathbb{R}^d$, (a_n), (b_n) を $\mathbb{R}^d$ の点列とする。

命題 2.4.5 $a = (a_j)_{j=1}^d$, また、各 n に対し $a_n = (a_{n,j})_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d$ と記す。このとき、

(a) $a_n \to a$ は「全ての $j = 1, .., d$ に対し $\lim_n a_{n,j} = a_j$」と同値である。特に複素数列に対し「$a_n \to a$」, 「$\mathrm{Re}\, a_n \to \mathrm{Re}\, a$ かつ $\mathrm{Im}\, a_n \to \mathrm{Im}\, a$」, 「$\overline{a_n} \to \overline{a}$」は全て同値である。

(b) (a_n) が有界であることは、全ての $j = 1, .., d$ に対し $(a_{n,j})_{n=0}^\infty$ が有界であることと同値である。特に複素数列に対し、a_n が有界であることは、$\mathrm{Re}\, a_n$, $\mathrm{Im}\, a_n$ が共に有界であることと同値である。

(c) 収束点列は有界である。

証明: (a): 次の不等式による：$\max_{1 \le j \le d} |a_{n,j} - a_j| \le |a_n - a| \le \sum_{1 \le j \le d} |a_{n,j} - a_j|$.
(b): 次の不等式による：$\max_{1 \le j \le d} |a_{n,j}| \le |a_n| \le \sum_{1 \le j \le d} |a_{n,j}|$.
(c): (a), (b) より、実数列の場合に帰着する。 □

命題 2.4.6 (演算の連続性) $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$ とするとき、

$$a_n + b_n \longrightarrow a + b, \quad a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b.$$

また、複素数列に対し

$$a_n b_n \longrightarrow ab, \quad a_n b_n^{-1} \longrightarrow ab^{-1}$$

但し、後者では $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ を仮定する。

証明: 命題 2.4.5 を用い、座標毎に考えれば数列の場合（命題 2.2.5）に帰着する。または、命題 2.2.5 の証明を $\mathbb{R}^d$ の絶対値を用いて繰り返すことによっても証明できる。 □

問 2.4.10 ($\star$) $d \times d$ 複素行列全体 M_d を $\mathbb{C}^{d^2}$ と同一視し、$A \in M_d$ の絶対値 $|A|$ や $A_n \in M_d$ $(n = 0, 1, ...)$ の収束、といった概念が自然に定義される。$A, B, A_n, B_n \in M_d$ とするとき、以下を示せ：(i) $|AB| \le |A||B|$. (ii) $A_n \to A$, $B_n \to B$ なら、$A_n + B_n \to A + B$, $A_n B_n \to AB$. (iii) B_n, B が可逆、$B_n \to B$ なら、$B_n^{-1} \to B^{-1}$.

2.5　級数

定義 2.5.1 (a_n) を $\mathbb{R}^d$ の点列とする ($d = 2$ として複素数列の場合も含む)。

• $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$ とするとき、次の形の和を (a_n) の**部分和** (partial sum) と呼ぶ：

$$s_{m,n} = \sum_{j=m}^n a_j \tag{2.5}$$

部分和 (2.5) で n を変数として得られる点列 $(s_{m,n})_{n=m}^{\infty}$ を a_n を第 n 項としてもつ**級数**（series）と呼び、$(\sum a_n)$, 或いは単に $\sum a_n$ と記す。m の値は、特に断らなければ $m=0$ とする。

• (2.5) に対し極限 $\lim_n s_{m,n} \in \mathbb{R}^d$ が存在すれば、その値を**級数の和** と呼び、

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n, \quad \sum_{m}^{\infty} a_n$$

等と記す。またこのとき、級数 (2.5) は**収束する**と言う。$s_{n,m} = s_{n,0} - s_{m-1,0}$ より、収束するしないは $m \in \mathbb{N}$ の値に関係しない。

注： 点列 (a_n) に対し、その a_n を第 n 項とする級数も点列である。一方、任意の点列 (a_n) は $a_n = a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1})$ と書くことで、級数として表示される。この意味では、「点列」と「級数」は同じものに対する別の見方とも言える。

例 2.5.2 $z \in \mathbb{C}$ に対し $|z| < 1$ なら $\sum_0^\infty z^n = (1-z)^{-1}$. 実際、$1 - z^n = (1-z)\sum_{j=0}^{n-1} z^j$（問 2.4.4）. これと $z^n \to 0$ （例 2.4.4）より結論を得る。

問 2.5.1 $(\star)$ A は複素正方行列、$|A| < 1$ なら $I - A$ は可逆かつ、$\sum_0^\infty A^n = (I-A)^{-1}$ となることを示せ（問 2.4.10 参照)。但し I は単位行列、$A^0 = I$ とする。

命題 2.5.3 (**収束級数の必要条件**) $\mathbb{R}^d$ において級数 $\sum a_n$ の収束を仮定する。このとき、関数 $\ell : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ が $\ell(n) \geq n$ を満たすなら、

$$\lim_n \sum_{j=n}^{\ell(n)} a_j = 0.$$

特に、$\ell(n) = n$, 及び $\ell(n) \equiv \infty$ の場合を考えて、

$$\lim_n a_n = \lim_n \sum_{j=n}^{\infty} a_j = 0.$$

証明： $n = \infty$ の場合も含めて $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ と書く。すると、$s_n \longrightarrow s_\infty$ なので

$$\sum_{j=n}^{\ell(n)} a_j = s_{\ell(n)} - s_n \longrightarrow s_\infty - s_\infty = 0.$$

□

命題 2.5.4 (**非負項級数の収束判定**) (a_n), (b_n) を非負実数列とする。

(a) $s_n = a_0 + ... + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ が上に有界なら $\sum_0^\infty a_n$ は収束する。

(b) (**非負項級数の比較**) 有限個の n を除き $a_n \leq b_n$ を仮定する。このとき、

$\sum_0^\infty b_n$ が収束 $\Rightarrow$ $\sum_0^\infty a_n$ が収束.

従って、上の対偶 「$\sum_0^\infty a_n$ が発散 $\Rightarrow$ $\sum_0^\infty b_n$ が発散」も成立する。

(c) (**指数級数との比較**) $r \in [0,1)$, 有限個の n を除き $a_{n+1} \le r a_n$ なら $\sum_0^\infty a_n$ は収束。

証明： (a): s_n は非減少。よって、単調列定理より結論を得る。
(b): 仮定より $\exists m \in \mathbb{N}, \forall j \ge m, a_j \le b_j$. 従って $n \ge m$ なら

$$s_n = s_{m-1} + \sum_{j=m}^{n} a_j \le s_{m-1} + \sum_{j=m}^{n} b_j.$$

所が $\sum_{j=m}^\infty b_j$ は収束するから、上式から (s_n) は上に有界。従って収束する。
(c)：仮定より $\exists m \in \mathbb{N}, \forall j \ge m, a_j \le r a_{j-1} \le ... \le r^{j-m} a_m$. $n \ge m$ なら

$$s_n = s_{m-1} + \sum_{j=m}^{n} a_j \le s_{m-1} + a_m \underbrace{\sum_{j=m}^{n} r^{j-m}}_{\le 1/(1-r)}.$$

上式から (s_n) は上に有界、従って収束する。 □

問 2.5.2 (**階差級数との比較**) $(a_n), (b_n)$ を非負実数列、有限個の n を除き $a_n \le b_n - b_{n+1}$ とするとき、$\sum_0^\infty a_n$ が収束することを示せ。

例 2.5.5 $\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$ は $p=1$ なら発散、$p = 2, 3, ..$ なら収束する。

証明： $s_n = \sum_{j=1}^n j^{-p}$ とおく。$\underline{p=1 \text{ なら}}$

$$s_{2n} - s_n = \sum_{j=n+1}^{2n} j^{-1} \ge n \cdot (2n)^{-1} = 2^{-1}.$$

故に、収束級数の必要条件（命題 2.5.3）が満たされない。よって s_n は収束しない。s_n は単調増加だから、収束しなければ発散する。また $\underline{p \ge 2 \text{ なら}}$、

$$s_n \le s_{2^{n+1}-1} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} j^{-p} \le \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} 2^{-pk}}_{=2^{-(p-1)k}} \le 1/(1-2^{-(p-1)}) < \infty.$$

よって s_n は有界。従って収束する（命題 2.5.4）。 □

問 2.5.3 $(\star)$ $\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$ $(p = 2, 3, ..)$ の収束を、適当な階差級数との比較 (問 2.5.2) により別証明せよ。

命題 2.5.6 (**級数の絶対値・定数倍・有限和**) $\mathbb{R}^d$ での収束級数：$A = \sum_0^\infty a_n$, $B = \sum_0^\infty b_n$ を考える。$c \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$|A| \le \sum_0^\infty |a_n|, \quad cA = \sum_0^\infty c a_n, \quad A + B = \sum_0^\infty (a_n + b_n). \tag{2.6}$$

複素数列の場合 (2.6) 第 2 式は $c \in \mathbb{C}$ に対しても成立する。また、

$$\overline{A} = \sum_0^\infty \overline{a_n}. \tag{2.7}$$

証明： この命題で $\sum_0^\infty$ を有限和 $\sum_0^N$ に置き換えた式は全て自明に成立する。更に、$\sum_0^N$ に置き換えた式で $N \nearrow \infty$ の極限をとると、極限が順序を保つこと（命題 2.2.2）と演算の連続性（命題 2.4.6）から $\sum_0^\infty$ についての結果を得る。 $\square$

問 2.5.4 (和の**強単調性**) $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n \le b_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), $a_n \not\equiv b_n$ とする。$A = \sum_0^\infty a_n$, $B = \sum_0^\infty b_n$ が共に収束するとき、$A < B$ を示せ。

系 2.5.7 (a_n) を $\mathbb{R}^d$ の点列とする。

(a) $d = 1$ のとき、

$$\sum_0^\infty |a_n| = \sum_0^\infty a_n^+ + \sum_0^\infty a_n^- \quad (\text{両辺が } \infty \text{ の場合も含む}).$$

また、上式両辺が有限なら、$\sum_0^\infty a_n$ は収束し

$$\sum_0^\infty a_n = \sum_0^\infty a_n^+ - \sum_0^\infty a_n^-.$$

(b) $d \ge 1$ とし、点列 (a_n) の各項を $a_n = (a_{n,j})_{j=1}^d$ と数ベクトル表示する。このとき、

$$\begin{aligned}
\sum_0^\infty |a_n| < \infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{全ての } j = 1,..,d \text{ に対し } \sum_{n=0}^\infty |a_{n,j}| < \infty \\
&\Longrightarrow \quad \text{全ての } j = 1,..,d \text{ に対し } \sum_{n=0}^\infty a_{n,j} \text{ は収束} \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_0^\infty a_n \text{ が収束し、} \sum_0^\infty a_n = \left(\sum_{n=0}^\infty a_{n,j}\right)_{j=1}^d .
\end{aligned}$$

特に $a_n \in \mathbb{C}$ のとき、

$$\begin{aligned}
\sum_0^\infty |a_n| < \infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_0^\infty |\operatorname{Re} a_n| < \infty, \sum_0^\infty |\operatorname{Im} a_n| < \infty. \\
&\Longrightarrow \quad \sum_0^\infty \operatorname{Re} a_n, \sum_0^\infty \operatorname{Im} a_n \text{ が共に収束} \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_0^\infty a_n \text{ が収束し、} \sum_0^\infty a_n = \sum_0^\infty \operatorname{Re} a_n + \mathbf{i} \sum_0^\infty \operatorname{Im} a_n.
\end{aligned}$$

級数 $\sum a_n$ が「$\sum_0^\infty |a_n| < \infty$」を満たすことを**絶対収束**する (converge absolutely) という。上に述べたことにより、絶対収束する級数は収束する。

証明： (a):第１式:$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ より $\sum_0^\infty$ を有限和 $\sum_0^N$ におきかえた式が成立。また、$\sum_0^N |a_n|$, $\sum_0^N a_n^\pm$ は N について非減少なので $N \to \infty$ で極限（∞ の可能性あり）をもつ。以上と 命題 2.2.5 より第１式を得る。

第２式: 第１式 辺々が有限なら、$\sum a_n^\pm$ は有限値に収束。よって $a_n = a_n^+ - a_n^-$ と (2.6) より第２式を得る。

(b): １行目の $\Longleftrightarrow$: 不等式 $|a_{n,j}| \le |a_n| \le |a_{n,1}| + ... + |a_{n,d}|$ と非負項級数の比較（命題 2.5.4）による。

２行目の $\Rightarrow$: （a） による。

３行目の $\Leftrightarrow$: 命題 2.4.5 による。 $\square$

例 2.5.8 （**巾級数の収束判定**）(a_n) を $\mathbb{R}^d$ の点列、$x \in \mathbb{C}$, $|x| < r \le \infty$ とする。このとき、

$$\lim_n |a_{n+1}|/|a_n| = 1/r \text{ なら、} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は絶対収束する。特に } \lim_n a_n x^n = 0.$$

なお 問 2.5.6 に、より具体的な例を述べた。

証明： $b_n = |a_n x^n|$ に対し $\sum_0^\infty b_n < \infty$ ならよい。所が、$b_{n+1}/b_n = |a_{n+1}||x|/|a_n| \to |x|/r < 1$ より有限個の n を除き $b_{n+1}/b_n < |x|/r$. よって指数級数との比較（命題 2.5.4) より結論を得る。 □

問 2.5.5 次の命題 (a),(b) について系 2.5.7 では (a) ⇒ (b) を示した。逆に (b) ⇒ (a) を示せ：(a) 上に有界な非減少数列は収束する。(b) 絶対収束級数は収束する。

問 2.5.6 以下の $a_n \in \mathbb{C}$, r が巾級数の収束判定法（例 2.5.8）の条件を満たすことを確かめよ：(i) $a_n = n^p$ ($p \in \mathbb{N}$), $r = 1$. (ii) $a_n = 1/n!$, $r = \infty$. (iii) $a_n = \binom{\alpha}{n}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$, 問 2.4.5 参照), $r = 1$.

問 2.5.7 (x_n) は $\mathbb{R}^d$ の点列とするとき、以下の条件に対し (a) ⇒ (b) ⇒ (c) を示せ：(a): $r \in [0, 1)$ かつ有限個の n を除き、$|x_{n+1} - x_n| \le r|x_n - x_{n-1}|$. (b):$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| < \infty$. (c): (x_n) は収束する。

問 2.5.8 ($\star$) $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ とする。ある $r \in [0, 1)$ が次を満たすとき、f を **縮小写像** (contraction map) と呼ぶ：任意の $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対し $|f(x) - f(y)| \le r|x - y|$. f が縮小写像なら、$f(x) = x$ を満たす点 $x \in \mathbb{R}^d$ が唯一つ存在することを示せ。存在証明のヒント： $x_0 \in \mathbb{R}^d$ を任意とし、$x_n \in \mathbb{R}^d$, $n = 1, 2, ..$ を $x_n = f(x_{n-1})$ と定める。このとき、(x_n) が 問 2.5.7 の条件を満たすこと、更に $x = \lim_n x_n$ が不動点となることを示す。

問 2.5.9 ($\star$) $a_n, b_n, x \in \mathbb{C}$, $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ とする。$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, $g(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$ が絶対収束とするとき、$h(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$ も絶対収束し $h(x) = f(x)g(x)$ となることを示せ。ヒント：$n \to \infty$ で $\delta_n \stackrel{\text{def.}}{=} \left| \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i - \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \right) \right| \to 0$ を言えばよいが、$\delta_n \le \left(\sum_{j=n+1}^{2n} |a_j x^j| \right) \left(\sum_0^{2n} |b_k x^k| \right) + \left(\sum_{j=0}^{2n} |a_j x^j| \right) \left(\sum_{k=n+1}^{2n} |b_k x^k| \right)$.

問 2.5.10 ($\star$) $a_{m,n} \in \mathbb{C}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) に対し以下を示せ：
(i)$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{m,n}| = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|$ (両辺が ∞ の場合も含む). (ii): (i) の等式両辺が有限と仮定する。このとき全ての n に対し $\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}$ が絶対収束し、全ての m に対し $\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ が絶対収束する。更に $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$. ヒント：最後の等式は 問 2.5.9 のヒントで述べた考え方を応用して示せる。

問 2.5.11 ($\star$) $2 \le q \in \mathbb{N}$, D は $\{0, 1.., q-1\}$ に値をとる数列 $(x_n)_{n \ge 1}$ 全体の集合、E は D の数列のうち、有限個の n を除き $x_n = q - 1$ となるもの全体とする。以下を示せ：(i) $(x_n)_{n \ge 1} \in D \backslash E$ に対し $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n / q^n$ が収束し、$x \in [0, 1)$ (この級数を x の q **進小数展開**という). (ii) 写像 $(x_n)_{n \ge 1} \mapsto x$ は $D \backslash E$ から $[0, 1)$ への全単射である。
注： この問から、 $[0, 1)$ が (従って $\mathbb{R}$ が) 非可算集合であることが次のようにして分

かる（**カントールの対角線論法**[15]）。背理法による。$[0,1)$ が可算集合なら全単射 $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1)$ によって $[0,1) = \{\varphi(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ と書ける。今、各 $\varphi(m)$ の 2 進小数展開を $\varphi(m) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{m,n}/2^n$ とする。更に、$y_n = 1 - x_{nn} \in \{0,1\}$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n/2^n$ とすると $y \in [0,1)$ かつ $y \notin \{\varphi(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ (実際 y と $\varphi(m)$ の m 桁目を比べると $y_m \neq x_{m,m}$）. これは $[0,1) = \{\varphi(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ に反する。

命題 2.5.9 $\mathbb{R}^d$ の点列 (a_n) について, $a_n \to 0$ とする。

(a) $\sum_0^{\infty} a_n$, $\sum_0^{\infty}(a_{2n} + a_{2n+1})$ のいずれかが収束すれば他方も収束し、両者は等しい。

(b) (**交代級数収束定理**) $d = 1$ かつ $a_n = (-1)^n|a_n|$ かつ $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ $(n \in \mathbb{N})$ なら $\sum_0^{\infty} a_n$ は収束する。

証明: (a): $s_n = \sum_0^n a_j$ とすると、

$$s_{2n+1} = \sum_0^n (a_{2j} + a_{2j+1}) = s_{2n} + a_{2n+1}.$$

従って示すべきことは、「s_n s_{2n+1} のいずれかが収束すれば他方も収束し、極限は等しい」ことである。ところが、s_n が存在すれば、s_{2n+1} も収束し、極限は等しい（極限の定義から)。一方、s_{2n+1} が収束すれば、上式から、s_{2n} も収束し、両者の極限は等しい。従って、部分列による収束判定 I(問 2.1.4) より s_n が収束し、極限は $\lim_n s_{2n+1}$ に等しい。

(b): (a) の証明より s_{2n+1} の収束を言えばよい。$a_{2j} + a_{2j+1} \geq 0$ より s_{2n+1} は単調増加。一方、$a_{2j-1} + a_{2j} \leq 0$, $a_{2j+1} \leq 0$ より

$$s_{2n+1} = a_0 + \sum_1^n (a_{2j-1} + a_{2j}) + a_{2n+1} \leq a_0$$

故に単調列定理より s_{2n+1} は収束。 □

問 2.5.12 級数：$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_n, x \in \mathbb{C})$ について以下を示せ：(i) $f(\pm x)$ が共に収束するとき、$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$, $\frac{f(x)-f(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$. (ii) (a_n) が実数列かつ、$f(x)$ が収束するとき、$f(\overline{x})$ も収束して、$\overline{f(x)} = f(\overline{x})$ が成立。

問 2.5.13 $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[m]{n}}$ $(m = 1, 2, ..)$ は収束するが、絶対収束しないことを示せ。

問 2.5.14 命題 2.5.9(b) の a_n に対し $-|a_{2n+1}| \leq \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k \leq 0 \leq \sum_{k=2n}^{\infty} a_k \leq |a_{2n}|$, 従って特に $|\sum_{k=n}^{\infty} a_k| \leq |a_n|$ を示せ。

問 2.5.15 $(\star)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。任意の $m > 1$ に対し $0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m}$ を満たす $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ が存在するとき、α を**リューヴィル超越数**と言う[16]。リューヴィル超越数は、超越数である（整数を係数とする多項式の零点にならない）ことが知られている。$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}2^{-k!}$ がリューヴィル超越数であることを以下のようにして示せ：
(i) $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k 2^{-k!}\right| \leq 2^{-(n+1)!}$. (ii) $p_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{n!-k!}$, $q_n = 2^{n!}$ とする。任意の $m > 1$ に対し n が十分大きければ、$0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^m}$.

[15] Georg Cantor (1845—1918)
[16] Joseph Liouville 1809–1882

3　初等関数 I

指数、対数、三角比といった概念は古くから「計算手段」として知られていた。18 世紀、スイスの数学者オイラーはこれらを初めて「関数」として捉えただけでなく、複素変数へも拡張した。初等関数に関する記号の中にはオイラーの足跡が数多くうかがえる。関数を $f(x)$ と表記したのも彼が最初で、その他、足し算の $\sum$, 虚数単位 $\mathbf{i}$, 自然対数の底 e, sin, cos 等の記号も彼が最初に用いたと言われる。また、指数関数と三角関数の関係を示すオイラーの等式 (命題 3.2.2) は複素関数論の発展を促した。

3.1　指数関数

次の命題は巾級数の収束判定法（ 例 2.5.8） の特別な場合である：

命題 3.1.1 (**指数関数**) $x \in \mathbb{C}$ に対し次の級数は絶対収束する：

$$\exp x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

関数 $x \mapsto \exp x$ を**指数** (exponential) 関数 と呼ぶ。また、正数 $e \stackrel{\text{def.}}{=} \exp(1) = 2.71828...$ を**自然対数の底** と呼ぶ。

注：$\exp x$ が e^x(自然対数の底 e の x 乗）に等しいことは、命題 3.4.1 で述べる。

補題 3.1.2 (命題 3.1.3 のための準備) $x \in \mathbb{C}$ に対し

$$s_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!}, \quad e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

とする。これらについて以下が成立する：

$$e_n(x) = \sum_{m=0}^{n} p_{m,n} \frac{x^m}{m!} \tag{3.1}$$

但し、$p_{0,n} = p_{1,n} = 1$, $p_{m,n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$, $(m \geq 2)$.

$$|\exp x - s_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1} \exp|x|}{(n+1)!}, \tag{3.2}$$

$$|\exp x - e_n(x)| \leq \left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{|x|^2}{2n}\right) \exp(|x|) \tag{3.3}$$

更に、$f_n(x)$ は $s_n(x)$ または $e_n(x)$ を表すとすると、$x, y \in \mathbb{C}$, $|x|, |y| \leq r$ なら

$$|\exp x - \exp y| \leq \sup_{n \geq 1} |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y| \exp r, \tag{3.4}$$

また、$a, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \longrightarrow a$ なら

$$\exp a_n \longrightarrow \exp a, \quad f_n(a_n) \longrightarrow \exp a. \tag{3.5}$$

証明：(3.1):

$$
\begin{aligned}
e_n(x) &\overset{2\,項展開}{=} \sum_{m=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{x}{n}\right)^m \\
&= \sum_{m=0}^{n} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}_{p_{m,n}} \frac{x^m}{m!}
\end{aligned}
$$

(3.2):

$$
|\exp x - s_n(x)| = \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\right| \overset{(2.6)}{\le} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|x|^m}{m!} = |x|^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^m}{(n+m+1)!}
$$

ここで、

$$
(n+m+1)! = \underbrace{(n+m+1)}_{\ge m+1}\underbrace{(n+m)}_{\ge m}\cdots\underbrace{(n+2)}_{\ge 2}\cdot(n+1)! \ge (m+1)!\cdot(n+1)!.
$$

従って、

$$
|\exp x - s_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^m}{(m+1)!}}_{\le \exp|x|}.
$$

(3.3):

$$
|\exp x - e_n(x)| \le |\exp x - s_n(x)| + |s_n(x) - e_n(x)|
$$

なので、

(1) $|e_n(x) - s_n(x)| \le \frac{|x|^2}{2n}\exp(|x|)$.

が示せれば、これと (3.2) より、(3.3) を得る。以下 (1) を示す。

$$
s_n(x) - e_n(x) = \sum_{m=2}^{n} \frac{x^m}{m!}(1-p_{m,n}).
$$

ここで、$m \ge 2$ なら $p_{m,n} = \left(1-\frac{m-1}{n}\right)p_{m-1,n}$. 故に

$$
\begin{aligned}
1-p_{m,n} &= 1-\left(1-\frac{m-1}{n}\right)p_{m-1,n} = \left(1-\frac{m-1}{n}\right)(1-p_{m-1,n}) + \frac{m-1}{n} \\
&\le (1-p_{m-1,n}) + \frac{m-1}{n}
\end{aligned}
$$

上式から帰納的に

$$
1-p_{m,n} \le \underbrace{1-p_{2,n}}_{=1/n} + \frac{2+\ldots+(m-1)}{n} = \frac{(m-1)m}{2n}.
$$

従って

$$
|s_n(x) - e_n(x)| \le \sum_{m=2}^{n} \frac{|x|^m}{m!}(1-p_{m,n}) \le \frac{1}{2n}\sum_{m=2}^{n} \frac{|x|^m}{(m-2)!} = \frac{|x|^2}{2n} \underbrace{\sum_{m=2}^{n} \frac{|x|^{m-2}}{(m-2)!}}_{=\exp(|x|)}.
$$

(3.4): 最初の不等号は $\exp x = \lim_n f_n(x)$ から判る。一方、問 1.1.2 より

(∗) $|x^m - y^m| \le mr^{m-1}|x-y|$.

また、

$$|s_n(x) - s_n(y)| \le \sum_{m=1}^{n} \frac{|x^m - y^m|}{m!} \overset{(*)}{\le} |x-y| \underbrace{\sum_{m=1}^{n} \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}}_{\le \exp r}.$$

更に、(3.1) より、$|e_n(x) - e_n(y)|$ の評価も同様。

(3.5): $r = \sup_{n \ge 0} |a_n|$ とおく。収束列の有界性から $|a| \le r < \infty$. そこで、

$$\begin{aligned}
|\exp a_n - \exp a| &\overset{(3.4)}{\le} |a_n - a| \exp r \longrightarrow 0, \\
|f_n(a_n) - \exp a| &\le |f_n(a_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - \exp a| \\
&\overset{(3.4)}{\le} |a_n - a| \exp r + |f_n(a) - \exp a| \overset{(3.2),(3.3)}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

問 3.1.1 $\lim_n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} = \frac{x^k}{k!} \exp(-x)$ $(x \in \mathbb{C})$ を示せ。特に $x \in (0, \infty)$ の場合、「確率 x/n で起る独立事象が n 回中 k 回起る確率」の極限が $\frac{x^k}{k!} \exp(-x)$ であることを意味する（**ポアソンの小数の法則**[17]）。

問 3.1.2 $\lim_n n/(n!)^{1/n}$ を求めよ。ヒント： $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

問 3.1.3 $a_n \ge 0$, $\frac{a_n}{\sqrt{n}} \to 0$ とする。$e_n(a_n) \exp(-a_n) \to 1$, $e_n(-a_n) \exp(a_n) \to 1$ を示せ。ヒント：(3.3).

問 3.1.4 (⋆) $e \notin \mathbb{Q}$ を示せ。ヒント：$e = p/q$ $(p, q \in \mathbb{N})$ と仮定すると (3.2) で $x = 1$ として、$|pn! - qs_n(1)n!| \le qe/(n+1)$.

問 3.1.5 (⋆) $x \in [0, \infty)$ とする。以下を示せ：(i) $e_n(x) \le e_{n+1}(x)$. ヒント：(3.1). (ii) $\exp x - e_n(x) \ge s_n(x) - e_n(x) \ge (\exp(x) - x - 1)/n$. この不等式と (3.2) を比べると、$e_n(x)$ が $\exp x$ に近づく速さは、$s_n(x)$ のそれに比べてだいぶ遅いことが分かる。ヒント：補題 3.1.2 の証明から $m \ge 2$ なら $1 - p_{m,n} \ge (m-1)/n$.

問 3.1.6 (⋆) $x > 0$ に対し $\ell_n(x) = (x^{1/n} - 1)n$ と定める。以下を示せ：(i) $x > 0$ に対し $\ell_n(x) = -x^{1/n}\ell_n(1/x)$. (ii) $x > 0$ に対し $e_n \circ \ell_n(x) = x$, 但し $e_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$. (iii) $x \ge 1$ に対し $\ell_n(x) \ge \ell_{n+1}(x) \ge 0$. (iv) $0 < x \le 1$ に対し $\ell_n(x) \le \ell_{n+1}(x) \le 0$. (v) $x > 0$ に対し極限値 $\ell(x) = \lim_n \ell(x)$ が存在する。

問 3.1.7 (⋆) 以下を示せ：(i) 複素正方行列 X に対し $\exp X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ が絶対収束する (問 2.4.10 参照)。$X \mapsto \exp X$ を行列の**指数関数** と言う。(ii) 行列の指数関数について 補題 3.1.2 と同じことが全て成立する。

命題 3.1.3 (**指数関数の性質**) 指数関数 $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ は以下の性質を持つ：

[17] Siméon Denis Poisson (1781–1840)

(a) 全ての $x, y \in \mathbb{C}$ に対し $\exp(x+y) = \exp x \exp y$ (**指数法則**). 更に、

$$\overline{\exp x} = \exp \overline{x}, \quad |\exp x| = \exp(\mathrm{Re}\, x), \quad \exp x \neq 0. \tag{3.6}$$

また、$x \in \mathbb{R}$ に対し $\exp x > 0$.

(b) (**差の評価**) $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq y$ なら

$$(x-y)\exp y \leq \exp x - \exp y \leq (x-y)\exp x, \quad (\text{等号成立} \iff x = y).$$

特に、$x \mapsto \exp x$ （$\mathbb{R} \to (0, \infty)$）は狭義単調増加、従って単射である。

(c) (**連続性**) 実数列 (a_n) と $a \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し $a_n \to a$ なら $\exp a_n \to \exp a$. 但し $\exp(\infty) = \infty$, $\exp(-\infty) = 0$ とする。特に、$x \mapsto \exp x$ （$\mathbb{R} \to (0, \infty)$）は全射である。

証明:(a): まず、指数法則を示す。$z_n = x+y+(xy/n)$ とおくと $z_n \longrightarrow x+y$, $e_n(x)e_n(y) = e_n(z_n)$. 従って

$$\exp x \exp y \overset{(3.3)}{=} \lim_n e_n(x)e_n(y) = \lim_n e_n(z_n) \overset{(3.5)}{=} \exp(x+y).$$

(3.6) <u>第 1 式</u> は 問 2.5.12(ii) を $\exp x$ に適用すれば分かる。<u>第 2 式</u> については、

$$\begin{aligned} |\exp x| &\overset{\text{指数法則}}{=} |(\exp(x/2))^2| \overset{\text{問 2.4.3}}{=} |\exp(x/2)|^2 \overset{\text{問 2.4.3}}{=} \exp(x/2)\overline{\exp(x/2)} \\ &\overset{\text{第 1 式}}{=} \exp(x/2)\exp(\overline{x}/2) \overset{\text{指数法則}}{=} \exp((x+\overline{x})/2) = \exp(\mathrm{Re}\, x). \end{aligned}$$

また、任意の $x \in \mathbb{C}$ に対し $1 = \exp 0 \overset{\text{指数法則}}{=} \exp(-x)\exp x$. よって $\exp x \neq 0$. 更に $x \in \mathbb{R}$ なら $\exp \frac{x}{2} \neq 0$ より $\exp x = (\exp \frac{x}{2})^2 > 0$.
(b): まず $r \geq 0$ に対し次を示す：

(1) $r \leq \exp r - 1 \leq r \exp r$, $r\exp(-r) \leq 1 - \exp(-r) \leq r$. (いずれも等号成立は $r = 0$ のときに限る)

第一式は次のようにして分かる：

$$r \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n/n! = \exp r - 1 \overset{(3.4)\text{ で } y=0}{\leq} r \exp r.$$

また、第一式両辺に $\exp(-r)$ を掛けて指数法則を用いれば第二式を得る。
　さて、指数法則から

$$(\exp(x-y) - 1)\exp y = \exp x - \exp y = (1 - \exp(-(x-y)))\exp x$$

上式で (1) （$r = x - y$）を用い 所期不等式を得る。
(c): <u>$a \in \mathbb{R}$ の場合</u>: (3.5) による。<u>$a = \infty$ の場合</u>: 仮定より $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq m$, $a_n \geq 0$. そこで $n \geq m$ とすると、(1) より

$$\exp a_n \geq 1 + a_n \longrightarrow \infty \ (n \nearrow \infty).$$

<u>$a = -\infty$ の場合</u>: $-a_n \longrightarrow \infty$ なので指数法則より

$$\exp a_n = 1/\exp(-a_n) \longrightarrow 0 \ (n \nearrow \infty).$$

$x \mapsto \exp x$ （$\mathbb{R} \to (0, \infty)$）が全射であることは、連続性と中間値定理による。 □

問 3.1.8 ($\star$) 問 2.5.9 を用いて「$z, w \in \mathbb{C}$ に対し $\exp(z+w) = \exp z \exp w$ 」を別証明せよ。ヒント：$a_n = z^n/n!$, $b_n = w^n/n!$, $x = 1$ とする。

問 3.1.9 ($\star$) 行列の指数関数 (問 3.1.7) に関し以下を示せ。但し M_d を $d \times d$ 複素行列全体の集合とする：(i) $X, Y \in M_d$, $XY = YX$ なら $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$. (ii) 任意の $X \in M_d$ に対し $\exp X$ は可逆、$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$. (iii) $X_n, X \in M_d$, $X_n \to X$ なら $\exp X_n \to \exp X$.

3.2 双曲関数と三角関数

命題 3.2.1 (**双曲関数**) $x \in \mathbb{C}$ に対し $\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$ を以下のように定義する：

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2},$$

$\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$ を順に**双曲余弦** (hyperbolic cosine) 関数, **双曲正弦** (hyperbolic sine) 関数と呼ぶ。定義から、

$$\exp x = \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x. \tag{3.7}$$

更に、以下が成立する：

(a) (**巾級数表示**)

$$\mathrm{ch}\, x = \sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \mathrm{sh}\, x = \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

特に関数 $\mathrm{ch}\, : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は $[0, \infty)$ 上で狭義単調増加、$(-\infty, 0]$ 上で狭義単調減少。関数 $\mathrm{sh}\, : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は狭義単調増加。

(b) (**連続性**) $a_n, a \in \mathbb{C}, a_n \to a$ なら $\mathrm{ch}\, a_n \to \mathrm{ch}\, a$, $\mathrm{sh}\, a_n \to \mathrm{sh}\, a$. また。これは $\mathrm{ch}\,(\pm\infty) = \infty$, $\mathrm{sh}\,(\pm\infty) = \pm\infty$ （復号同順）と定めることにより、$a_n \in \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $a_n \to a$ でも成立する。

証明：(a): $f(x) = \exp x$ に対し、$\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$ はそれぞれ $(f(x) \pm f(-x))/2$ なので、問 2.5.12 を使える。
(b): 指数関数の連続性（命題 3.1.3）に帰着する。 □

問 3.2.1 $x, y \in \mathbb{C}$ に対し以下を示せ：$\mathrm{ch}\,(x+y) = \mathrm{ch}\, x \mathrm{ch}\, y + \mathrm{sh}\, x \mathrm{sh}\, y$, $\mathrm{sh}\,(x+y) = \mathrm{ch}\, x \mathrm{sh}\, y + \mathrm{ch}\, y \mathrm{sh}\, x$. これらを、双曲関数の**加法定理**という。特に、第一式で $y = -x$ として、$\mathrm{ch}\,^2 x - \mathrm{sh}\,^2 x = 1$. である。

命題 3.2.2 (**三角関数**) $x \in \mathbb{C}$ に対し $\cos x$, $\sin x$ を以下のように定義する：

$$\cos x = \mathrm{ch}\,(\mathbf{i}x) = \frac{\exp(\mathbf{i}x) + \exp(-\mathbf{i}x)}{2},$$
$$\sin x = \mathrm{sh}\,(\mathbf{i}x)/\mathbf{i} = \frac{\exp(\mathbf{i}x) - \exp(-\mathbf{i}x)}{2\mathbf{i}}$$

$\cos x$, $\sin x$ を順に**余弦** (cosine) 関数, **正弦** (sine) 関数 と呼ぶ。定義と (3.7) から、

$$\exp \mathbf{i}x = \cos x + \mathbf{i} \sin x \quad (\textbf{オイラーの等式}).$$

更に、

(a) (**巾級数表示**)

$$\cos x = \sum_0^\infty \frac{(\mathbf{i}x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \frac{1}{\mathbf{i}} \sum_0^\infty \frac{(\mathbf{i}x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(b) (**連続性**) $a_n, a \in \mathbb{C}$,$a_n \to a$ なら $\cos a_n \to \cos a$, $\sin a_n \to \sin a$.

証明： 定義から、双曲関数に対する結果に帰着する。 □

問 3.2.2 $x, y \in \mathbb{C}$ に対し以下を示せ：$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$. これらを三角関数に関する**加法定理**という。特に、第一式で $y = -x$ として、$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

問 3.2.3 cos, sin は複素変数の関数として有界か？

問 3.2.4 $\cos x \neq 1$ のとき以下を示せ：
$\sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{1}{2} + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}$, $\sum_{k=0}^n \sin kx = \frac{\sin x + \sin nx - \sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}$.

問 3.2.5 $0 \leq r < 1$, $x \in \mathbb{R}$ に対し次を示せ：
$\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x + r^2} = \sum_{n=0}^\infty r^n \cos nx$, $\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2} = \sum_{n=1}^\infty r^n \sin nx$.

3.3 対数関数

命題 3.3.1 (**対数関数とその性質**) 指数関数 $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ は全単射である（命題 3.1.3)。その逆関数を

$$\log : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

と記し、**対数** (logarithm) 関数と呼ぶ。 このとき、以下が成立する。

(a) 全ての $x \in (0,\infty)$ に対し $\exp\log(x) = x$, また全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し $\log\exp(x) = x$. 特に、$\log 1 = 0$, $\log e = 1$.

(b) 全ての $x, y \in (0,\infty)$ に対し $\log(xy) = \log x + \log y$.

(c) (**差の評価**) $x \geq y > 0$ なら $(x-y)/x \leq \log x - \log y \leq (x-y)/y$.

(d) (**連続性**) 正数列 (a_n), 及び $a \in [0,\infty]$ に対し $a_n \longrightarrow a$ なら $\log a_n \longrightarrow \log a$, 但し $\log(\infty) = \infty$, $\log(0) = -\infty$ とする。

証明： (a): 定義から明らか。
(b): 指数関数に対する指数法則 (命題 3.1.3) より

$$\exp(\log(xy)) = xy = \exp(\log x)\exp(\log y) = \exp(\log x + \log y).$$

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ の単射性から所期等式を得る。
(c): 指数関数に対する差の評価 (命題 3.1.3) に帰着する。
(d): (c) を用いて示せる。 □

問 3.3.1 数列 $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ は、極限 $\gamma \in (0,\infty)$ を持つことを示せ（γ を **オイラーの定数**と呼ぶ）。ヒント：次を順次示す：(i) $n \ge 1$ に対し $\frac{1}{n+1} \le \log(n+1) - \log n \le \frac{1}{n}$ (ii) $n \ge 1$ に対し $0 \le \gamma_n - \gamma_{n+1} \le \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

問 3.3.2 $a_n > -1, p_n = \prod_{j=0}^n (1+a_j)$ とする。p_n が 0 でない値に収束するとき、極限を **無限積** といい、$\prod_{n=0}^\infty (1+a_n)$ と書く。以下を示せ：(i) 以下の命題 (a)–(c) について (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c)：(a) $\sum_0^\infty |a_n| < \infty$. (b) $\sum_0^\infty |\log(1+a_n)| < \infty$. (c) p_n が 0 でない値に収束する。ヒント： $x \in (-1,1)$ なら、$\frac{|x|}{1+|x|} \le |\log(1+x)| \le \frac{|x|}{1-|x|}$. (ii) 特に $a_n \ge 0$ なら (b) $\Leftrightarrow$ (c).

問 3.3.3 $(\star)$ 問 3.1.6 の $\ell(x)$ は $\log x$ に等しいことを示せ：

問 3.3.4 $(\star)$ 数列 $(E_n)_{n\ge 0}$ を $E_0 = 1$, $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}E_k}{(2n-2k)!(2k)!} = 0$ $(n \ge 1)$ で定める。以下を示せ：(i) $|E_n| \le (2n)! r^{-2n}$ $(\forall n \ge 1)$, 但し $r > 0$ は $\mathrm{ch}\, r = 2$ の解とする[18]。(ii) $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$ なら $1/\mathrm{ch}\, z = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n E_n z^{2n}/(2n)!$, $1/\cos z = \sum_{n=0}^\infty E_n z^{2n}/(2n)!$. ヒント：問 2.5.9. なお、$E_n$ は **オイラー数** と呼ばれ、正の奇数であることが知られている。$E_1, .., E_5$ の値は $1, 5, 61, 1385, 50521$.

問 3.3.5 $(\star)$ 数列 $(b_n)_{n\ge 0}$ を $b_0 = 1$, $\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{(n+1-k)!k!} = 0$ $(n \ge 1)$ で定める。以下を示せ：(i) $|b_n| \le n! r^{-n}$ $(\forall n \ge 1)$, 但し $r > 0$ は $e^r = 1 + 2r$ の解とする[19]。(ii) $z \in \mathbb{C}$, $0 < |z| < r$ なら $z/(e^z - 1) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n/n!$. ヒント：問 2.5.9. (iii) $b_{2n+1} = 0$ $(\forall n \ge 1)$ ヒント：$\sum_{n=2}^\infty b_n z^n/n!$ は偶関数。なお、$B_n = (-1)^{n-1} b_{2n}$ $(n \ge 1)$ は**ベルヌーイ数**と呼ばれ、正数であることが知られている。ベルヌーイ数は初等関数の展開や、$\zeta(2k)$ $(k = 1, 2, .., $ 問 3.4.5 参照$)$ の計算、自然数の巾乗和の表示など、色々なところに顔を出す面白い数である。$B_1, .., B_5$ の値は $1/6, 1/30, 1/42, 1/30, 5/66$. ベルヌーイ数は Jakob Bernoulli (1759–89) が発見したと言われるが、実は日本の関孝和 (?–1708) がこれに先んじていた。

3.4 正数の複素数幂

命題 3.4.1 (**正数の複素数幂**) $a \in [0,\infty)$ とする。$x \in \mathbb{C}$ に対し a^x を次のように定める：

$$a^x = \begin{cases} \exp(x \log a), & a > 0 \text{ なら} \\ 0, & a = 0 \text{ なら} \end{cases}$$

このとき、以下が成立

(a) $x, y \in \mathbb{C}$ に対し、$a^{x+y} = a^x a^y$ (**指数法則**). 更に、

$$\overline{a^x} = a^{\overline{x}}, \quad |a^x| = a^{\mathrm{Re}\, x}.$$

(b) (**差の評価**) $0 < a \le b$ とする。

$$\begin{array}{ll} x \in [0,\infty) \text{ なら} & (a/b) x a^{x-1}(b-a) \le b^x - a^x \le (b/a) x b^{x-1}(b-a), \\ x \in (-\infty, 0] \text{ なら} & (a/b)|x| b^{x-1}(b-a) \le a^x - b^x \le (b/a)|x| a^{x-1}(b-a). \end{array} \tag{3.8}$$

[18] $r = \log(2+\sqrt{3}) = 1.3169....$ 複素解析から (ii) の展開は $0 < |z| < \pi/2$ で正しいことが分かる。

[19] $r = 1.256....$ 複素解析から (ii) の展開は $0 < |z| < 2\pi$ で正しいことが分かる。

また、$x \geq y$ なら

$$(x-y)a^y \log a \leq a^x - a^y \leq (x-y)a^x \log a. \tag{3.9}$$

注1： 自然対数の底 e に対し $e^x = \exp x$ である。

注2：微分に関する平均値定理 (定理 5.4.1) を用いれば、(3.8) は改良出来る (例 5.4.5)。

命題 3.4.1 の証明：(a): 指数関数に対する結果 (命題 3.1.3) に帰着。
(b):a^x の定義式に戻り、指数関数、対数関数の差の評価 (命題 3.1.3, 命題 3.3.1) を組み合わせて得られる。詳細は問 (問 3.4.1) とする。 □

問 3.4.1 (3.8),(3.9) を示せ。

問 3.4.2 $a \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ に対し $(a^x)^y = a^{xy}$ を示せ。

問 3.4.3 $x < 1$, $x \geq 1$ に応じて $\lim_n n^{xn}/n! = 0, \infty$ を示せ。

問 3.4.4 ($\star$) 以下を示せ：(i) $f \in C(\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$ が全ての $x, x' \in \mathbb{R}$ に対し $f(x+x') = f(x) + f(x')$ を満たすなら $f(x) = f(1)x$. (ii) $g \in C(\mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty))$ が全ての $x, x' \in \mathbb{R}$ に対し $g(x+x') = g(x)g(x')$ を満たすなら $g(x) = g(1)^x$.

例 3.4.2 $\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$ は $0 \leq p \leq 1$ なら発散、$p > 1$ なら収束する。

証明：$0 \leq p \leq 1$ なら、$n^{-p} \geq n^{-1}$ より $p = 1$ の場合 (例 2.5.5) に帰着する。また、$p > 1$ に対しては $p = 2, 3, ..$ に対する証明 (例 2.5.5) がそのまま通用する。 □

問 3.4.5 (a_n) が有界複素数列、$s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > 1$ のとき、$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^s}$ の絶対収束を示せ。この級数を **ディリクレ級数**、特に $a_n \equiv 1$ の場合を**リーマンの ζ-関数**と言う[20]。

問 3.4.6 ($\star$) $\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$ $(p > 1)$ の収束を、適当な階差級数との比較 (問 2.5.2) により別証明せよ。

問 3.4.7 ($\star$) 以下を示せ：(i) $f : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$ とし次の (a),(b) を仮定する: (a) $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ が互いに素なら $f(mn) = f(m)f(n)$. (b) $\sum_{p:\ 素数} \sum_{r=1}^\infty |f(p^r)| < \infty$.
このとき、$\sum_{n=1}^\infty |f(n)| < \infty$ 及び $\sum_{n=1}^\infty f(n) = \prod_{p:\ 素数} (1 + \sum_{r=1}^\infty f(p^r))$.
(ii) $\sum_{n=1}^\infty n^{-s} = \prod_{p:\ 素数} \frac{1}{1-p^{-s}}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$. (**オイラーの積公式**).
オイラーの積公式 (1737 年) は、リーマンの ζ-関数が素数の配置に関する情報を秘めていることを示唆する。リーマンの ζ-関数についてのオイラーの研究は 19 世紀になってリーマンに引き継がれた。その中で有名な予想「$\zeta(s)$ の非自明な零点の実部は 1/2 である」(1859 年) がなされ、また、 $\zeta(s)$ という記号も定着した。そうした研究の延長線上にある、最も有名な結果のひとつが、**素数定理:** $\lim_n \dfrac{\pi_n}{n/\log n} = 1$ であろう（π_n は n 以下の素数の個数)。素数定理はガウスやルジャンドルが既に予想していたが、1896 年にドゥラ ヴァレー プーサンとアダマールが独立に証明した[21]。

問 3.4.8 ($\star$) 次を示せ：$\sum_{p:\ 素数} p^{-1} = \infty$. ヒント；オイラーの積公式 (問 3.4.7) で $s \searrow 1$ として、$\prod_{p:\ 素数} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) = \infty$. 次に 問 3.3.2 を用いる。

[20] Bernhard Riemann (1826–66)
[21] Carl Friedrich Gauss (1777—1855), Adrien-Marie Legendre (1752–1833), Jacques Hadamard (1865–1963), de La Valée Poussin (1866–1962)

4　極限と連続 II

4.1　関数の極限

例えば関数 $f(x)=x^2$ で「変数 x が $a\in\overline{\mathbb{R}}$ に近付けば、値 x^2 は a^2 に近付く (但し $(\pm\infty)^2=\infty$)」ことは、感覚的に受け入れられる。このように、「関数 f の変数 x がある値 a に近付くとき、$f(x)$ もある値 ℓ に近付く」ということを一般的に定義しよう。

定義 4.1.1 （**関数の極限**）$d,k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $A\subset D\subset\mathbb{R}^d$, $f:D\longrightarrow\mathbb{R}^k$ とする（f が複素変数や複素数値の場合も、$d=2$, $k=2$ の場合として含む)。また、$a\in\mathbb{R}^d$ ($d=1$ なら $a=\pm\infty$ も許す), $\ell\in\mathbb{R}^k$ ($k=1$ なら $\ell=\pm\infty$ も許す) とする。
• A 内の点列 (a_n) に対し

$$a_n\to a \text{ なら } f(a_n)\to\ell.$$

が成り立てば、f は 点 a で A **からの極限** ℓ **を持つ**と言い、

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=\ell$$

あるいは「$x\in A$, $x\to a$ なら $f(x)\to\ell$」と記す。特に $A=D$ なら f は 点 a で **極限** ℓ **を持つ**と言い、

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell$$

あるいは「$x\to a$ なら $f(x)\to\ell$」と記す。

例 4.1.2 （**指数・対数関数の極限**）(i) 任意の $a\in\overline{\mathbb{R}}$ に対し $\lim\limits_{x\to a}\exp x=\exp a$ (命題 3.1.3), 但し $\exp(\infty)\stackrel{\text{def.}}{=}\infty$, $\exp(-\infty)\stackrel{\text{def.}}{=}0$. (ii) 任意の $a\in[0,\infty]$ に対し $\lim\limits_{x\to a}\log x=\log a$ (命題 3.3.1), 但し $\log(\infty)\stackrel{\text{def.}}{=}\infty$, $\log(0)\stackrel{\text{def.}}{=}-\infty$.

以下で述べるように、関数の極限も数列の極限と同様の性質を持つ。

命題 4.1.3 $A\subset D\subset\mathbb{R}^d$, $a\in\mathbb{R}^d$ ($d=1$ なら $a=\pm\infty$ も許す) とする。また、$f_i:D\to\mathbb{R}^k$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f_i(x)=\ell_i$ ($i=1,2$) とする:

(a) (**演算の連続性**)

$$\ell_i\in\mathbb{R}^k \text{ なら } \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}}(f_1+f_2)(x)=\ell_1+\ell_2 \tag{4.1}$$

$$f_i,\ell_i \text{ が複素数値なら } \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}}(f_1f_2)(x)=\ell_1\ell_2 \tag{4.2}$$

$$f_1 \text{ が } \mathbb{C}\backslash\{0\} \text{ に値をとり、 } \ell_1\neq 0 \text{ なら } \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}}(1/f_1)(x)=1/\ell_1. \tag{4.3}$$

また、$k=1$, $\ell_i\in\overline{\mathbb{R}}$ とするとき、$\{\ell_1,\ell_2\}\neq\{\infty,-\infty\}$ なら (4.1) が成立、$\{|\ell_1|,|\ell_2|\}\neq\{0,\infty\}$ なら (4.2) が成立が成立する。

(b) (**はさみうちの原理**) $k=1$, $\ell_1=\ell_2\in\overline{\mathbb{R}}$ かつ $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ が A 上で $f_1\le f\le f_2$ を満たすなら、$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=\ell_1$.

証明: A 内の点列 (a_n) であり $\lim_n a_n = a$ なるものを任意にとる。このとき、点列 $f_i(a_n)$, $f(a_n)$ を考えることにより、示すべきことは点列に関する命題（命題 2.2.5, 命題 2.2.4, 命題 2.4.6）に帰着する。 □

命題 4.1.4 (**合成関数の極限**) 記号は 定義 4.1.1 の通りとする。更に $g : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\text{(a)} \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \ell \text{ かつ (b) } \lim_{y\to\ell} g(y) = \ell'$$

を仮定する、但し $\ell' \in \mathbb{R}^m$ （$m = 1$ の場合は $\ell' = \pm\infty$ も許す)。このとき、

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} g\circ f(x) = \ell'.$$

証明: A 内の点列 (a_n) であり $\lim_n a_n = a$ なるのもを任意にとる。このとき、仮定 (a) より $f(a_n) \longrightarrow \ell$. 従って仮定 (b) より $g\circ f(a_n) \longrightarrow \ell'$. □

次の例の極限は頻繁に応用される：

例 4.1.5 $p, q, x > 0$ とするとき、(i) 任意の $a \in [0, \infty]$ に対し $\lim_{x\to a} x^p = a^p$, $\lim_{x\to a} x^{-p} = a^{-p}$, 但し $\infty^p \stackrel{\text{def.}}{=} \infty$, $\infty^{-p} \stackrel{\text{def.}}{=} 0$. (ii) $\lim_{x\to\infty} x^p e^{-qx} = 0$. (iii) $\lim_{x\to\infty} x^{-p}\log x = 0$, $\lim_{x\to 0} x^p \log x = 0$.

証明：(i) $x^{\pm p} = \exp(\pm p\log x)$ だから指数・対数関数の極限 (例 4.1.2), 合成関数の極限 (命題 4.1.4) より結論を得る。
(ii) $m \in \mathbb{N}\cap(p,\infty)$ とする。$(qx)^m/m! \le e^{qx}$ より $0 \le x^p e^{-qx} \le m! q^{-m} x^{p-m}$. これと (i) の結果より $x^{p-m} \to 0$. 更にはさみうちより $x^p e^{-qx} \to 0$.
(iii) $y = \log x$ とすると、

$$\begin{array}{ll} x\to\infty \text{ (従って } y\to\infty\text{) のとき} & x^{-p}\log x = \exp(-py)y \xrightarrow{\text{(ii)}} 0, \\ x\to 0 \text{ (従って } y\to-\infty\text{) のとき} & |x^p\log x| = |\exp(py)y| = \exp(-p|y|)|y| \xrightarrow{\text{(ii)}} 0. \end{array}$$

□

問 4.1.1 $0 < x \to 0$ のとき、次の関数の極限を求めよ：x^x, $x^{1/x}$, x^{x^x},

問 4.1.2 以下の極限を求めよ：$f(x) = \sum_{j=0}^p a_j x^j$,$g(x) = \sum_{j=0}^q b_j x^j$ ($a_p > 0$, $b_q > 0$) のとき、$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$. (ii) $p\in\mathbb{R}$ のとき、$\lim_{x\to\infty}\{(x+1)^p - x^p\}$.

命題 4.1.6 （**定義 4.1.1 の言い換え**）記号は 定義 4.1.1 の通りとするとき、次の条件は同値である。**(a)** $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \ell$. **(b)** 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次のような $\delta > 0$ が存在する：

$$x \in A\cap B_d(a,\delta) \implies f(x) \in B_k(\ell,\varepsilon).$$

ここで、

$$B_d(a,\delta) = \begin{cases} \{x\in\mathbb{R}^d\ ; |x-a| < \delta\} & (a\in\mathbb{R}^d \text{ のとき}), \\ (1/\delta, \infty] & (d = 1,\ a = \infty \text{ のとき}), \\ [-\infty, -1/\delta) & (d = 1,\ a = -\infty \text{ のとき}). \end{cases} \tag{4.4}$$

また、$B_k(\ell,\varepsilon)$ も同様。$B_d(a,\delta)$ は 「a に近い点」の集合を表し、a の**近傍**という。

注: 上記 (b) は “ δ-ε 論法” と呼ばれる極限の定義である。

証明: (a) $\Longrightarrow$ (b): 対偶を示す。(b) を否定すると、

$$\exists\varepsilon > 0,\ \ \forall\delta > 0,\ \ A_\delta \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in A \cap B_d(a,\delta)\ ;\ f(x) \notin B_k(\ell,\varepsilon)\} \neq \emptyset.$$

そこで $a_n \in A_{1/n}$ とすると $a_n \in B_d(a,1/n)$ より $a_n \to a$. 一方、$f(a_n) \notin B_k(\ell,\varepsilon)$ より $f(a_n) \not\to \ell$. よって (a) が否定された。

(a) $\Longleftarrow$ (b): $a_n \in A$, $a_n \to a$ とする。$\varepsilon > 0$ を任意とし、これに対し (b) の $\delta > 0$ を選ぶ。$a_n \to a$ より、有限個の n を除き $a_n \in B_d(a,\delta)$. すると (b) から、有限個の n を除き $f(a_n) \in B_k(\ell,\varepsilon)$. これは $f(a_n) \longrightarrow \ell$ を示す。 $\square$

収束点列は有界だった (命題 2.4.5)。関数の極限の場合、これに対応するのが次の事実である：

系 4.1.7 記号は 命題 4.1.6 の通りとする。$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^d$ のとき、次のような $\delta > 0$ が存在する：

$$\sup\{|f(x)|\ ;\ x \in A \cap B_d(a,\delta)\} < \infty.$$

証明：命題 4.1.6 の条件 (b) で $\varepsilon = 1$ とし、それに対する δ を選べば、

$$\{f(x)\ ;\ x \in A \cap B_d(a,\delta)\} \subset B_k(\ell,1).$$

$\square$

4.2 関数の連続性

区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された実数値連続関数は 定義 2.3.3 で定義した。次に、ベクトル値多変数関数の場合も含むように連続関数の概念を一般化する：

定義 4.2.1 (**関数の連続性**) $d, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $D \subset \mathbb{R}^d$, f は D を定義域に含み、$\mathbb{R}^k$ に値をとる関数とする（f が複素変数や複素数値の場合も、$d = 2$, $k = 2$ の場合として含む)。

• $a \in D$ に対し

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = f(a). \tag{4.5}$$

なら、f は 点 a で **連続** (continuous) と言う。(4.5) は

$$D \text{ 内の点列 } (a_n) \text{ に対し、} a_n \to a \text{ なら } f(a_n) \to f(a).$$

と言い換えることができる (定義 4.1.1 参照)。

• f が 全ての $a \in D$ で連続なら f は D で**連続**という[22]。特に D のとり方が了解ずみの場合は、単に**連続**とも言う。

• D 含む定義域を持つ $\mathbb{R}^k$-値関数で D 上連続なもの全体の集合を $C(D)$, あるいはより正確に、$C(D \to \mathbb{R}^k)$ と記す。

例 4.2.2 $\{\exp, \mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,, \cos, \sin\} \subset C(\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ （(3.5), 命題 3.2.1, 命題 3.2.2）.

[22]「D 上で連続」とも言う。

例 4.2.3 記号は 定義 4.2.1 通りとする。関数 f に対し、次のような $L \in [0,\infty)$, $\alpha \in (0,1]$ が存在するとき、$f \in C(D)$.

$$\text{全ての } x, y \in D \text{ に対し } |f(x) - f(y)| \le L|x-y|^\alpha.$$

このような f を **ヘルダー連続** (特に $\alpha = 1$ のときは **リプシッツ連続**) であると言う[23]。

証明： $x, a \in D$, $x \to a$ なら $|x-a| \to 0$. よって、$|x-a|^\alpha \to 0$ (例 4.1.2). 従って、挟み撃ちの原理より $|f(x) - f(a)| \to 0$. □

問 4.2.1 記号は 定義 4.2.1 の通りとする。次の条件は同値であることを示せ。(a):$f \in C(D \to \mathbb{R}^k)$. (b): 任意の $a \in D$ に対し $f \in C(D \cap B_d(a,\delta) \to \mathbb{R}^k)$ をみたす $\delta > 0$ が存在する。

問 4.2.2 $q : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ が以下の条件 (1)–(3) を満たすとき、q を**ノルム**と言う：
(1) $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $q(cx) = |c|q(x)$.
(2) $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対し $q(x+y) \le q(x) + q(y)$.
(3) $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
条件 (1), (2) から、$q \in C(\mathbb{R}^d)$ を示せ。

問 4.2.3 $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。任意の $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $f(tx) = t^\alpha f(x)$ であるとき、f はα **次同次**という。α 次同次関数 f に対し以下を示せ：(i) $\alpha > 0$ かつ $\sup_{|x|=1} |f(x)| < \infty$ なら、f は原点で連続である。(ii) $\alpha = 0$ かつ f が定数でない、或いは$\alpha < 0$ かつ $f \not\equiv 0$ なら、$\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない (従って f は $x = 0$ で不連続)。

問 4.2.4 $n_1, .., n_d \in \mathbb{N}$, $r > 0$ とし、$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d}/|x|^r$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ と定める。f は $n_1 + ... + n_d > r$ なら連続、$n_1 + ... + n_d \le r$ なら不連続 ($x = 0$ が唯一の不連続点) であることを示せ。

問 4.2.5 ($\star$) $x \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ に応じて $f(x) = 1, 0$ と定めるとき、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 全ての点で不連続であることを示せ。

命題 4.2.4 $D \subset \mathbb{R}^d$ とする。

(a) 関数 f_1, f_2 が、$a \in D$ で連続と仮定する。このとき、$f_1 + f_2$ は $a \in D$ で連続。また、f_1, f_2 が複素数値なら $f_1 f_2$, f_1/f_2 も $a \in D$ で連続。但し f_1/f_2 については $f_2(a) \neq 0$ を仮定する。

(b) (**合成関数の連続性**) $a \in D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $g : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ とする。このとき、f が a で連続、かつ g が $f(a)$ で連続なら $g \circ f$ は a で連続。

証明: (a) は 命題 4.1.3, (b) は 命題 4.1.4 に帰着する。 □

---

[23] Otto Hölder (1859–1937), Rudoluf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903)

例 4.2.5 (**複素多変数有理式**)

• $n_1, .., n_d \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$ とする。次の形に表せる関数 $m : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ を **単項式** (monomial) と呼ぶ：

$$m(x) = cx_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d}.$$

更に、単項式の有限和で表される関数を **多項式** (polynomial) と呼ぶ。

• 多項式 p_1, p_2 に対し $D = \{x \in \mathbb{C}^d \; ; \; p_2(x) \neq 0\}$ を定義域とする関数 $r(x) = p_1(x)/p_2(x)$ を**有理式** (rational function) と呼ぶ。このとき、$r \in C(D \to \mathbb{C})$.

証明: $x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{C}$ に対し $x \mapsto x_i$ の連続性は明らか。次に 命題 4.2.4(a) を繰り返し用いることにより、多項式、有理式の連続性を得る。 □

例 4.2.6 (**巾級数の連続性**) $r > 0$, $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, また、全ての $x \in D \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{C} \; ; \; |x| < r\}$ に対し、級数:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は絶対収束するとする。このとき、

(a) $0 < s < r$, $p \in \mathbb{N}$ なら $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^p |a_n| s^n < \infty$. **(b)** $f \in C(D \to \mathbb{C})$.

証明：(a): $s < t < r$ となる t をとる。このとき、$\lim_n n^p (s/t)^n = 0$ （巾級数の収束判定法：例 2.5.8）. よって有限個の n を除き、$n^p (s/t)^n \leq 1$, 従って $n^p |a_n| s^n \leq |a_n| t^n$. この評価と非負項級数の比較 (命題 2.5.4) より結論を得る。

(b): $a \in D$ を任意とし、$|a| < s < r$ を満たす s をとる。$|x - a| < s - |a|$ とすると $|x| < s$. よって

$$(*) \qquad |x^n - a^n| \stackrel{\text{問 } 2.4.4}{\leq} ns^{n-1}|x - a|.$$

故に、

$$|f(x) - f(a)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n - a^n) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x^n - a^n| \stackrel{(*)}{\leq} |x - a| \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| s^{n-1}}_{\text{(a) より有限}}.$$

上式より f は a で連続。 □

問 4.2.6 $x \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $x \to 0$ とする。巾級数の連続性（例 4.2.6）と exp, sin, cos の巾級数表示を用い、以下の関数の極限を求めよ：$(e^x - 1)/x$, $\sin x/x$, $(1 - \cos x)/x^2$.

4.3 片側極限・片側連続性

$-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}^k$ とする。$x \to c \in (a, b)$ における $f(x)$ の極限を考える際、x が c の左側から近づく場合（左極限）と、右側から近づく場合（右極限）それぞれを個別に見る考え方を述べる。後に扱う左微分、右微分もこの考え方に基づく。

定義 4.3.1 （**片側極限・片側連続性**）$-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}^k$ とする。

• $a < c \leq b$ に対し極限

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x)$$

が存在するとき、極限を c **での左極限** (left limit) と呼び、$f(c-)$ と記す。特に $c = b$ の場合、$f(c-)$ と $\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} f(x)$ は同一概念である。

• $a \leq c < b$ に対し極限

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x)$$

が存在するとき、極限を c **での右極限** (right limit) と呼び、$f(c+)$ と記す。特に $c = a$ の場合、$f(c+)$ と $\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} f(x)$ は同一概念である。

• $a < c \leq b$ かつ $f(c-) = f(c)$ ならば f は c で **左連続** (left continuous) と言う。特に $c = b$ の場合、c における連続性と左連続性は同一概念である。

• $a \leq c < b$ かつ $f(c+) = f(c)$ ならば f は c で **右連続** (right continuous) と言う。特に $c = a$ の場合、c における連続性と右連続性は同一概念である。

• $A \subset (a, b)$ について f が 全ての点 $c \in A$ で左（右）連続なら f は A **で 左（右）連続**という。定義域 (a, b) 全体で左（右）連続な関数は単に**左（右）連続** とも言う。

例 4.3.2 (**単調関数は片側極限を持つ**) 記号は 定義 4.3.1 の通りで、特に $k = 1$ とする。

(a) $a < c \leq b$ のとき、$f(c-) = \begin{cases} \sup_{a<x<c} f(x), & f \text{ が単調増加なら}, \\ \inf_{a<x<c} f(x), & f \text{ が単調減少なら}. \end{cases}$

(b) $a \leq c < b$ のとき、$f(c+) = \begin{cases} \inf_{c<x<b} f(x), & f \text{ が単調増加なら}, \\ \sup_{c<x<b} f(x), & f \text{ が単調減少なら}. \end{cases}$

証明： 問 2.3.2 に帰着する。 □

例 4.3.3 $c \in \mathbb{R}$ とする。このとき、$1_{(c,\infty)}$ は全ての点で左連続だが、点 c では右連続でない。また、$1_{[c,\infty)}$ は全ての点で右連続だが、点 c では左連続でない。

問 4.3.1 $g_n(x) \geq 0$ $(n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1))$ は x について非減少かつ、全ての x に対し $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ が収束するとする。$f(1-) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(1-)$ (両辺が ∞ でもよい) を示せ。

命題 4.3.4 (**極限と片側極限の関係**) 記号は 定義 4.3.1 の通りとする。$c \in (a, b)$, $\ell \in \mathbb{R}^k$ に対し、

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} f(x) = \ell \iff \begin{cases} f(c+) = f(c-) = \ell, & (a < c < b \text{ なら}) \\ f(c+) = \ell, & (c = a \text{ なら}) \\ f(c-) = \ell, & (c = b \text{ なら}) \end{cases}$$

また、上記の同値性は $k = 1$, $\ell = \pm\infty$ の場合でも成立する。

証明: $\Longrightarrow$: 定義から明らか。
$\Longleftarrow$: $c = a, b$ の場合は 定義 4.3.1 で注意した。そこで $c, x_n \in (a, b)$,$x_n \neq c$, $x_n \to c$ と仮定して、$\lim_n f(x_n) = \ell$ を言えばよい。$K_1, K_2 \subset \mathbb{N}$ を

$$K_1 = \{n \in \mathbb{N}\,;\ x_n < c\},\ \ K_2 = \{n \in \mathbb{N}\,;\ x_n > c\}$$

と定める。また、$K_i = \{k_i(0) < k_i(1) < ...\}$ とする。仮定より K_1 が無限集合なら $\lim_n f(x_{k_1(n)}) = f(c-) = \ell$, K_2 が無限集合なら $\lim_n f(x_{k_2(n)}) = f(c+) = \ell$. よって部分列による収束判定 I(問 2.1.4) より、$\lim_n f(x_n) = \ell$. □

系 4.3.5 (**連続と片側連続の関係**) 記号は 定義 4.3.1 の通りとする。$c \in (a, b)$ に対し、

$$f \text{ は } c \text{ で連続} \iff \begin{cases} f(c+) = f(c-) = f(c), & (a < c < b \text{ なら}) \\ f(c+) = f(c), & (c = a \text{ なら}) \\ f(c-) = f(c), & (c = b \text{ なら}) \end{cases}$$

証明: 極限と片側極限の関係 (命題 4.3.4) で $\ell = f(c)$ の場合である。 □

5　微分 I

曲線に接線をひく問題は、古くから考えられていた。例えばアルキメデスは、紀元前 3 世紀に螺旋（現代風に書くと $f(t) = t(\cos t, \sin t)$, $t \geq 0$) の接線を求めている。17 世紀になると、デカルトやフェルマー達により、接線・法線を一般にどう定義するか？が盛んに議論された[24]。特にフェルマーは $y = f(x)$ の接線の傾きを (y の変動)/(x の変動) において x の変動が 0 に近づくときの値と捉え、その考えを極値（点）を求める問題にも応用した。フェルマーの考え方は、現代の微分法に近く、後にニュートンにも影響を与えた[25]。ライプニッツは (y の微小変動)/(x の微小変動) 書き表す為に dy/dx という記号を用いた[26]。 また、ニュートンは、同じものを $\dot{y}$ と記した。これらの記号は現在でも微分係数や導関数の記号として受け継がれている。

5.1　一変数関数の微分

定義 5.1.1 (**一変数関数の微分**) $I \subset \mathbb{R}$ を区間、$f : I \to \mathbb{R}^k$ とする ($f : I \to \mathbb{C}$ の場合も $k = 2$ として含む)。

• $x \in I$ で次の極限 $f'(x)$ が存在すれば、その極限を x での**微 (分) 係数** (differential coefficient) と呼ぶ：

$$f'(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x, y \in I}} D_{x,y}(f), \quad \text{但し} \quad D_{x,y}(f) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \tag{5.1}$$

この際、$k = 1$ なら $f'(x) = \pm\infty$ も許すことにする。$f'(x)$ を次のように記すこともある：

$$(f(x))', \quad \frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{df}{dx}(x).$$

• 極限 $f'(x) \in \mathbb{R}^k$ (ここでは、$k = 1, f'(x) = \pm\infty$ の場合は除く！) が存在すれば f は x で**可微分** (differentiable) と言う。

• f が全ての $x \in I$ で可微分なら、関数 $x \mapsto f'(x)$ が定義され、これを f の **導関数** (derivative) と呼ぶ。微 (分) 係数、あるいは導関数を求めることを、**微分**するという。

定義 5.1.1 の $f'(x)$ は、幾何的には、グラフ上の点 $(x, f(x))$ における接線の勾配を表わす。また、x を「時刻」を表す変数と解釈すると、$f'(x)$ は動点 $f(x)$ の時刻 x における速度ベクトルを表わす。

例 5.1.2 (**単項式・対数関数の微分**) (i) $p \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ なら $(x^p)' = px^{p-1}$. (ii) $x \in (0, \infty)$ なら $(\log x)' = 1/x$.

証明: (i): $y \neq x$, $y \to x$ とすると $\displaystyle\frac{x^p - y^p}{x - y} \overset{\text{問 1.1.2}}{=} \sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \to px^{p-1}$.
(ii):$x, y \in (0, \infty)$, $y \neq x$ なら $\log x - \log y$ の評価 (命題 3.3.1) より

$$\frac{1}{x} \wedge \frac{1}{y} \leq \frac{\log x - \log y}{x - y} \leq \frac{1}{x} \vee \frac{1}{y}.$$

上式で $y \longrightarrow x$ とすると、(右辺) $\longrightarrow \frac{1}{x}$, (左辺) $\longrightarrow \frac{1}{x}$. □

[24] René Descartes (1596–1650), Pierre de Fermat (1601–1665)
[25] Issac Newton (1642–1727)
[26] Gottfried Leibniz(1646–1716)

例 5.1.3 (**可微分でない関数の例**)

(a) グラフに角がある場合: $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分不可能。実際、$y > 0$, $y < 0$ に応じて $D_{0,y}(f) = 1, -1$. よって極限 $f'(0)$ は存在しない。

(b) 微分が発散する場合: $f(x) = x^p$, $0 < p < 1$ は $x = 0$ で微分不可能。実際、$y > 0$ として $D_{0,y}(f) = \frac{y^p}{y} = y^{p-1} \longrightarrow \infty, \quad (y \longrightarrow 0)$.

命題 5.1.4 (**可微分点は連続点**) $I \subset \mathbb{R}$ は区間、$f : I \to \mathbb{R}^k$ が $x \in I$ で可微分なら、f は x で連続である。

証明: $I \backslash \{x\} \ni y \to x$ で $D_{x,y}(f)$ は収束するので $f(y) - f(x) = D_{x,y}(f)(y - x) \to 0$. □

命題 5.1.5 $I \subset \mathbb{R}$ は区間、$f, g : I \to \mathbb{R}^k$ が $x \in I$ で可微分とする。

(a) (**和の微分**) $f + g$ は $x \in I$ で可微分でかつ $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(b) (**積の微分**) $f, g : I \to \mathbb{C}$ なら fg は $x \in I$ で可微分かつ

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(c) (**商の微分**) $f, g : I \to \mathbb{C}$, $g(x) \neq 0$ なら f/g は x で可微分かつ

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

証明: (a),(b):$y \to x$ とするとき、

$$\begin{aligned} D_{x,y}(f + g) &= D_{x,y}(f) + D_{x,y}(g) \longrightarrow f'(x) + g'(x), \\ D_{x,y}(fg) &\overset{\text{簡単な計算}}{=} g(y)D_{x,y}(f) + f(x)D_{x,y}(g) \longrightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

(c):$g(x) \neq 0$ かつ g は x で連続（命題 5.1.4）なので、$y \to x$ とする際、$g(y) \neq 0$ を仮定してよい。すると、

$$D_{x,y}(1/g) \overset{\text{簡単な計算}}{=} -\frac{D_{x,y}(g)}{g(x)g(y)} \longrightarrow -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

となり $f \equiv 1$ の場合が判る。これと（b）から $f/g = f\frac{1}{g}$ に対する結果を得る。 □

問 5.1.1 $I \subset \mathbb{R}$ は区間、$f, g : I \to \mathbb{R}^k$ が $x \in I$ で可微分とする。次を示せ。$f \cdot g$ は $x \in I$ で可微分で、$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, 但し $\cdot$ は内積を表す。

問 5.1.2 $I \subset \mathbb{R}$ は区間、$f_i : I \to \mathbb{C}$ $(i = 1, .., n)$ が $x \in I$ で可微分とする。以下を示せ：
(i) 積 $f = f_1 \cdots f_n$ も $x \in I$ で可微分かつ x において $f' = \sum_{i=1}^n f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n$.
(ii) $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ を多項式、$f = p(f_1, ..., f_n)$ とするとき、f も $x \in I$ で可微分、また f' は多項式 $q : \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}$ を用い $f' = q(f_1, ..., f_n, f_1', ..., f_n')$ と表すことが出来る。

次に偏微分の概念を導入する：

定義 5.1.6 (**偏微分**) $D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \to \mathbb{R}$ とする。点 $x \in D$ の座標のうち $x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_d$ を固定し i 座標のみ動かして得られる実一変数関数

$$t \mapsto f(x_1, .., x_{i-1}, t, x_{i+1}, .., x_d)$$

が、$t \in (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ に対し定義されると仮定する（$\varepsilon > 0$)。この関数を微分することを f を x_i について**偏微分**すると言う。この関数が $t = x_i$ で可微分なら f は x において x_i について **偏微分可能**といい、微分係数を**偏微分係数**という。偏微分係数は

$$\partial_i f(x), \ \ \partial_{x_i} f(x), \ \ \frac{\partial}{\partial x_i} f(x), \ \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

等の記号で表す。全ての $x \in D$ で $\partial_i f(x)$ が存在するとき、関数 $\partial_i f : x \mapsto \partial_i f(x)$ を x_i についての **偏導関数**と言う。

例 5.1.7 (**巾級数は可微分**) $r \in (0, \infty]$, $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, また、全ての $z \in D \stackrel{\text{def.}}{=} \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < r\}$ に対し、級数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

は絶対収束するとする。このとき、 $z \in D$ に対し

(1) $f'(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\substack{w \to z \\ w \neq z}} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ (級数は絶対収束).

上の極限を**複素微分**という。また、$z = x + \mathbf{i}y$ $(x, y \in \mathbb{R}\ )$ と書くとき、$z \in D$ の範囲で、$f(z)$ は x, y についてそれぞれ可微分で、

(2) $\partial_x f(z) = (1/\mathbf{i}) \partial_y f(z) = f'(z)$. 最初の等式を**コーシー・リーマンの等式**という。

証明： $z \in D$ とし、$|z| < s < r$ となる s をとる。$w \to z$ のとき、$|w| < s$ としてよい。このとき、問 2.4.4 より

(∗) $|w^n - z^n - n z^{n-1}(z - w)| \leq \frac{1}{2} n(n-1)(z-w)^2 s^{n-2}$.

従って、$w \neq z$ なら

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1} \right) \right| \stackrel{(*)}{\leq} |w - z| \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)|a_n| s^{n-2}}_{\text{例 4.2.6 より有限}}.$$

以上より、(1) を得る。(1) で $z = x + \mathbf{i}y$ の y を固定し x だけを変数と考えると $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = f'(z)$ を得る。また、x を固定し y だけを変数と考えると $\frac{1}{\mathbf{i}} \frac{\partial f}{\partial y}(z) = f'(z)$ を得る。 □

例 5.1.8 （**指数・双曲・三角関数の微分**）$x \in \mathbb{R}$ とする。(i) $c \in \mathbb{C}$ なら $(e^{cx})' = c e^{cx}$. (ii) $a \in (0, \infty)$ なら $(a^x)' = a^x \log a$. (iii) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$.

証明: (i):巾級数表示 $e^{cx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n x^n}{n!}$ に 例 5.1.7 の結果を用い、

$$(e^{cx})' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n x^{n-1}}{(n-1)!} = c \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n x^n}{n!}}_{= e^{cx}}.$$

(ii): (i) で $c = \log a$ とする。
(iii): ch , sh , cos, sin を exp で書き表す定義式（命題 3.2.1, 命題 3.2.2）と (i), 命題 5.1.5 による。 $\square$

注： 例 5.1.8 では、簡単のために実変数関数として微分したが、複素変数関数として複素微分（例 5.1.7）しても同じ式が成り立つ。

問 5.1.3 $a \in (0,\infty)$,$x \in \mathbb{R}$ なら $(a^x)' = a^x \log a$ (例 5.1.8). これを、命題 3.4.1 で述べた $a^x - a^y$ の評価から導け。

問 5.1.4 $(\star)$ 複素正方行列 X の指数関数 $\exp(X)$（問 3.1.7）に対し以下を示せ：(i) $t \in \mathbb{R}$ に対し $\frac{d}{dt}\exp(tX) = X\exp(tX)$. (ii)$X = Y \iff \forall t \in \mathbb{R}$ に対し $\exp(tX) = \exp(tY)$.

命題 5.1.9 (**微分可能性の言い替え**) $I \subset \mathbb{R}$ は区間、$f : I \to \mathbb{R}^k$, $\ell \in \mathbb{R}^k$ ($k = 1$, $\ell = \pm\infty$ は含めない), $x \in I$ とする。次の (a),(b) は同値である：**(a)** f が x で可微分かつ $f'(x) = \ell$ **(b)** 次のような $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^k$ が存在する：

$$\text{全ての } y \in I \text{ に対し } f(y) - f(x) = \ell(y - x) + \varphi(y). \tag{5.2}$$

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x, y \in I}} \varphi(y)/|y - x| = 0. \tag{5.3}$$

証明: (a) $\Longrightarrow$ (b): $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を (5.2) が成立するように定義する、即ち：

$$\varphi(y) = f(y) - f(x) - \ell(y - x)$$

この φ に対し条件 (a) より (5.3) が成立。よって (b) が示せた。
(a) $\Longleftarrow$ (b): 条件 (b) が成り立つなら

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x, y \in I}} D_{x,y}(f) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x, y \in I}} \left(\ell + \frac{\varphi(y)}{y - x}\right) = \ell,$$

となり、(a) が成立。 $\square$

命題 5.1.10 (**連鎖律**) $J \subset \mathbb{R}$ は区間、$x \in J$, $J \xrightarrow{g} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k$ とする。このとき、g が x で可微分かつ f が $g(x)$ で可微分なら、$f \circ g$ は x で可微分かつ

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

証明: 仮定及び 命題 5.1.9 より $\varphi_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^k$ が存在し

(1) $\forall y \in J$, $g(y) - g(x) = g'(x)(y - x) + \varphi_1(y)$, $\displaystyle\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x, y \in J}} \varphi_1(y)/|y - x| = 0$.

(2) $\forall z \in I$, $f(z) - f(g(x)) = f'(g(x))(z - g(x)) + \varphi_2(z)$, $\displaystyle\lim_{\substack{y \to x \\ z \neq g(x), z \in I}} \varphi_2(z)/|z - g(x)| = 0$.

実は次が成立する：

(3) $\displaystyle\lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x, y \in J}} \varphi_2(g(y))/|y - x| = 0$.

(3) の証明はひとまず後回しにし、(3) を用い、命題を示す：

$$\begin{aligned} f(g(y))-f(g(x)) &\overset{(2)}{=} f'(g(x))(g(y)-g(x))+\varphi_2(g(y)) \\ &\overset{(1)}{=} f'(g(x))g'(x)(y-x)+\underbrace{f'(g(x))\varphi_1(y)+\varphi_2(g(y))}_{\varphi(y)\text{ と置く。}} \end{aligned}$$

更に、(1), (3) から

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\neq x, y\in J}} \varphi(y)/(y-x)=0.$$

以上と命題 5.1.9 より結論を得る。
以下、(3) を示す。$x_n \in J\backslash\{x\}$, $x_n \to x$ として

(4) $\lim_n \varphi_2(g(x_n))/|x_n-x|=0.$

を言えばよい。$g(x_n)=g(x)$ なら $\varphi_2(g(x_n))=\varphi_2(g(x))=0$. よって、(4) を示す際には $g(x_n)\neq g(x)$ となる n だけで考えてよい。g は x で連続だから $\lim_n g(x_n)=g(x)$. よって $n\to\infty$ とするとき、

$$\frac{|\varphi_2(g(x_n))|}{|x_n-x|}=\underbrace{\frac{|\varphi_2(g(x_n))|}{|g(x_n)-g(x)|}}_{(2)\text{ より }\to 0}\underbrace{\frac{|g(x_n)-g(x)|}{|x_n-x|}}_{(1)\text{ より 有界}}\longrightarrow 0.$$

以上より (4) が示せた。 □

例 5.1.11 (**巾関数の微分**) $x>0$,$c\in\mathbb{C}$ に対し $(x^c)'=cx^{c-1}$.

証明：$x^c=e^{c\log x}=f\circ g(x)$, 但し $f(y)=e^{cy}$, $g(x)=\log x$. よって

$$(x^c)' \overset{\text{連鎖律}}{=} f'(g(x))\,g'(x) \overset{\text{例 5.1.8}}{=} ce^{c\log x}\frac{1}{x}=cx^{c-1}.$$

□

問 5.1.5 $g: I\to(0,\infty)$ が $x\in I$ で可微分なら、$\log g$ も x で可微分であること、および $(\log g)'(x)=g'(x)/g(x)$ を示せ。

問 5.1.6 次の $f_j: I\to\mathbb{R}$ $(j=1,2)$ の導関数を求めよ：(i) $I=\mathbb{R}$, $f_1(x)=\sin^m x$, $f_2(x)=\sin^m x^n$ $(m,n\in\mathbb{N}\backslash\{0\})$. (ii) $I=(0,\infty)$, $f_1(x)=x^x$, $f_2(x)=x^{x^x}$.

問 5.1.7 $I\subset\mathbb{R}$ は区間、$f: I\to\mathbb{R}^k$ が $x\in I$ で可微分、$f(x)\neq 0$ とする。$(\frac{1}{|f(x)|})'$, $(f(x)\frac{1}{|f(x)|})'$ を $f(x)$ と $f'(x)$ を用いて表せ。

5.2 高階微分

定義 5.2.1 (**高階微分**) $I\subset\mathbb{R}$ を区間、$f: I\to\mathbb{R}^k$ とする ($f: I\to\mathbb{C}$ の場合も $k=2$ として含む)。

• f が全ての $x\in I$ で可微分なら、f は I **で可微分**と言う。I で可微分な $f: I\to\mathbb{R}^k$ 全体の集合を $D^1(I)$, あるいは、より正確に $D^1(I\to\mathbb{R}^k)$ と記す。

• $f\in D^1(I)$ かつ $f'\in D^1(I)$ なら、更に $(f')'$ が定義される (区間 I が 端点を含むなら、それらの端点でも定義される；定義 5.1.1 参照)。$(f')'$ を f'' 或は $f^{(2)}$ と記し、**2 階導**

関数 (second derivative) と呼ぶ。以下、f が何回まで微分可能か、に応じて m **階導関数** (m-th derivative) $f^{(m)}$, $m = 1, 2, ..,$ が定義される。また、便宜上、$f^{(0)} = f$ とする。$f^{(m)}(x)$ を次のように記すこともある：

$$(f(x))^{(m)}, \quad \frac{d^m}{dx^m}f(x), \quad \frac{d^m f}{dx^m}(x), \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^m (x). \tag{5.4}$$

• $m \in \mathbb{N}$ に対し、

$D^m(I)$ は I の各点で m 回微分できる関数全体の集合

$C^m(I)$ は $f \in D^m(I)$ かつ $f^{(0)}, ..., f^{(m)} \in C(I)$ を満たす関数 f 全体の集合

とする[27]。特に、$D^0(I)$ は 関数 $f : I \to \mathbb{R}^k$ の全体、$C^0(I) = C(I)$ である (定義 4.2.1 参照)。また、可微分関数の連続性（命題 5.1.4）から、

$$D^{m+1}(I) \subset C^m(I) \subset D^m(I).$$

• $f \in D^{m-1}(I)$ が $x \in I$ で可微分なとき、微分係数 $(f^{(m-1)})'(x)$ も $f^{(m)}(x)$, あるいは (5.4) と同じ記号で表す。

例 5.2.2 f が実 1 変数の多項式なら、 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. 実際、例 5.1.2 と和の微分（命題 5.1.5）より $f \in D^1(\mathbb{R})$ かつ f' も実 1 変数の多項式。従って、帰納法により $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

問 5.2.1 以下の $f : I \to \mathbb{C}$ に対し $f \in C^\infty(I)$ を示せ: (i) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$, $\sin x$ $(a > 0)$. (ii) $I = (0, \infty)$, $f(x) = \log x, x^c$ $(c \in \mathbb{C})$.

命題 5.2.3 $f, g \in D^m(I)$ とする。

(a) (**和の高階微分**) $f + g \in D^m(I)$ で、$(f + g)^{(m)} = f^{(m)} + g^{(m)}$.

(b) (**積の高階微分**) $f, g : I \to \mathbb{C}$ なら $fg \in D^m(I)$ で、

$$(fg)^{(m)} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} f^{(r)} g^{(m-r)}, \quad (\textbf{ライプニッツの公式}). \tag{5.5}$$

(c) (**商の高階微分可能性**) $f, g : I \to \mathbb{C}$ かつ全ての $x \in I$ で $g(x) \neq 0$ なら $f/g \in D^m(I)$.

(d) 更に $f, g \in C^m(I)$ を仮定すれば、上記 (a),(b),(c) でそれぞれ、$f + g \in C^m(I)$, $fg \in C^m(I)$, $f/g \in C^m(I)$.

証明: (a):和の微分 (命題 5.1.5) を繰り返し適用する。
(b):m についての帰納法による。$m = 0$ なら示すべきことはない。今、$m \geq 1$ とし、$m - 1$ まで示されたとする：

(1) $(fg)^{(m-1)} = \displaystyle\sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} f^{(r)} g^{(m-1-r)}$.

$0 \leq r \leq m - 1$ に対し $f^{(r)}, g^{(r)} \in D^1(I)$ なので命題 5.1.5 より (1) の右辺は可微分で

[27] $C^m(I)$ は一般的認知度が高い記号。$D^m(I)$ はこの講義の中だけの記号だが、便利なので使用する。

(2) $(fg)^{(m)} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m-1}{r} (f^{(r+1)} g^{(m-1-r)} + f^{(r)} g^{(m-r)}).$

二項係数についての関係式

(3) $\binom{m-1}{r-1} + \binom{m-1}{r} = \binom{m}{r}$ （問 2.4.5）

に注意して、

$$(2)\ 右辺 \stackrel{簡単な書き換え}{=} f^{(0)} g^{(m)} + \sum_{r=1}^{m} \left\{ \binom{m-1}{r-1} + \binom{m-1}{r} \right\} f^{(r)} g^{(m-r)} \stackrel{(3)}{=} (5.5)\ 右辺.$$

(c): 仮定、結論を A_m, B_m と書き、「$A_m \Rightarrow B_m$」 を m についての帰納法で示す。命題 5.1.5 より $A_1 \Rightarrow B_1$. そこで、$m \geq 2$ とし、A_m 及び 「$A_{m-1} \Rightarrow B_{m-1}$」を仮定する。$A_m \Rightarrow A_{m-1} \Rightarrow B_{m-1}$ より $f/g \in D^{m-1}(I) \subset D^1(I)$. 更に

$$(f/g)' \stackrel{命題\ 5.1.5}{=} \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad f'g - fg', g^2 \stackrel{(b)}{\in} D^{m-1}(I).$$

よって $A_{m-1} \Rightarrow B_{m-1}$ を $f'g - fg'$, g^2 に適用して $(f/g)' \in D^{m-1}(I)$. これは $f/g \in D^m(I)$ を意味する。

(d): (a),(b),(c) の証明から判る。 □

問 5.2.2 $(\star)$ $2n$ 次多項式 $q_n(x) = (x^2-1)^n$ に対しその m 階微分 $q_n^{(m)}$ を考える。以下を示せ：(i) $(x^2-1)q_n^{(1)}(x) = 2nxq_n(x)$. (ii) $(x^2-1)q_n^{(n+2)}(x) + 2xq_n^{(n+1)}(x) - n(n+1)q_n^{(n)}(x) = 0$. なお、$n$ 次多項式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} q_n^{(n)}(x)$ を**ルジャンドル多項式** と呼ぶ。上記 (ii) はルジャンドルの微分方程式：$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$ を示している。

問 5.2.3 $(\star)$ $H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2/2)$, $\quad x \in \mathbb{R}$, $\quad n = 0, 1, 2...$ とする。以下を示せ：(i) $H_n(x)$ は n 次多項式 (**エルミート多項式**[28]) で、x^n の係数は 1. (ii)$H_n'(x) = xH_n(x) - H_{n+1}(x) = nH_{n-1}(x)$ ヒント：最初の等式は単純計算。第 2 の等式は帰納法で示せる。(iii) $H_n''(x) - xH_n'(x) = -nH_n(x)$.

問 5.2.4 $(\star)$ エルミート多項式 $H_n(x)$ (問 5.2.3) が n 個の相異なる零点を持つことを帰納法で示そう。$H_1(x) = x$ なので $n = 1$ に対しては正しい。そこで、 $H_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - c_j)$, $(c_1 < ... < c_n)$ と仮定する。以下の (i)–(iii) を示し、証明を完成せよ。(i) $(-1)^{n-j} H_n'(c_j) > 0$, $j = 1, 2, .., n$. (ii) $H_{n+1}(c_j)$ は、 $n - j$ が偶数なら正、$n - j$ が偶数なら負である。ヒント：問 5.2.3 より $H_n'(x) = xH_n(x) - H_{n+1}(x)$. (iii)$H_{n+1}(x)$ は $n + 1$ 個の相異なる零点を持つ。ヒント：中間値定理。

命題 5.2.4 (**合成関数の高階微分可能性**) $I, J \subset \mathbb{R}$ は区間、$J \xrightarrow{g} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k$ とするとき、**(a)** $g \in D^m(J \to \mathbb{R})$, $f \in D^m(I \to \mathbb{R}^k)$ なら $f \circ g \in D^m(J \to \mathbb{R}^k)$. **(b)** $g \in C^m(J \to \mathbb{R})$, $f \in C^m(I \to \mathbb{R}^k)$ なら $f \circ g \in C^m(J \to \mathbb{R}^k)$.

証明: (a):m についての帰納法による。$m = 0$ なら示すべきことはない。そこで $m \geq 1$ とし、$m - 1$ までの結果を仮定する。連鎖律（命題 5.1.10）より

[28]Charles Hermite (1822–1901)

(1) $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

$f' \in D^{m-1}(I \to \mathbb{R}^k)$ なので帰納法の仮定から $f' \circ g \in D^{m-1}(J \to \mathbb{R}^k)$. また、$g' \in D^{m-1}(I \to \mathbb{R})$. 以上と (1) より $(f \circ g)' \in D^{m-1}(J \to \mathbb{R}^k)$, 即ち $f \circ g \in D^m(J \to \mathbb{R}^k)$.
(b): (a) と同様。但し $m = 0$ に対する証明で合成関数の連続性（命題 4.2.4(b)）を用いる。 □

例 5.2.5 (**巾級数は無限回可微分**) $r \in (0, \infty]$, $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, また、全ての $z \in D \stackrel{\mathrm{def.}}{=} \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < r\}$ に対し、級数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

は絶対収束するとする。$f(z)$ は $z \in D$ について任意回複素微分可能。また、m 回目の複素微分 $f^{(m)}(z)$ について

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n z^{n-m} \quad (\text{右辺は絶対収束}). \tag{5.6}$$

特に、

$$f^{(m)}(0) = m!a_m. \tag{5.7}$$

また、$z = x + \mathbf{i}y$ $(x, y \in \mathbb{R}$) と書くとき、$z \in D$ の範囲で、$f(z)$ は x, y についてそれぞれ C^∞ で、$m = 0, 1, 2, ..$ に対し

$$(\partial_x)^m f(z) = (1/\mathbf{i})^m (\partial_y)^m f(z) = f^{(m)}(z).$$

但し、上式で $(\partial_x)^m$, $(\partial_y)^m$ はそれぞれは x, y についての m 階微分を表す。

証明：例 5.1.7 より $f(z)$ は z について複素微分可能かつ $z \in D$ なら

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad (\text{右辺は絶対収束}).$$

従って、$f'(z)$ を表す級数も $z \in D$ に対し絶対収束する (例 4.2.6)。よって帰納的に $f(z)$ $(z \in D)$ は任意回繰り返し複素微分可能で、(5.6) が成立。 更に (5.6) で $z = 0$ とすれば (5.7) を得る。特に y を固定して x だけ動かせば、x についての微分に対する結果が分かる。y についての微分も同様。 □

問 5.2.5 $r > 0$, $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, また、全ての $z \in D \stackrel{\mathrm{def.}}{=} \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < r\}$ に対し、級数: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ は共に絶対収束するとする。$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m f(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m g(0)$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ なら、D 上 $f = g$ であることを示せ。

問 5.2.6 $a, b, c, z \in \mathbb{C}$, $-c \notin \mathbb{N}$, $|z| < 1$ とするとき、

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)} z^n$$

は絶対収束し、$z(1-z)F'' + (c - (a+b+1)z)F' - abF = 0$ を満たすことを示せ、但し F', F'' は z の実部についての微分を表す。$F(z)$ を**超幾何級数**という。

5.3 片側微分

微分の幾何的な意味は、関数 f のグラフ上の一点 $(c, f(c))$ での接線を求めることであるが、左（右）微分とは、$x < c$ （$x > c$）での $f(x)$ の値だけを用いて $(c, f(c))$ での接線を求めることである。

定義 5.3.1 (**片側微分**) $-\infty \le a < b < \infty$, $(a,b) \subset I \subset [a,b] \cap \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}^k$ とする ($f : I \to \mathbb{C}$ の場合も $k = 2$ として含む) とする。

• $x \in I \backslash \{a\}$ で次の極限 $f'_-(x)$ が存在すれば、その極限を x での**左微分係数** (left differential coefficient) と呼ぶ：

$$f'_-(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y<x, y \in I}} D_{x,y}(f), \quad 但し \quad D_{x,y}(f) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

$k = 1$ なら、$f'_-(x) = \pm\infty$ も許すことにする。また、$f'_-(x)$ を次のように記すこともある：

$$(f(x))'_-, \quad \left(\frac{d}{dx}\right)_- f(x).$$

極限 $f'_-(x) \in \mathbb{R}^k$ が存在すれば f は x で**左可微分** (left differentiable) と言う (ここでは、$k = 1$ で $f'_-(x) = \pm\infty$ となる場合は除く！)。

• $x \in I \backslash \{b\}$ で次の極限 $f'_+(x)$ が存在すれば、その極限を x での**右微分係数** (right differential coefficient) と呼ぶ：

$$f'_+(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y>x, y \in I}} D_{x,y}(f)$$

$k = 1$ なら、$f'_+(x) = \pm\infty$ も許すことにする。また、$f'_+(x)$ を次のように記すこともある：

$$(f(x))'_+, \quad \left(\frac{d}{dx}\right)_+ f(x).$$

極限 $f'_+(x) \in \mathbb{R}^k$ が存在すれば f は x で**右可微分** (right differentiable) と言う (ここでは、$k = 1$ で $f'_+(x) = \pm\infty$ となる場合は除く！)。

命題 5.3.2 (**微分と片側微分の関係**) 記号は 定義 5.3.1 の通り、$c \in (a,b)$, $\ell \in \mathbb{R}^k$ とする。このとき、次の (a),(b) は同値である：**(a)** $f'_\pm(c)$ が共に存在し、$= \ell$ **(b)** $f'(c)$ が存在し、$= \ell$.

証明: $x \in (a,b) \backslash \{c\}$ に対し、$F(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ とおく。F の c における、極限、右極限、左極限がそれぞれ $f'(c)$, $f'_+(c)$, $f'_-(c)$. よって極限と片側極限の関係 (命題 4.3.4) より結論を得る。 □

注：$f'_\pm(c)$ が共に存在しても、それらが等しくなければ $f'(c)$ は存在しない。例えば $f(x) = |x|$ について、$f'_\pm(0) = \pm 1$ だが、f は $x = 0$ で可微分でない (例 5.1.3)。

問 5.3.1 記号は 定義 5.3.1 の通り、$c \in I$ とするとき、以下を示せ：(i) f が $c(\neq a)$ で左可微分なら f は c で左連続。(ii) f が $c(\neq b)$ で右可微分なら f は c で右連続

微分と片側微分の関係 (命題 5.3.2) は次のような例に応用できる：

例 5.3.3 $f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x), & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$ と定めるとき、$f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

証明：(a):$m \in \mathbb{N}$ を任意とする。次の事実が証明の鍵になる：

(1) 多項式 p_m が存在し、$\forall x > 0$ に対し $f^{(m)}(x) = p_m(1/x)f(x)$.

(1) の証明は難しくないので問（問 5.3.2）とする。次に

(2) $f \in D^m(\mathbb{R})$, $f^{(m)}(0) = 0$.

を示す。m は任意だから、(2) が言えれば証明が終る。(2) を m に関する帰納法で示す。$m = 0$ なら示すべきことはない。そこで $m-1$ まで正しいとすると、$f^{(m-1)}(0) = 0$. 更に、$x < 0$ なら $f^{(m-1)}(x) = 0$ だから

$$(f^{(m-1)})'_-(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f^{(m-1)}(x)}{x} = 0.$$

また、

$$\begin{aligned} (f^{(m-1)})'_+(0) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f^{(m-1)}(x)}{x} \stackrel{(2)}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (1/x)p_{m-1}(1/x)\exp(-1/x) \\ &= \lim_{y \to \infty} yp_{m-1}(y)\exp(-y) = 0. \end{aligned}$$

以上と 命題 5.3.2 より $f^{(m)}(0)$ が存在し、$= 0$. これで、(2) が言えた。 □

問 5.3.2 例 5.3.3 証明中の (1) を示せ。

問 5.3.3 例 5.3.3 の $f(x)$ は $x \in (-r, r)$ $(r > 0)$ に対し絶対収束する巾級数で 例 5.2.5 のように表示することは出来るか？理由と共に答えよ。

問 5.3.4 $0 < r < R < \infty$ とする。次のような $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d \to [0,1])$ の存在を示せ：$g(x) = 1 \iff |x| \leq r$ かつ $g(x) = 0 \iff |x| \geq R$.

問 5.3.5 $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $x \geq 0$, $x < 0$ に応じ、$f_p(x) = x^p, 0$ とする。$f_p \in C^{p-1}(\mathbb{R})$, $f_p \notin D^p(\mathbb{R})$ を示せ。

5.4 平均値定理

ある関数について微分法によって得られる情報のうち、今までに述べたものは、滑らかさ等の局所的な（ある点の、小さな近傍に関する）情報だった。次に述べる平均値定理により、微分法から関数についての大局的な情報（例えば、ある区間における増減）を引き出せる。その意味で、微分法は平均値定理があればこそ威力を発揮すると言っても過言ではない。従って平均値定理は微積分学の中で最重要定理の一つである。

定理 5.4.1 (**平均値定理**) $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続かつ (a,b) 上で可微分とするとき、次を満たす $c \in (a,b)$ が存在する：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{5.8}$$

特に $f(a) = f(b)$ なら $f'(c) = 0$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在する (この場合を **ロルの定理** と呼ぶ[29]) 。

平均値定理（定理 5.4.1）は、「$c \in (a,b)$ を適当に選べば、$(c, f(c))$ における f の接線と、２点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を結ぶ線分（弦）が平行になる」ことを意味し、絵を描いてみれば「そうならざるを得ない」と納得できる。しかし、厳密な証明には少し準備が必要である。まずは、極大・極小の概念を一般的に定義する。

定義 5.4.2 （**極大・極小**）$c \in D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \to \mathbb{R}$ とする。

• 次を満たす $\varepsilon > 0$ が存在するとき、c, $f(c)$ をそれぞれ f の**極大点**, **極大値**と言う：

$$f(c) = \max_{B(c,\varepsilon)\cap D} f, \quad \text{但し} \ \ B(c,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ |x-c| < \varepsilon\}.$$

同様に、$f(c) = \min_{B(c,\varepsilon)\cap D} f$ を満たす $\varepsilon > 0$ が存在するとき、c, $f(c)$ を f の**極小点**, **極小値**と言う。

• 極大点, 極小点を総称し、f の**極値点**、極大値, 極小値を総称し、f の**極値**と呼ぶ。

注： 定義 5.4.2 で、c が f の最大点（即ち $f(c) = \max_D f$）なら c は f の極大点でもある。同様に、c が f の最小点（即ち $f(c) = \min_D f$）なら c は f の極小点でもある。

命題 5.4.3 （**極値点における微分**）$-\infty \le a < b \le \infty$, $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ は f の極値点、かつ f が c で可微分なら $f'(c) = 0$.

証明: 例えば c が f の極小値、$x < c < y$ なら、$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0 \le \frac{f(y)-f(c)}{y-c}$. $x \to c$, $y \to c$ とすれば、$f'(c) = 0$. c が f の極大値でも同様である。 □

問 5.4.1 ($\star$) 次を示せ：$-\infty \le a < b \le \infty$, $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ は f の極値点、かつ f が c で左可微分かつ右可微分なら $f'_+(c) f'_-(c) \le 0$.

定理 5.4.1 は次の定理を用いて示す：

定理 5.4.4 (**最大・最小値存在定理 I**) $-\infty < a < b < \infty$, $f \in C([a,b] \to \mathbb{R})$ なら $\min_{[a,b]} f$, $\max_{[a,b]} f$ が存在する。

定理 5.4.4 は 5.5 節で、より一般的な形 (定理 5.5.5) で証明することにし、ここでは、結果だけ先取りすることにする。

定理 5.4.1 の証明: $\ell = (f(b) - f(a))/(b-a)$, $F(x) = f(x) - \ell x$ として、$\exists c \in (a,b)$, $F'(c) = 0$ を言えばよい。$F \in C([a,b])$ なので最大・最小値存在定理 I（定理 5.4.4）より $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$, $F(c_1) = \max_{[a,b]} F$, $F(c_2) = \min_{[a,b]} F$.

[29] Michel Rolle (1652–1719)

$F(c_1) = F(c_2)$ なら、F は定数。従って全ての $c \in (a,b)$ が $F'(c) = 0$ を満たす。
$F(c_1) > F(c_2)$ なら、

$$F(b) - F(a) = f(b) - f(a) - \ell(b-a) = 0, \ \text{よって}\ \{c_1, c_2\} \not\subset \{a,b\}.$$

そこで $c \in \{c_1, c_2\} \backslash \{a,b\}$ とすれば $c \in (a,b)$. しかも c は F の最大点または最小点なので F の極値である。よって $F'(c) = 0$ (極値点における微分:命題 5.4.3). □

例 5.4.5 **(a)** $-\infty < a < b < \infty$, $f \in D^1([a,b])$, f' は $[a,b]$ 上非減少なら、

$$f'(a)(b-a) \le f(b) - f(a) \le f'(b)(b-a).$$

なお、命題 3.1.3, 命題 3.3.1 の「差の評価」は上の不等式の特別な場合である。

(b) $0 < a < b$ とするとき、

$$\begin{array}{ll} x \in [1,\infty) \text{ なら} & xa^{x-1}(b-a) \le b^x - a^x \le xb^{x-1}(b-a), \\ x \in (-\infty,1] \text{ なら} & |x|b^{x-1}(b-a) \le |b^x - a^x| \le |x|a^{x-1}(b-a). \end{array}$$

この不等式は (3.8) より精密であり、微分法の威力が発揮されている。

証明：(a): $D^1([a,b]) \subset C([a,b]) \cap D^1((a,b))$ だから、平均値定理より (5.8) を満たす c が存在する。一方、仮定より $f'(a) \le f'(c) \le f'(b)$.
(b): $f(y) = y^x$ ($x \in \mathbb{R}$, $y > 0$) に対し $f'(y) = xy^{x-1}$. よって平均値定理より、次を満たす $c \in (a,b)$ が存在する：$|b^x - a^x| = |x|c^{x-1}(b-a)$. $x \in [1,\infty)$, $x \in (-\infty,1]$ に応じて $y \mapsto y^{x-1}$ は非減少、非増加。よって所期不等式を得る。 □

問 5.4.2 $c_0, c_1, .., c_n \in \mathbb{R}$ が $c_0 + \frac{c_1}{2} + .. + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$ とするとき、方程式 $c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n = 0$ は 区間 $(0,1)$ 内に解を持つことを、定理 5.4.1 を用いて示せ。

問 5.4.3 $f \in D^1((0,\infty))$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = c \in \overline{\mathbb{R}}$ のとき $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1) - f(x)) = c$ を示せ。

問 5.4.4 ($\star$) $2n$ 次多項式 $q_n(x) = (x^2-1)^n$ に対しその m 階微分 $q_n^{(m)}$ を考える。以下を示せ：(i) $0 \le m \le n-1$ なら $q_n^{(m)}(-1) = q_n^{(m)}(1) = 0$. (ii) $1 \le m \le n$ なら $q_n^{(m)}$ は区間 $(-1,1)$ 内に m 個の相異なる零点を持つ。これよりルジャンドル多項式 P_n （問 5.2.2）が、区間 $(-1,1)$ 内に n 個の相異なる零点を持つことが判る。

問 5.4.5 ($\star$) $-\infty < a < b < \infty$, $f, g \in C([a,b]) \cap D^1((a,b))$, とし、更に以下を仮定する。(a):全ての $x \in (a,b)$ で $|f'(x)| + |g'(x)| > 0$. (b): $g(b) \ne g(a)$. このとき、次を満たす $c \in (a,b)$ が存在すること **(コーシーの平均値定理)** を示せ：$g'(c) \ne 0$ かつ $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

問 5.4.6 ($\star$) $-\infty \le a < b \le \infty$, $c \in [a,b]$, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$. 更に、$x \ne c$ なら $g(x) \ne 0$ とする。このとき、$\lim\limits_{\substack{x\to c \\ x\ne c}} f'(x)/g'(x)$ が存在すれば、$\lim\limits_{\substack{x\to c \\ x\ne c}} f(x)/g(x)$ も存在し、両者は等しいこと（**ロピタルの定理**[30]）を示せ。

[30] Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661–1704)

定理 5.4.6 (**微分による増減判定**) $-\infty \le a < b \le \infty$, $(a,b) \subset I \subset [a,b] \cap \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(I) \cap D^1((a,b))$ とする。このとき、以下が成立する。

(a) f が I 上単調増加 $\iff$ (a,b) 上 $f' \ge 0$.

(b) f が I 上単調減少 $\iff$ (a,b) 上 $f' \le 0$.

(c) f が I 上定数 $\iff$ (a,b) 上 $f' = 0$.

更に次の条件を考える：

(∗) $a < s < t < b$ なら (s,t) 上 $f' \not\equiv 0$.

このとき、以下が成立する。

(a2) f が I 上で狭義単調増加 $\iff$ (a,b) 上 $f' \ge 0$ かつ条件 $(*)$ が成立。

(b2) f が I 上で狭義単調減少 $\iff$ (a,b) 上 $f' \le 0$ かつ条件 $(*)$ が成立。

証明: (a) の $\Longrightarrow$：f が I 上単調増加、$a < s < t < b$ なら $\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \ge 0$. $t \to s$ として $f'(s) \ge 0$. 故に (a,b) 上 $f' \ge 0$.
(a) の $\Longleftarrow$：$f \in C(I)$ より、$a \in I$ なら $f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$, $b \in I$ なら $f(b) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$. 従って、

(1) f が I 上で (狭義) 単調増加 $\iff$ f が (a,b) 上で (狭義) 単調増加.

一方、$f \in D^1((a,b))$ なら $f \in C([s,t]) \cap D^1((s,t))$ なので平均値定理（定理 5.4.1）より

(2) $a < s < t < b$ なら $\exists c \in (s,t)$, $\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'(c)$.

今、(a,b) 上 $f' \ge 0$ なら、(2) より f は (a,b) 上単調増加。よって (1) より結論を得る。
(b): $-f$ を考えれば (a) に帰着する。
(c): (a), (b) の帰結。
(a2) の $\Longrightarrow$：(a) より (a,b) 上 $f' \ge 0$. 更に狭義単調増加性より

$$a < s < t < b \text{ なら } f(t) - f(s) > 0.$$

従って (2) の $c \in (s,t)$ に対し $f'(c) > 0$ となり条件 $(*)$ が満たされる。
(a2) の $\Longleftarrow$： (1) より f が (a,b) 上狭義単調増加であることを示せばよい。そのため $a < s < t < b$ とする。(a) より、f は区間 $[s,t]$ 上単調増加。更に、条件 $(*)$ と (c) より f は区間 $[a,b]$ 上定数ではない。故に $f(a) < f(b)$.
(b2): $-f$ を考えれば (a2) に帰着。 □

注：定理 5.4.6 で f は実数値だが、(c) に関しては f が $\mathbb{R}^k$ $(k \ge 2)$ や $\mathbb{C}$ に値をとる場合も正しい。これは、成分（実部・虚部）に分けて考えれば明らかである。

問 5.4.7 時刻 0 で、原点 $0 \in \mathbb{R}^d$ に単位熱源を置く。この熱が空間 $\mathbb{R}^d$ に伝播するとき、$x \in \mathbb{R}^d$ の時刻 $t > 0$ での温度は $h_t(x) = ct^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$ で与えられる（$c > 0$ は定数)。$x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ における温度は時間の経過と共にどう変化するか？

問 5.4.8 $I \subset \mathbb{R}$ は開区間、$\varepsilon > 0$ とする。I 上の実数値関数 f, g が 全ての $x, y \in I$ に対し $|f(x) - f(y)| \le g(x)|x - y|^{1+\varepsilon}$ をみたすなら、f は定数であることを示せ。

問 5.4.9 $I \subset \mathbb{R}$ を定理 5.4.6 と同様の区間、$u, F, G \in C(I) \cap D^1((a,b))$ とする。このとき、次の (a),(b) が同値であることを示せ：**(a)** (a,b) 上で $u' = F'u + G'e^F$. **(b)** I 上で $u = e^F(G+c)$ (c は定数).

問 5.4.10 ($\star$) $u \in C^n(\mathbb{R})$ 及び多項式 $P(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j = \prod_{j=1}^{r}(x - b_k)^{m_k}$ ($a_j, b_k \in \mathbb{C}$, $m_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $b_1, .., b_k$ は相異なる, $\sum_{k=1}^{r} m_k = n$) に対し次の (a),(b) が同値であることを示せ：**(a)** $P(D)u \stackrel{\text{def.}}{=} u^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j u^{(j)} = 0$. **(b)** u は n 個の関数 $x^j e^{b_k x}$ ($1 \le k \le r$, $0 \le j \le m_k - 1$) の線形和。

問 5.4.11 ($\star$) 以下、$a, b, c, ... \in \mathbb{R}^3$ とし、**ベクトル積** $a \times b \in \mathbb{R}^3$ を次のように定める：$a \times b = (a_2b_3 - b_2a_3, a_3b_1 - b_3a_1, a_1b_2 - b_1a_2,)$. 以下を示せ：(i) $b \times a = -a \times b$, 特に $a \times a = 0$. (ii) $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ (ベクトル積は結合法則を満たさない！). (iii) $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a)$, 特に $(a \times b) \cdot a = (a \times b) \cdot b = 0$. (iv) $(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$, 特に $|(a \times b)|^2 = |a||b| - (a \cdot b)^2$. (iv) $f, g \in D^1(I \to \mathbb{R}^3)$ なら、$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

問 5.4.12 ($\star$) $x : t \mapsto x(t)$ は $C^2([0,\infty) \to \mathbb{R}^3)$ に属し、$x = 0$ となることはなく、常に $x'' = -\frac{k}{|x|^3}x$ とする ($k \neq 0$)。以下を示せ：(i) $a = x \times x'$ は定ベクトル、$a \cdot x = a \cdot x' = 0$. (ii) $b = \frac{1}{k}x' \times a - \frac{1}{|x|}x$ は定ベクトル、$a \cdot b = 0$. (iii) $|a|^2 = k(x \cdot b + |x|)$. (iv) $c = a \times b$, また x の b, c 方向の座標成分を X, Y とするとき、$k^2(1 - |b|^2)X^2 + k^2Y^2 - 2|a|^2|b|X = |a|^4$.

問 5.4.12 で、x の満たす微分方程式は、原点に固定された質点と x の間に働く逆 2 乗力（$k > 0$ なら引力、$k < 0$ なら斥力）を表す。$a/2$ は x の**面積速度**を表し、(ii) より定ベクトルである。これは、ケプラーの第一法則に他ならない。(iv) の曲線は $k > 0$ のとき、$|b| < 1$, $|b| = 1$, $|b| > 1$ に応じて楕円、放物線、双曲線である（$k < 0$ のとき、(ii) と $|x \cdot b| \le |x||b|$ より $|b| < 1$ はあり得ない）。$k > 0$ の場合の楕円軌道は、太陽から引力を受けた惑星、あるいは周期彗星の軌道を表す（ケプラーの第 2 法則）。また、$k > 0$ の場合の放物線、双曲線は非周期彗星の軌道を表す。一方、$k < 0$ の場合の軌道は、原子に入射された陽電子が、原子核からの斥力を受けて散乱される時の軌道を表す。

ドイツの天文学者ケプラーは デンマークの天文学者ティコ・ブラーエの惑星観察の記録をもとに、上に述べたケプラーの法則を見いだした[31]。イギリスの数学者、物理学者、天文学者、ニュートンはケプラーの法則から太陽と惑星間に逆 2 乗力が働くことを導いた（問 5.4.12 の逆）。ニュートンはここから更に推論を進め、「任意の 2 質点間に距離の 2 乗に反比例する引力が働く」 という万有引力の発見に至った–林檎の木を眺めていただけで突然閃いたわけではない。

例 5.4.7 $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $x > 0 \vee (-c)$ なら $x \mapsto \left(1 + \frac{c}{x}\right)^x$ は狭義単調増加である。

証明：$f(x) = x \log\left(1 + \frac{c}{x}\right)$ に対し $\left(1 + \frac{c}{x}\right)^x = e^{f(x)}$. 従って、$f$ が狭義単調増加ならよい。次の不等式が成立する：

[31] Johannes Kepler (1571–1630), Tycho Brache (1546–1601)

$(*)$ $x > 0 \vee (-c)$ なら $\log\left(1+\dfrac{c}{x}\right) > \dfrac{c}{x+c}$.

$(*)$ は $c > 0$ と $c < 0$ の場合に分けて対数の差の評価 (命題 3.3.1) を適用すれば得られる（問 5.4.13)。今、

$$f'(x) = \log\left(1+\frac{c}{x}\right) + x\frac{1}{1+\frac{c}{x}}\left(-\frac{c}{x^2}\right) \overset{(*)}{=} \log\left(1+\frac{c}{x}\right) - \frac{c}{x+c} > 0$$

以上と微分による増減判定（ 定理 5.4.6） より f は狭義単調増加。 □

問 5.4.13 例 5.4.7 証明中 $(*)$ を示せ。

問 5.4.14 $c \in \mathbb{R}$ に対し $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x = e^c$ を示せ。

例 5.4.8 ($\log(\mathbf{1}+\mathbf{x})$ **の巾級数**) $x \in (-1, 1]$ なら $\displaystyle\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

証明： $x = 1$ に対する証明は別の機会に譲り、 $x \in (-1, 1)$ の場合を示す。$x \in (-1, 1)$ に対し 示すべき等式の右辺は絶対収束するので、これを $f(x)$ とおく。このとき 例 5.2.5 より $f \in C^\infty((-1, 1))$ かつ

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x} = (\log(1+x))'.$$

従って、微分による増減判定（定理 5.4.6）より $f(x) - \log(1+x) = c$ (定数)。所が $c = f(0) - \log(1+0) = 0$. □

5.5 ボルツァーノ・ワイエルシュトラス の定理と最大・最小値存在定理

ここでは、ボルツァーノ・ワイエルシュトラス の定理（定理 5.5.4）を通じ「コンパクト」という概念を導入する。また、定理 5.5.4 から、連続関数に関する最大・最小値存在定理 (定理 5.5.5) を導く。

定義 5.5.1 (**閉集合**) $A \subset \mathbb{R}^d$ とする。 A が、A 内の点列の極限になりうる点を全て含むとき、A は **閉** (closed) であると言う。

例 5.5.2 (**多次元区間**) 区間 $I_1, ..., I_d \subset \mathbb{R}$ の直積：

$$I = I_1 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d.$$

を $\mathbb{R}^d$ の**区間** (interval) と呼ぶ。特に $I_1, ..., I_d$ が全て閉（開）区間なら I を**閉（開）区間**と呼ぶ。

問 5.5.1 例 5.5.2 で、閉区間は閉集合であることを示せ。

問 5.5.2 $(\star)$ $A \subset \mathbb{R}^d$ とする。 A 内の点列の極限になりうる点 $x \in \mathbb{R}^d$ を A の**触点** (adherent point) と呼ぶ。また、A の触点全体の集合を $\overline{A}$ と記し、A の**閉包** (closure) と呼ぶ。$A, B \subset \mathbb{R}^d$ に対し以下を示せ：(i) $\overline{A}$ は閉。(ii)$A \subset B$ なら $\overline{A} \subset \overline{B}$. (iii)$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. また、$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ となる例を挙げよ。(iv) A, B が閉なら、$A \cup B$, $A \cap B$ も閉。

問 5.5.3 ($\star$) $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ について次の条件 (a)–(c) は同値であることを示せ：(a) $f \in C(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k)$. (b) $F \subset \mathbb{R}^k$ が閉なら $f^{-1}(F) \subset \mathbb{R}^d$ は閉。(c) $G \subset \mathbb{R}^k$ が開なら $f^{-1}(G) \subset \mathbb{R}^d$ は開。

定義 5.5.3 (**部分列**) (a_n) を $\mathbb{R}^d$ の点列とする。自然数列 $\ell(0) < \ell(1) < ...$ を用いて $(a_{\ell(n)})$ と表される点列を (a_n) の**部分列** (subsequence) と言う。

次の定理の中で「コンパクト」という概念を述べる。コンパクト集合上の連続関数が持つ性質（最大・最小値存在や一様連続性）は微分積分学において大変有用な道具となる。

定理 5.5.4 (**ボルツァーノ・ワイエルシュトラス**) $A \subset \mathbb{R}^d$ とする。以下の条件 (a), (b) について、A の有界性は (a) と同値、また、A が有界かつ閉であることは (b) は同値である。

(a) A 内の任意の点列が収束部分列を持つ (その極限は A の点でなくてもよい)。

(b) A 内の任意の点列が、 A の点に収束する部分列を持つ (このとき、A は**コンパクト**であると言う)。

注： 定理 5.5.4 より、$\mathbb{R}^d$ ではコンパクト性と「有界かつ閉」は同じで、両者を区別する必要はない。「コンパクト集合」とは、「有界閉集合」の別名で、特にコンパクト性を強調したいときに使うものと考えればよい。

定理 5.5.4 の証明： <u>有界 $\Rightarrow$ (a)</u>: A は有界だから十分大きな ℓ に対し $A \subset [-\ell, \ell]^d$. A の点列 $(x_k)_{k\geq 0}$ を任意に取り、収束部分列の存在を言う。

<u>$d=1$ の場合</u>: 区間 $[a_n, b_n] \subset [-\ell, \ell]$, $n = 0, 1, ...$ を以下のように定める：$[a_0, b_0] = [-\ell, \ell]$. 更に $c_n = (a_n + b_n)/2$ に対し

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, c_n], & x_k \in [a_n, c_n] \text{ となる } k \text{ が無限個あるとき}, \\ [c_n, b_n], & x_k \in [a_n, c_n] \text{ となる } k \text{ が有限個であるとき}. \end{cases}$$

こうすると、任意の n に対し $x_k \in [a_n, b_n]$ となる k が無限個存在するから、そのひとつを $k(n)$ と書く。このとき、

$$a_n \text{ は有界かつ } \nearrow, \quad b_n \text{ は有界かつ } \searrow, \quad b_n = a_n + 2^{-n+1}\ell.$$

従って、区間縮小法（系 2.3.2）より (a_n), (b_n) の極限は存在し等しい。更に、はさみうちの原理より $(x_{k(n)})$ は収束する。

<u>$d \geq 2$ の場合</u>: 次のようにして、$d=1$ の場合に帰着する。$(x_k)_{k\geq 0}$ の第 1 座標 $(x_{k,1})_{k\geq 0}$ に $d=1$ の結果を適用すれば、(x_k) の部分列 $(x_{k_1(n)})_{n\geq 1}$ であり、その第 1 座標 $(x_{k_1(n),1})_{n\geq 0}$ が収束するものの存在が分かる。次に $(x_{k_1(n)})_{n\geq 0}$ の第 2 座標 $(x_{k_1(n),2})_{n\geq 0}$ に $d=1$ の結果を適用すれば、$(x_{k_1(n)})_{n\geq 0}$ の部分列 $(x_{k_2(n)})_{n\geq 0}$ であり、その第 2 座標 $(x_{k_2(n),2})_{n\geq 0}$ が収束するものの存在が分かる。この際、$(x_{k_2(n)})_{n\geq 0}$ の第 1 座標 $(x_{k_2(n),1})_{n\geq 0}$ は収束数列 $(x_{k_1(n),1})_{n\geq 0}$ の部分列だから、これも収束する。従って 部分列 $(x_{k_2(n)})_{n\geq 0}$ は第 1、第 2 座標が共に収束する。このようにして、順次部分列を選ぶことにより、全ての座標が収束する部分列 $(x_{k_d(n)})_{n\geq 0}$ を得る。これが、所期のものである。

<u>(a) $\Rightarrow$ 有界</u>: 対偶を示す。A が非有界なら、任意の n に対し $n < |x_n|$ を満たす $x_n \in A$

が存在する。(x_n) の任意の部分列 $(x_{k(n)})$ は $k(n) \le |x_{k(n)}|$ をみたすから、収束しない。

有界かつ閉 $\Rightarrow$ (b): A が有界なら、(a) より、A 内の任意の点列が収束部分列を持つ。一方、A は閉だから、その極限は A の元である。

(b) $\Rightarrow$ 有界: (b) $\Rightarrow$ (a) による。

(b) $\Rightarrow$ 閉: $x_n \in A$ かつ $\lim_n x_n = x$ とする。(b) より (x_n) は $\lim_n x_{\ell(n)} \in A$ となる 部分列 $(x_{\ell(n)})$ を含む。一方、$(x_{\ell(n)})$ は (x_n) の部分列だから $\lim_n x_{\ell(n)} = x$ よって $x \in A$. 以上より A は閉である。 □

ボルツァーノ は 1817 年に発表した論文の中で定理 5.5.4 の原型を述べた。この仕事は半世紀もの間ほとんど知られていなかったが、1870 年頃にはドイツの数学者ワイエルシュトラスによる再証明を通じて重要性が認識され始めた[32]。

問 5.5.4 ($\star$) 任意の数列は、単調部分列を含むことを示せ。
ヒント：有界・非有界で場合分けし、前者には 定理 5.5.4 を用いよ。

問 5.5.5 ($\star$) $A \subset \mathbb{R}^d$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対し有限個の点 x_i $(i = 1, ..., N)$ が存在し、$A \subset \cup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon)$ となるとき、A は**全有界**であると言う (但し、$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d\ ;\ |y - x| < \varepsilon\}$.) 有界であることと全有界であることは同値であることを示せ。

問 5.5.6 $f \in C(\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k)$ に対し以下を示せ：(i) $F \subset \mathbb{R}^k$ が閉なら $f^{-1}(F) \subset \mathbb{R}^d$ は閉。(ii) $K \subset \mathbb{R}^d$ がコンパクトなら $f(K) \subset \mathbb{R}^k$ はコンパクト。

問 5.5.7 ($\star$) 次のような例を挙げよ：(i) $K \subset \mathbb{R}$ はコンパクト、$f \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, $f^{-1}(K)$ はコンパクトでない。(ii) $F \subset \mathbb{R}$ は閉、$f \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, $f(F)$ は閉でない。

問 5.5.8 $0 \le r \le R < \infty$ とするとき、以下を示せ：(i) $A_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ r \le |x| \le R\}$ はコンパクトである。特に $A_{0,R}$ は半径 R の球、$A_{R,R}$ は球面である。(ii) $\{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ r < |x| \le R\}$ はコンパクトでない。

問 5.5.9 $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^d$ に対し $K_1 + K_2 = \{x + y\ ;\ x \in K_1, y \in K_2\}$ とする。(i) K_1, K_2 が共にコンパクトなら $K_1 + K_2 = \{x + y\ ;\ x \in K_1, y \in K_2\}$ もコンパクトであることを示せ。(ii) ($\star$) $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^d$ が共に閉でも、$K_1 + K_2$ は閉と限らないことを例示せよ。

ボルツァーノ・ワイエルシュトラス の定理と問 5.5.1 より有界な閉区間はコンパクトである。従って、次の定理は最大・最小値存在定理 I（定理 5.4.4）の一般化である：

定理 5.5.5 (**最大・最小値存在定理 II**) $K \subset \mathbb{R}^d$ がコンパクト、$f \in C(K \to \mathbb{R})$ なら $\min_K f$, $\max_K f$ が共に存在する。

証明: $\max_K f$ の存在を示す（$\min_K f$ についても同様）。点列 $a_n \in K$, $n = 0, 1, 2, ...$ で $f(a_n) \longrightarrow \sup_K f$ なるものが存在する (問 2.2.3 で $A = f(K)$)。所がコンパクト性より (a_n) の部分列 $(a_{\ell(n)})$ で $a_{\ell(n)} \longrightarrow a \in K$ なるものが存在する。すると、

$$\sup_K f = \lim_n f(a_{\ell(n)}) \overset{f\text{ の連続性}}{=} f(a) \in f(K).$$

[32]Karl Weierstrass (1815—97). 歴史について次の文献を参考にした：Dugac, P: Elément d'analyse de Karl Weierstrass, Archive for History of Exact Sciences **10**, 1973, 41–176.

以上、および最大値と上限の関係（命題 1.3.3）より $\max_K f = f(a)$. □

ワイエルシュトラスは 1874 年にベルリンで行った講義で、最大・最小値存在定理 I（定理 5.4.4）を定理 5.5.4 の応用として述べている。定理 5.4.4、あるいはより一般に定理 5.5.5 を ワイエルシュトラスの定理と呼ぶこともある。

問 5.5.10 $T > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続かつ任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x+T) = f(x)$ とする。f は最大値及び最小値を持つことを示せ。

問 5.5.11 $f \in C(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R})$, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$ なら f は最小値を持つことを示せ。

問 5.5.12 $q : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ をノルム（問 4.2.2）とする。定数 $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ が存在し、$\forall x \in \mathbb{R}^d$ に対し、$c_1|x| \leq q(x) \leq c_2|x|$ となること示せ。ヒント：問 5.5.8 より $S = \{x \in \mathbb{R}^d \, ; \, |x| = 1\}$ はコンパクト。

6　初等関数 II

指数関数をはじめとする幾つかの初等関数を第 3 章で導入した。その続編として、本章では初等関数の基本性質を微分法を援用しつつ導いてゆく。

6.1　円周率と三角関数

円周率 $\pi = 3.14159...$ は幾何学的には (円周の長さ)/(直径) と定義され、これが円の大きさに依らない数であることは、既にユークリッドが「原論」の中で述べている。また、記号 π はオイラーが用いて以来普及した[33]。人類は長きにわたり、π の近似値を精密に求める為に様々な工夫を重ねてきた。現在では計算機により小数点以下 100 万桁までが計算される一方、π が無理数であること、更に、超越数であることも知られている[34]。

我々はここで改めて円周率を定義する。それは、次の命題を通じた解析的な流儀による。

命題 6.1.1 (**円周率と三角関数の増減**)

(a) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ を満たす実数 $\pi \in (0, 2\sqrt{3})$ が唯一つ存在する。この π を **円周率** と呼ぶ。

(b) $z \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\left(\cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right), \sin\left(z + \frac{n\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (\cos z, \sin z), & n = 4m, \\ (-\sin z, \cos z), & n = 4m+1, \\ -(\cos z, \sin z), & n = 4m+2, \\ (\sin z, -\cos z), & n = 4m+3. \end{cases} \tag{6.1}$$

特に、cos, sin は共に周期 2π を持つ：

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z.$$

(c) cos, sin の区間 $[0, 2\pi]$ での増減は次の表の通り。

x	0	↗	$\pi/2$	↗	π	↗	$3\pi/2$	↗	2π
$\cos x$	1	狭義 ↘	0	狭義 ↘	-1	狭義 ↗	0	狭義 ↗	1
$\sin x$	0	狭義 ↗	1	狭義 ↘	0	狭義 ↘	-1	狭義 ↗	0

特に $x \in \mathbb{R}$ なら

$$(\cos x, \sin x) = (1, 0) \iff x \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

証明： (a): 段階を経て示す。

(1) $(0, \sqrt{6})$ 上 $\sin > 0$.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}_{a_n \text{ と置く}} \overset{\text{命題 } 2.5.9}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}),$$

$$a_{2n} + a_{2n+1} = \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} = \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)}\right).$$

[33] 最初に用いたのは英国の数学者 William Jones (1675–1749) と言われている。

[34] 無理数であることは 1761 年、J. H. Lambert, 超越数であることは 1882 年、C. L. F. Lindeman による。

$x \in (0, \sqrt{6})$, $n \in \mathbb{N}$ なら

$$\frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} < \frac{6}{2 \cdot 3} = 1, \text{ 従って } a_{2n} + a_{2n+1} > 0.$$

以上より、$x \in (0, \sqrt{6})$ なら $\sin x > 0$.

(2) $\cos$ は $[0, \sqrt{6}]$ 上、狭義単調減少。

$(0, \sqrt{6})$ 上 $(\cos)' = -\sin < 0$. 故に微分による増減判定 (定理 5.4.6) から (2) を得る。

(3) $\cos 0 = 1$, $\cos \sqrt{3} < 0$.

$\cos 0 = 1$ は $\cos$ の定義から明らか。$\cos$ の巾級数展開より

$$1 - \cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!}}_{a_n \text{ とおく}} \overset{\text{命題 } 2.5.9}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n+1} + a_{2n+2})$$

$$a_{2n+1} + a_{2n+2} = \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!} = \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} \right)$$

所が、$|x| \le \sqrt{12}$ なら

$$\frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} \le \frac{12}{3 \cdot 4} = 1, \text{ 従って、} a_{2n+1} + a_{2n+2} \ge 0.$$

故に、$|x| \le \sqrt{12}$ なら

$$1 - \cos x \ge a_1 + a_2 = \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{12} \right) \quad \text{特に} \quad 1 - \cos \sqrt{3} \ge \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{8},$$

つまり $\cos \sqrt{3} \le -1/8 < 0$.

以上を用いて (a) を示す。(3), $\cos$ の連続性、及び中間値定理（定理 2.3.4）より $\exists c \in (0, \sqrt{3})$, $\cos c = 0$. 更に (2) よりこの c は唯一つ。以上より $2c$ が求めるもの。

(b): $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ かつ $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$. 一方、$0 < \pi/2 < \sqrt{3} < \sqrt{6}$ と (1) より $\sin \pi/2 > 0$. 従って、$\left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$. これと、加法定理 (問 3.2.2) より

$$\cos \left(z + \frac{\pi}{2} \right) = \cos z \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} - \sin z \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1}, \quad \sin \left(z + \frac{\pi}{2} \right) = \sin z \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} + \cos z \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1}.$$

これで $n = 1$ に対する (6.1) が分かった。また、z を $z - \frac{\pi}{2}$ でおきかえれば $n = -1$ に対する (6.1) を得る。更に $n = \pm 1$ に対する (6.1) を繰り返し用いて一般の $n \in \mathbb{Z}$ に対する (6.1) を得る。

(c): (6.1) より、$[0, \pi/2]$ 上の増減から $[\frac{m\pi}{2}, \frac{(m+1)\pi}{2}]$ $(m = 1, 2, 3)$ での増減も判る。そこで $[0, \pi/2]$ 上の増減を調べる。$\cos$ については (2) で既知。また、$(0, \pi/2)$ 上 $\sin' = \cos > 0$. 故に微分による増減判定 (定理 5.4.6) から $\sin$ は $[0, \pi/2]$ 上、狭義単調増加。 □

我々は正弦・余弦関数を、指数関数を用いて解析的に定義した（命題 3.2.2)。一方、正弦・余弦関数の幾何学的意味は、単位円周上の点の座標を、座標軸との角度 (=弧長) を変数とした関数として表すことである。次の命題により、これらふたつの考え方が融合される：

命題 6.1.2 (**円周の径数づけ**)

(a) $t, s \in \mathbb{R}$ に対し

$$e^{\mathbf{i}t} = e^{\mathbf{i}s} \iff t - s \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

(b) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し $t \mapsto e^{\mathbf{i}t}$ は $[c, c+2\pi)$ から $\mathbb{S}^1 \stackrel{\text{def.}}{=} \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\}$ への全単射。

証明：(a): $e^{\mathbf{i}t} = e^{\mathbf{i}s} \stackrel{\text{指数法則}}{\iff} e^{\mathbf{i}(t-s)} = 1 \stackrel{\text{命題 6.1.1}}{\iff} t - s \in 2\pi\mathbb{Z}$.
(b): $\varphi(t) = e^{\mathbf{i}t}$ ($t \in \mathbb{R}$) とする。示すべき事は「$e^{\mathbf{i}c}\varphi$ が $[0, 2\pi)$ から $\mathbb{S}^1$ への全単射」と言い替えられる。所が $z \mapsto e^{\mathbf{i}c}z$ は $\mathbb{S}^1$ から $\mathbb{S}^1$ への全単射。従って、$c = 0$ の場合を示せば十分。そこで以下、 $c = 0$ とする。このとき、単射性は (a) で既知だから全射性を言えばよい。また、命題 6.1.1 より $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ だから、結局次を言えばよい：

(1) $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$ は全射、つまり $\forall z \in \mathbb{S}^1, \exists c \in [0, 2\pi], \; z = e^{\mathbf{i}c}$.

$z \in \mathbb{S}^1$ に対し $\operatorname{Re} z \in [-1, 1]$. $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$, $\cos \pi = -1$ と中間値定理 (定理 2.3.4) より

$$\exists c_+ \in [0, \pi], \;\; \exists c_- \in [\pi, 2\pi], \;\; \cos c_+ = \cos c_- = \operatorname{Re} z.$$

このとき、命題 6.1.1 の増減表より $\sin c_+ \geq 0 \geq \sin c_-$. そこで $\operatorname{Im} z \geq 0$ のとき、

$$\operatorname{Im} z = \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 c_+} = \sin c_+.$$

従って

$$z = \operatorname{Re} z + \mathbf{i} \operatorname{Im} z = \cos c_+ + \mathbf{i} \sin c_+ = e^{\mathbf{i}c_+}.$$

$\operatorname{Im} z \leq 0$ のときも同様にして $z = e^{\mathbf{i}c_-}$. 以上で (1) が言えた。 □

実数値関数としての指数関数は $\mathbb{R}$ から $(0, \infty)$ への全単射だった（命題 3.1.3）。命題 6.1.2 を用いると、複素数値関数としての指数関数が帯状領域 $\mathbb{R} \times [c, c+2\pi)$ ($c \in \mathbb{R}$ は任意) から $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ への全単射であることが分かる：

系 6.1.3 **(a)** $z, w \in \mathbb{C}$ に対し

$$e^z = e^w \iff z - w \in 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}.$$

(b) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し $z \mapsto e^z$ は $\{z \in \mathbb{C} \; ; \; \operatorname{Im} z \in [c, c+2\pi)\}$ から $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ への全単射。

証明：(a) $e^z = e^w \stackrel{\text{指数法則}}{\iff} e^{z-w} = 1$. そこで、$z - w$ を改めて z と書くことにより $w = 0$ の場合に帰着する。
$\Longrightarrow$: $e^z = 1$ なら $e^{\operatorname{Re} z} \stackrel{\text{命題 3.4.1}}{=} |e^z| = 1$, よって $\operatorname{Re} z = 0$ （命題 3.1.3 より $x \mapsto e^x$ は $\mathbb{R}$ 上、全単射であることに注意). また $\operatorname{Re} z = 0$, $e^z = 1$ から、$e^{\mathbf{i} \operatorname{Im} z} = 1$. 故に命題 6.1.2(a) より $\operatorname{Im} z \in 2\pi\mathbb{Z}$. 以上より $z = \underbrace{\operatorname{Re} z}_{=0} + \mathbf{i} \operatorname{Im} z \in 2\mathbf{i}\pi\mathbb{Z}$.
$\Longleftarrow$：命題 6.1.2(a) による。
(b): 単射性は (a) による。全射性を示すため、$w \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ を任意とする。$w/|w| \in \mathbb{S}^1$ と命題 6.1.2 より $\exists t \in [c, c+2\pi)$, $w/|w| = e^{\mathbf{i}t}$. 従って、$w = |w| e^{\mathbf{i}t} = e^{\log |w| + \mathbf{i}t}$. □

問 6.1.1 (**双曲・三角関数の零点**) $z \in \mathbb{C}$ に対し以下を示せ:「$\mathrm{ch}\, z = 0 \iff z \in \frac{\pi \mathbf{i}}{2} + \pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$」,「$\cos z = 0 \iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$」,「$\mathrm{sh}\, z = 0 \iff z \in \pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$」,「$\sin z = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}$」.

問 6.1.2 $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ $(t \geq 0)$ とする。$0 < t < \pi$ を任意に固定するとき、以下を示せ:(i) $f(t) \in C_t \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x - (t,1)| = 1\}$. (ii) C_π と半直線 $\{x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1 \leq \pi, \ x_2 = 1 - \cos t\}$ の交点 $g(t)$ に対し $f'(t), f(\pi) - g(t)$ は平行である。

ガリレオ ガリレイは 問 6.1.2 の f を**サイクロイド**と名付けた[35]。円周 C_0 上にある原点 $(0,0)$ に印をつけ、C_0 を x_1 軸の正の方向へ速度 1 で転がすとき、その印の時刻 t での位置が $f(t)$ である。(ii) は、曲線上の点 $f(t)$ での接線の傾きを幾何学的に与える(1638 年、フェルマーによる発見)。サイクロイドは微積分学だけでなく、力学では最速降下曲線や等時曲線、また建築では橋梁の形として知られている。

問 6.1.3 $(\star)$ $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\omega = \exp(2\pi\mathbf{i}/p)$ とするとき、$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{np}}{(np)!} = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} \exp(\omega^j x)$ を示せ。ヒント:$\sum_{j=0}^{p-1} \omega^{nj}$ は n が p の倍数のとき $= p$, それ以外は $= 0$.

次の例は、複素関数論でよく知られた事実の初等的証明である。

例 6.1.4 $(\star)$ $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, g は $a \in \mathbb{C}$ で連続、$f(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$, $f(z) = f(a) + (z-a)^m g(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ とする。このとき a は $|f|$ の極値点でない。

証明: $f(a)/g(a) = re^{\mathbf{i}\theta}$, $(r > 0, \theta \in \mathbb{R})$ とする。まず a が $|f|$ の極小点でないことを示すため、$h = \delta^{1/m} e^{\mathbf{i}(\theta+\pi)/m}$ $(0 < \delta \leq r)$ とすると、

$$|\underbrace{f(a)}_{=g(a)re^{\mathbf{i}\theta}} + \underbrace{g(a)h^m}_{=-g(a)\delta e^{\mathbf{i}\theta}}| = |g(a)|(r - \delta) = |f(a)| - |g(a)h^m|.$$

また、仮定より δ が十分小さければ $|g(a+h) - g(a)| < |g(a)|$. よって

$$|f(a+h)| \leq \underbrace{|f(a) + g(a)h^m|}_{=|f(a)|-|g(a)h^m|} + \underbrace{|h^m(g(a+h) - g(a))|}_{<|g(a)h^m|} < |f(a)|.$$

δ を小さくとることにより $a + h$ はいくらでも a に近くとれるから、a は $|f|$ の極小点でない。a が $|f|$ の極大点でないことも同様に示すことができる(問 6.1.4)。 $\square$

問 6.1.4 $(\star)$ 例 6.1.4 で、a が $|f|$ の極大点でないことを示せ。

問 6.1.5 $(\star)$ 定数でない多項式 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対し $f(a) = 0$ となる $a \in \mathbb{C}$ が存在すること (**代数学の基本定理**) を示せ。ヒント:粗筋は次の通り。$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, よって $|f|$ はある $a \in \mathbb{C}$ で最小となる(問 5.5.11)。この a について例 6.1.4 を用い $f(a) = 0$.

命題 6.1.5 (**正接関数**) 次の関数 tan を **正接** (tangent) 関数と呼ぶ:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$$

(問 6.1.1 より上の z に対し $\cos z \neq 0$)。このとき、

(a) $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ 上 $\tan' = 1/\cos^2 > 0$. 特に tan は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上狭義単調増加。

[35] Galileo Galilei (1564–1642)

(b) $\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \tan x = \pm\infty$, (複合同順).

証明： (a):

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' \overset{\text{商の微分}}{=} \frac{\overbrace{\sin'}^{\cos} \cdot \cos - \sin \cdot \overbrace{\cos'}^{-\sin}}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

特に、 $\tan' > 0$ なので微分による増減判定（定理 5.4.6）より $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上狭義単調増加。
(b): 命題 6.1.1 の増減表による。 □

問 6.1.6 $x, y, x+y \in \mathbb{C}\backslash(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ のとき、$\tan x \tan y \neq 1$, $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ を示せ。

問 6.1.7 $a > 0$, $f(t) = e^{at}(\cos t, \sin t)$ $(t \in \mathbb{R})$ とする。$a = \tan\theta$ をみたす $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ に対し $\frac{f \cdot f'}{|f||f'|} \equiv \cos\theta$ を示せ。f は**対数螺旋**と呼ばれる曲線で、自然界には、オウム貝やアンモナイトの渦巻き模様として現れる。この問から、渦の中心 (原点) と渦上の点を結ぶ直線と、その点での接線が常に一定角 θ をなすことが分かる。

問 6.1.8 次の関数 th を **双曲正接** (hyperbolic tangent) 関数 と呼ぶ:

$$\mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\left(\frac{\pi\mathbf{i}}{2} + \pi\mathbf{i}\mathbb{Z}\right)$$

(問 6.1.1 より、上の z に対し $\mathrm{ch}\, z \neq 0$)。以下を示せ：(i) $x \in \mathbb{R}$ なら $(\mathrm{th}\, x)' = 1/\mathrm{ch}^{\,2} x$. 特に th は $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加。(ii) $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}\, x = \pm 1$, (複合同順).

問 6.1.9 次を示せ：$\frac{1}{\mathrm{th}\, z} = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}$, $\frac{1}{\mathrm{sh}\, z} = \frac{1}{\mathrm{th}\,(z/2)} - \frac{1}{\mathrm{th}\, z}$, $\mathrm{th}\, z = \frac{2}{\mathrm{th}\, 2z} - \frac{1}{\mathrm{th}\, z}$.

問 6.1.10 双曲正接関数 $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ に対しその逆関数 $\mathrm{th}^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ を考える。$y \in (-1, 1)$ に対し以下を示せ：(i) $\mathrm{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. (ii) $(\mathrm{th}^{-1})'(y) = \frac{1}{1-y^2}$. (iii) $|y| < 1$ なら $\mathrm{th}^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$.

問 6.1.11 $(\star)$ $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ を $e^r = 1 + 2r$ の解とする。問 3.3.5, 問 6.1.9 の結果を用い、以下を示せ[36]: (i) $0 < |z| < r$ に対し $\frac{1}{\mathrm{th}\, z} = \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n z^{2n-1}}{(2n)!}$. (ii) $0 < |z| < r$ に対し $\frac{1}{\mathrm{sh}\, z} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2^{2n-1} - 1) B_n z^{2n-1}}{(2n)!}$. (iii) $0 < |z| < r/2$ に対し $\mathrm{th}\, z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n z^{2n-1}}{(2n)!}$.
注： $\sin z = \frac{1}{\mathbf{i}}\mathrm{sh}\,(\mathbf{i}z)$, $\tan z = \frac{1}{\mathbf{i}}\mathrm{th}\,(\mathbf{i}z)$ から $\frac{1}{\tan}$, $\frac{1}{\sin}$, tan についても問 6.1.11 と同様の級数表示が得られる。

6.2 一般二項定理

$\alpha \in \mathbb{C}$,$n \in \mathbb{N}$ に対し (一般) 二項係数 $\binom{\alpha}{n}$ を次で定めた：$\binom{\alpha}{0} = 1$, また、$n \geq 1$ なら $\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)/n!$ （問 2.4.5 参照）.

命題 6.2.1 (**一般二項定理**) $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in (-1, 1)$ に対し $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ (絶対収束).

[36] 問 3.3.5 の脚注で述べた理由より、この問の式は r を 2π でおきかえても正しい。

証明：示すべき等式の右辺（$f(x)$ とおく）は絶対収束する（問 2.5.6 ）。以下、左辺（$g(x)$ とおく）との一致を言う。巾関数の微分（例 5.1.11） より

(1) $g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, 従って $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$.

また、

(2) $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$.

実際、

$$
\begin{aligned}
(1+x)f'(x) &\overset{\text{例 }\underline{5.1.7}}{=} (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} nx^{n-1} \overset{\text{簡単な}\underline{\text{書}}\text{き換え}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\binom{\alpha}{n+1}(n+1)+\binom{\alpha}{n}n\right\}x^n \\
&\overset{\text{問 }\underline{2.4.5}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha f(x).
\end{aligned}
$$

(1), (2) より $f'g = g'f$. これをを用い、$(-1,1)$ 上 $f = g$ を示す。$\forall z \in \mathbb{C}$ に対し $e^z \neq 0$ なので $g(x) = \exp(\alpha \log(1+x)) \neq 0$. 以上より $f/g \in D^1((-1,1))$ かつ

$$
\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = 0.
$$

従って $(-1,1)$ 上 $f/g = c$ (定数)。所が $c = (f/g)(0) = 1/1 = 1$. □

ニュートンは、遅くとも 1665 年には一般二項定理が α が有理数の場合に成立することを発見していた。しかし、ニュートンは右辺の収束は気にかけていなかったらしく、最初の何項かを具体的に書いた後、残りの（無限個の）項は “+etc.” と誤魔化して（?）いる。

問 6.2.1 $x \in (-1,1)$, $m \in \mathbb{N}$ に対し $\frac{1}{(1+x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m+n-1}{n}x^n$ (右辺は絶対収束) を示せ。

例 6.2.2 (**$(1+\mathbf{x})^{\pm 1/2}$ の巾級数**) $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ に対し、**2 重階乗** (double factorial) を次のように定める：

$$
(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1), \quad (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n).
$$

また、便宜上 $(-1)!! = 0!! = 1$ とする。$n \in \mathbb{N}$ とするとき、以下は容易に分かる：

$$
\begin{aligned}
a_n &\overset{\text{def.}}{=} (-1)^{n-1}\binom{1/2}{n} &= \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n-1}{n}, \quad n \geq 1, \\
b_n &\overset{\text{def.}}{=} (-1)^{n}\binom{-1/2}{n} &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 0.
\end{aligned}
$$

上記 (a_n), (b_n) と $x \in (-1,1)$ に対し一般二項定理（命題 6.2.1）より、

$$
\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n x^n, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n x^n.
$$

問 6.2.2 双曲正弦 $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ の逆関数 $\mathrm{sh}^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ について以下を示せ：
(i) $\mathrm{sh}^{-1}(y) = \log(y + \sqrt{1+y^2})$. (ii)$(\mathrm{sh}^{-1})'(y) = 1/\sqrt{1+y^2}$. (iii) $y \in (-1,1)$ なら $\mathrm{sh}^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$ (但し b_n は 例 6.2.2 と同じ）.

6.3 逆関数の微分

狭義単調関数の逆関数定理（命題 2.3.5）より、連続な狭義単調増加関数 f の逆関数 f^{-1} は連続な狭義単調増加関数だった。実は、f が可微分なら、f^{-1} も可微分であり、$(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$ が成立する。これは、逆関数の意味をグラフで考えるとごく自然である。

定理 6.3.1 (**逆関数の微分**) $I \subset \mathbb{R}$ を区間、I からその端点（もし I に含まれれば）を除いた区間を $\mathring{I}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(I) \cap D^m(\mathring{I})$ $(m \geq 1)$, $\mathring{I}$ 上 $f' > 0$ とする。このとき、

(a) f は I 上狭義単調増加。また $J = f(I)$ とするとき、J は区間、逆関数 $f^{-1} : J \longrightarrow I$ は連続かつ狭義単調増加。

(b) J からその端点（もし J に含まれれば）を除いた区間を $\mathring{J}$ とする。このとき、$f^{-1} \in C(J) \cap D^m(\mathring{J})$ かつ

$$\mathring{J} \text{ 上 } f' \circ f^{-1} > 0, \quad (f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1}). \tag{6.2}$$

(c) $m \geq 1$, $f \in C(I) \cap C^m(\mathring{I})$ なら $f^{-1} \in C(J) \cap C^m(\mathring{J})$.

証明: (a): 微分による増減判定 (定理 5.4.6) より f は I 上狭義単調増加。従って狭義単調関数の逆関数定理 (命題 2.3.5) より逆関数 $f^{-1} : J \longrightarrow I$ は連続かつ狭義単調増加。
(b): 先ず

(1) $f^{-1} \in D^1(\mathring{J})$ と (6.2) の成立

を示す。f^{-1} の狭義単調性より $y \in \mathring{J}$ なら $f^{-1}(y) \in \mathring{I}$. 故に仮定より $f'(f^{-1}(y)) > 0$. 今、$z \neq y$, $z \longrightarrow y$ とすると、$f^{-1}(z) \neq f^{-1}(y)$, $f^{-1}(z) \longrightarrow f^{-1}(y)$. 従って

$$\frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y)}{z - y} = \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y)}{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(y))} \longrightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

これで (1) が判った。次に

(2) $f^{-1} \in D^m(\mathring{J})$

を m に関する帰納法で示す。$m = 1$ の場合は (1) で示した。そこで $m \geq 2$ かつ $f^{-1} \in D^{m-1}(\mathring{J})$ を仮定する。$f' \in D^{m-1}(\mathring{I})$ なので合成関数の高階微分可能性 (命題 5.2.4) より

$$f' \circ f^{-1} \in D^{m-1}(\mathring{J}).$$

更に $\mathring{J}$ 上 $f' \circ f^{-1} > 0$ なので商の高階微分可能性 (命題 5.2.3) より

$$(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1}) \in D^{m-1}(\mathring{J}).$$

これは $f^{-1} \in D^m(\mathring{J})$ を意味する。
(c): (b) の証明と同様。 □

注： 定理 6.3.1 は、f^{-1} が $y \in \mathring{J}$ で可微分かつ $f' \circ f^{-1}(y) > 0$ を保証する。これを認めれば、(6.2) 第 2 式を連鎖律によっても導ける。即ち $f \circ f^{-1}(y) = y$ の両辺を微分すると、連鎖律より $(f' \circ f^{-1})(f^{-1})' = 1$ となり、(6.2) 第 2 式を得る。

6.4 逆三角関数

正弦・余弦関数の幾何学的意味は、単位円周上の点の座標を、座標軸との角度 (=弧長) を変数とした関数として表すことである。例えば、正弦関数は弧長 θ に対し円周上の点の y 座標（正弦）を対応させる関数だが、これは $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で全単射だから、この範囲では逆に、円周上の点の y 座標（正弦）に弧長（arc length）を対応させる関数を考えることが出来る。それが逆正弦関数（Arcsin ）である：

命題 6.4.1 (**逆正弦関数**) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ は連続な全単射、狭義単調増加 (命題 6.1.1)。そこで、その逆関数を**逆正弦関数**と呼び、Arcsin と記す。このとき、狭義単調関数の逆関数定理（命題 2.3.5）より $\mathrm{Arcsin} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ は連続な全単射、狭義単調増加である。更に、

(a) $y \in (-1, 1)$ なら $(\mathrm{Arcsin}\, y)' = 1/\sqrt{1 - y^2}$.

(b) $y \in [-1, 1]$ なら $\mathrm{Arcsin}\, y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n y^{2n+1}}{2n + 1}$, 但し $b_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

証明：(a): $\mathrm{Arcsin}\, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ より $\cos(\mathrm{Arcsin}\, y) \geq 0$. 従って

$$(\sin)'(\mathrm{Arcsin}\, y) = \cos(\mathrm{Arcsin}\, y) = \sqrt{1 - \sin^2(\mathrm{Arcsin}\, y)} = \sqrt{1 - y^2}$$

$y \in (-1, 1)$ なら逆関数の微分（定理 6.3.1）より

$$(\mathrm{Arcsin}\, y)' = \frac{1}{(\sin)'(\mathrm{Arcsin}\, y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(b): まず $y \in (-1, 1)$ とする。一般二項定理の応用例（例 6.2.2）で見たように、

(1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1 + y}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n y^n$, (右辺は絶対収束)。

(1) 右辺の絶対収束から、示すべき式右辺の絶対収束も分かるので、それを $f(y)$ と置く。巾級数の微分（例 5.1.7）より

(2) $f \in D^1((-1, 1))$ かつ $f'(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^{2n}$.

故に $y \in (-1, 1)$ なら

$$(\mathrm{Arcsin}\, y)' \overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^{2n} \overset{(2)}{=} f'(y).$$

以上と微分による増減判定（定理 5.4.6）より $(-1, 1)$ 上 $\mathrm{Arcsin} - f = c$ (定数). 更に $0 = \mathrm{Arcsin}\, 0 - f(0) = 0$.
次に $y = \pm 1$ を考える。示すべき式の両辺は y について奇関数だから、$y = 1$ で言えればよい。$y \in (-1, 1)$ に対する結果と 問 4.3.1 より $y = 1$ に対する結果を得る。 □

注：双曲正弦関数 $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し 命題 6.4.1 と同様の結果を問 6.2.2(ii),(iii) で述べた。問 6.2.2(ii),(iii) を 命題 6.4.1 の方法で示すことも可能。

問 6.4.1 (**逆余弦関数**) cos : $[0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ は連続な全単射、狭義単調減少 (命題 6.1.1)。そこで、その逆関数を**逆余弦関数**と呼び、 Arccos と記す。このとき、狭義単調関数の逆関数定理（命題 2.3.5）より Arccos $:[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ は連続な全単射、狭義単調減少である。$y \in [-1,1]$ に対し $\mathrm{Arcsin}\, y + \mathrm{Arccos}\, y = \frac{\pi}{2}$ を示せ。この式により、Arccos に関する性質は全て Arcsin のそれらに帰着する。

問 6.4.2 $a \in \mathbb{C}$, $T_a(x) = \cos(a\mathrm{Arccos}\, x)$ $(x \in [-1,1])$ とおく。以下を示せ：
(i) $(1-x^2)T_a''(x) - xT_a'(x) + a^2T_a(x) = 0$. (ii) $n \in \mathbb{N}$ なら T_n は n 次多項式であり、$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, $T_n(-x) = (-1)^nT_n(x)$ を満たす。T_n を**チェビシェフ多項式**という[37]。

命題 6.4.2 (**逆正接関数**) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ は連続な全単射、狭義単調増加 (命題 6.1.5)。そこで、その逆関数を**逆正接**関数と呼び、 Arctan と記す。このとき、狭義単調関数の逆関数定理（命題 2.3.5）より Arctan $:\mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ は連続な全単射、狭義単調増加。従って $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \mathrm{Arctan}\, x = \pm\dfrac{\pi}{2}$, (複合同順). 更に、

(a) $y \in \mathbb{R}$ なら $(\mathrm{Arctan}\, y)' = \dfrac{1}{1+y^2}$.

(b) $y \in [-1,+1]$ なら $\mathrm{Arctan}\, y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1}$.

証明： (a): $y \in \mathbb{R}$ なら

$$(\tan)'(\mathrm{Arctan}\, y) = 1/\cos^2(\mathrm{Arctan}\, y) \stackrel{\text{簡単な書き換え}}{=} 1 + \tan^2(\mathrm{Arctan}\, y) = 1 + y^2.$$

従って逆関数の微分（定理 6.3.1）より

$$(\mathrm{Arctan}\, y)' = \frac{1}{(\tan)'(\mathrm{Arctan}\, y)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

(b): $y = \pm 1$ での証明は別の機会に譲り、$y \in (-1,1)$ のみ考える。このとき、示すべき等式右辺は絶対収束するので、それを $f(y)$ とおく。巾級数の微分（例 5.1.7）より

(1) $f \in D^1((-1,1))$ かつ $y \in (-1,1)$ なら $f'(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n}$.

故に $y \in (-1,1)$ なら

$$(\mathrm{Arctan}\, y)' \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{1+y^2} \stackrel{\text{指数級数}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n} \stackrel{(1)}{=} f'(y).$$

以上と微分による増減判定（定理 5.4.6）より $(-1,1)$ 上 Arctan $- f = c$ (定数)。所が $c = \mathrm{Arctan}\, 0 - f(0) = 0$. □

注： 双曲正接関数 th $:\mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ に対し 命題 6.4.2 と同様の結果を問 6.1.10 (ii),(iii) で述べた。問 6.1.10 (ii),(iii) を 命題 6.4.2 の方法で示すことも可能である。

問 6.4.3 以下を示せ：(i) $x > 0$ に対し、$\frac{\pi}{2} = 2\mathrm{Arctan}\, x - \mathrm{Arctan}\, \frac{x^2-1}{2x}$.
(ii) $(\star)$ $\tan(\pi/16) < x < \tan(3\pi/16)$ なら、$\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{x^4+4x^3-6x^2-4x+1}{x^4-4x^3-6x^2+4x+1}$.
(ii) より $\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{Arctan}\, \frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{239}$. 右辺の Arctan を命題 6.4.2 の巾級数で表したとき、その収束は速い。従って、それら巾級数の部分和は π の良い近似値を与える。

[37] Pafnutiĭ L'vovich Chebyshev,1821–94.

6.5 $(\star)$ 対数の主値

命題 6.5.1 **(対数の主値)** $z \mapsto e^z$ は $\{z \in \mathbb{C}\,;\,\mathrm{Im}\,z \in (-\pi, \pi)\}$ 上 $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ への全単射。この逆関数を **対数の主値** と呼び Log と記す。このとき、

(a1) $z \mapsto \mathrm{Log}\,z$ は $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ 上 $\{z \in \mathbb{C}\,;\,\mathrm{Im}\,z \in (-\pi, \pi)\}$ への全単射,

(a2) $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ なら $e^{\mathrm{Log}\,z} = z$.

(a3) $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\,z \in (-\pi, \pi)$ なら $\mathrm{Log}\,(e^z) = z$,

(a4) $z = |z|e^{\mathbf{i}\theta} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ なら $\mathrm{Log}\,z = \log|z| + \mathbf{i}\theta$.

(b) $z \mapsto \mathrm{Log}\,z$ は $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ 上連続。

証明: (a0): 系 6.1.3 より $z \mapsto e^z$ は $\{z \in \mathbb{C}\,;\,\mathrm{Im}\,z \in [-\pi, \pi)\}$ 上 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ への全単射。また、直線 :$\mathrm{Im}\,z = -\pi$ の像は $(-\infty, 0)$. 従って所期の全単射性が判る。
(a1)–(a3): (a0) の帰結。
(a4): (a3) の言い替え。
(b): $\theta : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \longrightarrow (-\pi, \pi)$ を次で定義[38]: $z = x + \mathbf{i}y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対し

$$\theta(z) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\,\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, \\ \pi/2 + \mathrm{Arctan}\,\left|\frac{x}{y}\right|, & x \leq 0, y > 0, \\ -\pi/2 - \mathrm{Arctan}\,\left|\frac{x}{y}\right|, & x \leq 0, y < 0. \end{cases}$$

このとき、以下は容易に確かめられる (問 6.5.1, 問 6.5.2):

(1) $e^{\mathbf{i}\theta(z)} = z/|z|$,

(2) $\theta \in C(\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0])$.

(1), (a4) より $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ に対し

$$\mathrm{Log}\,z = \log|z| + \mathbf{i}\theta(z).$$

上式と (2) より所期連続性を得る。 □

注: 系 6.1.3 より、$z \mapsto e^z$ は $\{z \in \mathbb{C}\,;\,\mathrm{Im}\,z \in [-\pi, \pi)\}$ 上 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ への全単射。従って、逆写像は $(-\infty, 0)$ 上でも定義可能ではあるが、$(-\infty, 0]$ 上では連続にならない。この理由から $(-\infty, 0]$ は Log の定義域から除く。

問 6.5.1 命題 6.5.1 証明中の (1) を示せ。

問 6.5.2 命題 6.5.1 証明中の (2) を示せ。

問 6.5.3 $\alpha, z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ とする。$\exp(\alpha\mathrm{Log}\,(1+z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ (絶対収束) を示せ。

---

[38] $\theta(z)$ は、z と正の実軸との角度を $(-\pi, \pi)$ で表したもの。従って、(1), (2) はごく自然。

例 6.5.2 逆三角関数を、対数の主値を用いて表示出来る。例えば $x \in [-1,1]$ に対し

$$\mathrm{Arcsin}\, x = \frac{1}{\mathbf{i}}\mathrm{Log}\,(\sqrt{1-x^2}+\mathbf{i}x).$$

証明: $\mathrm{Arcsin}\, x \in [-\pi/2, \pi/2]$ より $\cos(\mathrm{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}$. 従って

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{i}\mathrm{Arcsin}\, x} &= \cos(\mathrm{Arcsin}\, x) + \mathbf{i}\sin(\mathrm{Arcsin}\, x) \\ &= \sqrt{1-x^2}+\mathbf{i}x \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]. \end{aligned}$$

上式両辺の Log をとれば結論を得る（命題 6.5.1(a4)）。 □

問 6.5.4 $x \in \mathbb{R}$ に対し次を示せ：$\mathrm{Arctan}\, x = \frac{1}{2\mathbf{i}}\mathrm{Log}\,\left(\frac{1+\mathbf{i}x}{1-\mathbf{i}x}\right)$.

例 5.4.8 は次のように一般化出来る：

命題 6.5.3 $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ なら $\mathrm{Log}\,(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$ (右辺は絶対収束).

証明: $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + \mathbf{i}y$, $|z| < 1$,

$$f(z) = \mathrm{Log}\,(1+z), \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$$

とする。命題 6.5.1 (a4) より

$$f(z) = \tfrac{1}{2}\log((1+x)^2+y^2) + \mathbf{i}\mathrm{Arctan}\, \frac{y}{1+x}.$$

これを用いた直接計算（問 6.5.5）より、

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{1}{1+z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{\mathbf{i}}{1+z}.$$

今、$|z| < 1$ なら $g(z)$ は絶対収束。故に

(2) $$\frac{\partial g}{\partial x}(z) \underbrace{=}_{\text{例 5.2.5}} \sum_{n=1}^{\infty}(-z)^{n-1} = \frac{1}{1+z} \underbrace{=}_{(1)} \frac{\partial f}{\partial x}(z).$$

同じく $|z| < 1$ で

(3) $$\frac{\partial g}{\partial y}(z) \underbrace{=}_{\text{例 5.2.5}} \mathbf{i}\frac{\partial g}{\partial x}(z) \underbrace{=}_{(2)} \frac{\mathbf{i}}{1+z} \underbrace{=}_{(1)} \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

故に、$|z| < 1$ の範囲で $f(z) - g(z) = c$ (定数)。所が $z = 0$ で $c = f(0) - g(0) = 0$ □

問 6.5.5 命題 6.5.3 証明中、(1) を確かめよ。

7 積分の基礎

1807 年、フランスの数学者・物理学者フーリエは熱伝導の研究の中で、次のように述べた[39]：「任意 の $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は

$$f(x) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx) \tag{7.1}$$

と書き表せ、係数 a_n, b_n $(n = 0, 1, ..)$ は

$$a_n = \int_0^1 f(x) \cos 2\pi nx dx, \quad b_n = \int_0^1 f(x) \sin 2\pi nx dx \tag{7.2}$$

で与えられる」。

フーリエはこの際、級数 (7.1) の収束や、積分 (7.2) の意味づけを顧慮しなかった。しかし、フーリエの提唱した上記仮説は、結果としてその後の解析の発展にとってひとつの道標となった。例えば、コーシーは (7.2) の可積分性を考察し、一般に、連続関数が可積分であることを証明した (1823 年)。また、 リーマン は (7.2) を不連続関数に対しても定義する試みの中で、現在「リーマン可積分関数」と呼ばれる、不連続関数まで含むクラスにまで積分の概念を拡張した (1854 年)。更に 20 世紀初頭、ルベーグにより基礎づけられたルベーグ積分論の発展にともない、現在ではフーリエが述べた「任意の f」が、どの程度「任意」か、また (7.1) がどういう意味で収束するか、が詳細かつ厳密に知られている[40]。

リーマン積分か？ルベーグ積分か？: 積分の定義の仕方には、主に二つの流儀–リーマン積分とルベーグ積分–があるが、現代の解析学ではリーマン積分より、むしろルベーグ積分が主流となっている。それは、ルベーグ積分の方が一般性、利便性両面でリーマン積分よりもはるかに使い勝手がよいことによる。数学専攻、特に解析学を志す人にとってルベーグ積分の習得は不可欠となる。一方、ルベーグ積分を定義する際には可測集合、可測関数、測度... 等の予備知識が必要となり、数学専攻以外の人にとって、やや荷が重いかも知れない。また、ルベーグ積分が主流となった現代の解析学でも、リーマン積分の考え方を使うこともある。従って一年生を対象とした授業では、定義が比較的単純なリーマン積分から導入するのが妥当だろう。

7.1 （リーマン）積分とは？

7.1 節では （リーマン）積分を定義し、簡単な例と性質（線形性・単調性）を述べる。

定義 7.1.1 (**1 次元の区間分割**) $-\infty < a \le b < \infty$, $\overset{\circ}{I} = (a,b)$, $\overline{I} = [a,b]$, $\overset{\circ}{I} \subset I \subset \overline{I}$ とする。

- I の**長さ**を $|I| = b - a$ と定める。
- $N \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ 及び分点

$$a = c_0 \le c_1 \le ... \le c_{N-1} \le c_N = b \tag{7.3}$$

[39] Joseph Fourier (1768–1830)
[40] Henri Lebesgue (1875—1941)

に対し

$$(c_{k-1}, c_k) \subset D_k \subset [c_{k-1}, c_k], \quad k = 1, .., N \tag{7.4}$$

を満たす N 個の区間の集合

$$\Delta = \{D_k\}_{k=1}^N$$

を、分点 (7.3) による I の**区間分割**と呼ぶ。このとき、明らかに

$$|I| = \sum_{k=1}^N |D_k| \tag{7.5}$$

注：

• 分点 (7.3) に対し、各 D_k を (7.4) を満たすように選ぶ方法は、

$$(c_{k-1}, c_k),\ (c_{k-1}, c_k],\ [c_{k-1}, c_k),\ [c_{k-1}, c_k]$$

のいづれでもよく、選び方が k 毎に違っても構わない。

• $a = b$ なら、I は $\emptyset$ または 1 点集合である。また、分点 (7.3) で $c_{k-1} = c_k$ となる k に対し (7.4) を満たす D_k は $\emptyset$ または 1 点集合である。実は、こうした自明な場合も含めて考える方が後で便利である（例 7.1.5, 系 7.3.7 の証明参照)。

ここからは上記定義を多次元へ一般化する。以下、7.1 節を通じ、$I = I_1 \times ... \times I_d \subset \mathbb{R}^d$ を有界区間、

$$\overline{I} = \overline{I_1} \times ... \times \overline{I_d}, \quad \overset{\circ}{I} = \overset{\circ}{I_1} \times ... \times \overset{\circ}{I_d}$$

とする。

定義 7.1.2 (多次元の区間分割)

• I の**体積**を $|I| = |I_1| \cdots |I_d|$ と定める。

• I の各辺 I_j の端点を $a_j \leq b_j$ とする。各 I_j に分点

$$a_j = c_{j\,0} \leq c_{j\,1} \leq ... \leq c_{j\,N_j-1} \leq c_{j\,N_j} = b_j, \quad j = 1, .., d \tag{7.6}$$

と、それによる I_j の区間分割 $\Delta_j = \{D_{j,k}\}_{k=1}^{N_j}$ を考える（定義 7.1.1)。$j = 1, .., d$ 毎に $k_j \in \{1, .., N_j\}$ をとることで d 次元区間

$$D_{1,k_1} \times \cdots \times D_{d,k_d}$$

が得られる。このようにして得られる d 次元区間を集めた集合：

$$\Delta = \{D_{1,k_1} \times \cdots \times D_{d,k_d}\ ;\ 1 \leq k_1 \leq N_1,\ 1 \leq k_2 \leq N_2,\ ...,\ 1 \leq k_d \leq N_d\} \tag{7.7}$$

を分点 (7.6) による I の**区間分割**と呼ぶ（$d = 2$ で絵を描いてみる)。また、

$$\mathscr{D}(I) = \{\Delta\ ;\ \Delta \text{ は } I \text{ の区間分割 }\}$$

とする。

• 分点 (7.6) による区間分割 $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ に対し

$$\mathrm{m}(\Delta) = \max\{c_{j\,k} - c_{j\,k-1}\ ;\ j = 1, ..., d,\ k = 1, ..., N_j\}$$

を区間分割 Δ の **幅** (mesh) と呼ぶ。

注：上記定義は、区間分割 Δ が体積 0 の区間を含む場合も許す。これは、1 次元の場合同様一見無意味だが、その方が後で便利である（例 7.1.5, 系 7.3.7 の証明参照）。

問 7.1.1 記号は 定義 7.1.2 の通り、 $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ とする。$|I| = \sum_{D\in\Delta} |D|$ を示せ。

例 7.1.3 (a) 分点 (7.6) を $c_{j,k} = a_j + |I_j|\frac{k}{N_j}$ と与えて、得られる分割 Δ は I の体積を等分する。即ち、任意の $D \in \Delta$ に対し $|D| = |I|/(N_1 \cdots N_d)$.

(b) 各辺 I_j の区間分割 $\Delta_j = \{\{a_j\}, (a_j, b_j), \{b_j\}\}$ から (7.7) により I の区間分割 $\Delta = \{D_1, D_2, ...D_{3^d}\}$ で $D_1 = \overset{\circ}{I}$, $|D_k| = 0$ $(k \geq 2)$ なるものを得る。この分割は I を $\overset{\circ}{I}$ と、それ以外の体積 0 の部分に分ける。

(c) 各辺に分点が与えられたとき、この分点による区間分割 $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ であって、$I = \cup_{D\in\Delta} D$ かつ $\{D\}_{D\in\Delta}$ は非交差（相異なる $D, D' \in \Delta$ に対し $D \cap D' = \emptyset$）となるものが存在する。実際、$d = 1$ で分点が (7.3) で与えられるなら、例えば

$$D_0 = [c_0, c_1] \cap I, \quad D_k = (c_{k-1}, c_k] \cap I \ (k = 2, ..., N)$$

として求める区間分割を得る。$d \geq 2$ なら、各 1 次元区間 I_j の区間分割 Δ_j を上記のようにとり、Δ を (7.7) で与えればよい。

問 7.1.2 例 7.1.3 の各例について、$d = 2$ の場合に概念図を描け。

定義 7.1.4 (**リーマン積分**) $I \subset \mathbb{R}^d$ を有界区間、$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ は有界とする。

- 区間分割 $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ に対し、各 $D \in \Delta$ から点 $\xi_D \in \overline{D} \cap I$ を選んで出来る点の集合

$$\xi = \{\xi_D\}_{D\in\Delta}$$

を、区間分割 Δ の**代表** (representative) と呼ぶ。

- I の区間分割 Δ 及びその代表 $\xi = \{\xi_D\}_{D\in\Delta}$ に対し、次の和を f の **リーマン和** (Riemann sum) と言う：

$$s_I(f, \Delta, \xi) = \sum_{D\in\Delta} f(\xi_D)|D|. \tag{7.8}$$

区間分割 Δ は、体積 0 を持つ区間を含んでもよいが、リーマン和には $|D| = 0$ となる $D \in \Delta$ の項は寄与しない。

- 次を満たす $s_I(f) \in \mathbb{R}$ が存在するとき、f は I 上 **リーマン可積分**と言う：

$$\lim_{\mathrm{m}(\Delta)\to 0} \sup_{\xi} |s_I(f, \Delta, \xi) - s_I(f)| = 0, \tag{7.9}$$

但し $\sup_{\xi}$ は Δ の代表 ξ 全体にわたる上限、また、極限の意味は次に述べる通りである：一般に $s \in \mathbb{R}$ かつ、区間分割 $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ を与える毎に $s(\Delta) \in \mathbb{R}$ が決まるとする。任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\mathrm{m}(\Delta) < \delta \implies |s(\Delta) - s| < \varepsilon.$$

を満たす $\delta > 0$ が存在するとき、次のように記す：

$$\lim_{\mathrm{m}(\Delta)\to 0} s(\Delta) = s.$$

特に、$s = 0,\ s(\Delta) = \sup_\xi |s_I(f,\Delta,\xi) - s_I(f)|$ の場合が (7.9) である。次の記号を導入する：

$$\mathscr{R}(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ f \text{ は } I \text{ 上有界かつ リーマン可積分}\}$$

• (7.9) の $s_I(f)$ を、f の I 上での **（リーマン）積分**と言い、次のように記す：

$$\int_I f,\quad \int_I f(x)dx,\quad \int_I f(x_1,...,x_d)dx_1\cdots dx_d$$

注：(7.9) なら、特に

$$\lim_{\mathrm{m}(\Delta)\to 0} s_I(f,\Delta,\xi) = s_I(f) \tag{7.10}$$

が成立し、極限は上式左辺で Δ の代表 ξ をどう選ぶかに無関係。これは 定義 7.1.4 で重要な点である。

次の例は一見自明なものばかりだが、それぞれ意味がある。

例 7.1.5 **(a)** $f \equiv c \in \mathbb{R}$ なら $f \in \mathscr{R}(I)$, $\int_I f = c|I|$.

(b) $|I| = 0$ (つまり、I の辺 $I_1,...,I_d$ のうち、少なくともひとつが長さ 0) なら任意の有界関数 f に対し $f \in \mathscr{R}(I)$, $\int_I f = 0$.

(c) $x \in \mathbb{Q}$,$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ に応じて $f(x) = 1, 0$ とすると、$f \notin \mathscr{R}([0,1])$.

証明：(a):任意の $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ とその代表 ξ に対し

$$s_I(f,\Delta,\xi) = \sum_{D\in\Delta} c|D| = c|I|.$$

(b):任意の $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ と $D \in \Delta$ に対し $|D| \le |I|$, 従って $|D| = 0$. 故に Δ の任意の代表 ξ に対し

$$s_I(f,\Delta,\xi) = \sum_{D\in\Delta} f(\xi_D)|D| = 0.$$

(c):[0, 1] の区間分割 $\Delta = \{[(\frac{k-1}{N},\frac{k}{N}]\}_{k=1}^N$ を考える。$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ は共に稠密（例 1.3.12, 問 2.3.14）だから、Δ の代表として $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{Q}$ と $\eta = \{\eta_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ を選ぶことが出来る。このとき、

$$s_I(f,\Delta,\xi) = \sum_{k=1}^N 1\cdot(1/N) = 1,\quad s_I(f,\Delta,\eta) = \sum_{k=1}^N 0\cdot(1/N) = 0.$$

従って 、極限 (7.9) は代表の選び方により異なる（定義 7.1.4 後の注参照）。 □

例 7.1.6 $I = (a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ $f \in \mathscr{R}(I)$ なら、I の n 等分点 $c_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ $(k = 0,1,...,n)$ に対し

$$\int_I f = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(c_k).$$

実際、上式右辺は、I の区間分割 $\{(c_{k-1},c_k]\}_{k=1}^n$, その代表 $(c_k)_{k=1}^n$ に関するリーマン和である。

問 7.1.3 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ に対し以下を示せ：

(i) $f>0$ かつ $\log f\in\mathscr{R}([0,1])$ のとき、$\displaystyle\lim_n\left(\prod_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}=\exp\left(\int_{[0,1]}\log f\right)$.

(ii) $f\in\mathscr{R}([0,1])$ のとき、$\displaystyle\lim_n\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\exp\left(\int_{[0,1]}f\right)$.

命題 7.1.7 (**積分の性質**) $f,g\in\mathscr{R}(I)$ とする。

(a) (**線形性**) $c\in\mathbb{R}$ に対し $cf, f+g\in\mathscr{R}(I)$. また、

$$\int_I cf=c\int_I f,\quad \int_I(f+g)=\int_I f+\int_I g. \tag{7.11}$$

(b) (**単調性**) I 上 $f\le g$ なら $\int_I f\le\int_I g$.

証明：(a): 任意の $\Delta\in\mathscr{D}(I)$ と代表 ξ に対し

$$s_I(cf,\Delta,\xi)=cs_I(f,\Delta,\xi),\quad s_I(f+g,\Delta,\xi)=s_I(f,\Delta,\xi)+s_I(g,\Delta,\xi)$$

従って $\mathrm{m}(\Delta)\to 0$ とするとき、

$$\begin{aligned}\sup_\xi\left|s_I(cf,\Delta,\xi)-c\int_I f\right| &= |c|\sup_\xi\left|s_I(f,\Delta,\xi)-\int_I f\right|\longrightarrow 0,\\ \sup_\xi\left|s_I(f+g,\Delta,\xi)-\left(\int_I f+\int_I g\right)\right| &\le \sup_\xi\left|s_I(f,\Delta,\xi)-\int_I f\right|+\sup_\xi\left|s_I(g,\Delta,\xi)-\int_I g\right|\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

以上と、積分の定義より (7.11) を得る。
(b):任意の $\Delta\in\mathscr{D}(I)$ と代表 ξ に対し

$$s_I(f,\Delta,\xi)\le s_I(g,\Delta,\xi).$$

従って $\mathrm{m}(\Delta)\to 0$ とすれば結論を得る。 □

定義 7.1.8 (**ベクトル値関数の積分**) $V=\mathbb{R}^k$ とする ($V=\mathbb{C}$ も $k=2$ の場合として含める)。$f:I\longrightarrow V$ の可積分性と積分を次のように定義する：

$$f=(f_j)_{j=1}^k \text{ が } I \text{ 上可積分} \overset{\text{def.}}{\iff} f_1,...,f_k\in\mathscr{R}(I).$$

また、f が I 上可積分なら

$$\int_I f\overset{\text{def.}}{=}\left(\int_I f_1,...,\int_I f_k\right).$$

特に $V=\mathbb{C}$ の場合、

$$f \text{ が } I \text{ 上可積分} \overset{\text{def.}}{\iff} \mathrm{Re}\,f,\mathrm{Im}\,f\in\mathscr{R}(I).$$

また、f が I 上可積分なら

$$\int_I f\overset{\text{def.}}{=}\int_I\mathrm{Re}\,f+\mathbf{i}\int_I\mathrm{Im}\,f.$$

注：定義 7.1.8 より、ベクトル値関数の積分の性質は、実数値関数の積分のそれに帰着する。例えば、積分の線形性（命題 7.1.7(a)）がベクトル値で成立することは明らか。以下でも、定理、命題等は簡単のために実数値関数の場合に述べるが、実数値固有の性質を用いるもの（例えば 命題 7.1.7(b)）以外は容易にベクトル値に拡張される。従って、実数値の場合に述べた事柄でも、断りなくベクトル値に応用することがある。

7.2 ダルブーの可積分条件

以下では 定義 7.1.4 で与えた可積分条件を、より検証しやすい形に書き直す。そのために記号を導入する。

定義 7.2.1 $D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^k$ に対し f の**振動** (oscillation) を次のように定める：

$$\operatorname*{ocs}_D f = \sup_{x,y \in D} |f(x) - f(y)|.$$

問 7.2.1 $f : D \to \mathbb{R}$ を有界とする。$\operatorname{ocs}_D f = \sup_{x,y\in D}(f(x) - f(y)) = \sup_D f - \inf_D f$ を示せ。

定義 7.2.2 $I \subset \mathbb{R}^d$ は有界区間、$f : I \to \mathbb{R}$ は有界とする。I の区間分割 Δ に関する f の **不足和** (lower sum) を **過剰和** (upper sum) をそれぞれ次で定める：

$$\underline{s}_I(f, \Delta) = \sum_{D \in \Delta} \left(\inf_D f \right) |D|, \quad \overline{s}_I(f, \Delta) = \sum_{D \in \Delta} \left(\sup_D f \right) |D|.$$

(これらの意味を $d = 1$ の場合に絵で説明)。定義より Δ の任意の代表 ξ に対し

$$\underline{s}_I(f, \Delta) \leq s_I(f, \Delta, \xi) \leq \overline{s}_I(f, \Delta). \tag{7.12}$$

但し、$s_I(f, \Delta, \xi)$ はリーマン和—(7.8) 参照。また、$\operatorname*{ocs}_D f = \sup_D f - \inf_D f$ (問 7.2.1) より

$$r_I(f, \Delta) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{D \in \Delta} \left(\operatorname*{ocs}_D f \right) |D| = \overline{s}_I(f, \Delta) - \underline{s}_I(f, \Delta). \tag{7.13}$$

今後、$r_I(f, \Delta)$ は f の可積分性判定に、重要な役割を果たす。

(7.12) より、$\overline{s}_I(f, \Delta)$, $\underline{s}_I(f, \Delta)$ はリーマン和 $s_I(f, \Delta, \xi)$ を上下から近似し、その誤差が $r_I(f, \Delta)$ である。その意味で、次に述べる定理は自然であろう。

定理 7.2.3 (**ダルブー**[41]**の可積分条件 I**) 記号は定義 7.2.2 の通りとする。以下の条件は全て同値である。

(a) $f \in \mathscr{R}(I)$.

(b) $\displaystyle\lim_{m(\Delta) \to 0} r_I(f, \Delta) = 0$.

(c) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$r_I(f, \Delta) < \varepsilon$ を満たす $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ が存在する。

定理 7.2.3 の証明は 7.4 節で述べる。

7.3 ダルブーの可積分条件・応用編

ダルブーの可積分条件（定理 7.2.3）の応用例を述べる。これらから判るように、定理 7.2.3 の条件 (b),(c) は可積分性の判定に便利である。

命題 7.3.1 (**単調関数は可積分**) $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が単調なら $f \in \mathscr{R}(I)$.

[41] Jean Gaston Darboux (1842–1917)

証明：f を単調増加とし、定理 7.2.3 の条件 (b) を検証（単調減少でも証明は同様）。分点 $a = c_0 \le c_1 \le ... \le c_{N-1} \le c_N = b$ による分割 $\Delta = \{D_k\}_{k=1}^N \in \mathscr{D}(I)$ を考える ((7.4) 参照)。このとき[42]、

$$|D_k| = c_k - c_{k-1}, \quad \operatorname*{ocs}_{D_k} f \le f(c_k) - f(c_{k-1}).$$

従って $\mathrm{m}(\Delta) \to 0$ のとき、

$$r_I(f,\Delta) \le \sum_{k=1}^N (f(c_k) - f(c_{k-1})) \underbrace{(c_k - c_{k-1})}_{\le \mathrm{m}(\Delta)} \le \mathrm{m}(\Delta) \underbrace{\sum_{k=1}^N (f(c_k) - f(c_{k-1}))}_{=f(b)-f(a)} \longrightarrow 0.$$

□

ダルブーの可積分条件の応用として、集合 $\mathscr{R}(I)$ が、積、商、及び絶対値で閉じている事が判る（命題 7.3.3)。まず次の補題を示す。

補題 7.3.2 $f \in \mathscr{R}(I)$, $c \in [0,\infty)$ とする。$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ は有界かつ

$$\text{全ての } x, y \in I \text{ に対し } |g(x) - g(y)| \le c|f(x) - f(y)|$$

を満たすなら、$g \in \mathscr{R}(I)$.

証明：仮定から、任意の $D \subset I$ に対し $\operatorname*{ocs}_D g \le c \operatorname*{ocs}_D f$. 従って、$\Delta \in \mathscr{D}(I)$ に対し

$$r_I(g,\Delta) = \sum_{D \in \Delta} \left(\operatorname*{ocs}_D g \right) |D| \le c \underbrace{\sum_{D \in \Delta} \left(\operatorname*{ocs}_D f \right) |D|}_{=r_I(f,\Delta)}.$$

上式より、f が定理 7.2.3 の条件 (b) を満たすなら、g も満たすことが判る。 □

問 7.3.1 補題 7.3.2 を次のように一般化せよ：$f_1, .., f_n \in \mathscr{R}(I)$, $c \in [0,\infty)$ とする。$g : I \to \mathbb{R}$ は有界かつ全ての $x, y \in I$ に対し $|g(x) - g(y)| \le c \sum_{j=1}^n |f_j(x) - f_j(y)|$ を満たすなら、$g \in \mathscr{R}(I)$.

命題 7.3.3 $f, g \in \mathscr{R}(I)$ とするとき、以下が成立。

(a) $p \in [1,\infty)$ に対し $|f|^p \in \mathscr{R}(I)$ (証明後の注参照).

(b) $fg \in \mathscr{R}(I)$.

(c) $\inf_I |f| > 0$ なら $1/f \in \mathscr{R}(I)$.

証明：(a): 一般に、

(∗) $a, b \in [-M, M]$ なら $||a|^p - |b|^p| \le pM^{p-1}|a - b|$. (問 7.3.2)

[42] $D_k = [c_{k-1}, c_k]$ なら $\operatorname{ocs}_{D_k} f = f(c_k) - f(c_{k-1})$ だが、例えば $D_k = [c_{k-1}, c_k)$ かつ $f(c_k-) < f(c_k)$ なら $\operatorname{ocs}_{D_k} f < f(c_k) - f(c_{k-1})$.

従って、$M=\sup_I |f|$ とすると、

$$\text{全ての } x,y\in I \text{ に対し } ||f(x)|^p-|f(y)|^p|\le pM^{p-1}|f(x)-f(y)|$$

以上と 補題 7.3.2 より所期可積分性を得る。
(b): 命題 7.1.7 より $f\pm g\in\mathscr{R}(I)$. 従って本命題 (a) より $(f\pm g)^2\in\mathscr{R}(I)$. 以上より

$$fg=(f+g)^2/4-(f-g)^2/4\in\mathscr{R}(I).$$

(c):$c=\inf_I|f|>0$ なら $x,y\in I$ に対し、

$$|1/f(x)-1/f(y)|=|f(y)-f(x)|/|f(x)||f(y)|\le|f(x)-f(y)|/c^2.$$

以上と 補題 7.3.2 より所期可積分性を得る。 □

注：命題 7.3.3(a) について、より一般に次が成立する。$f\in\mathscr{R}(I)$ が有界閉区間 $J\subset\mathbb{R}$ に値をとり、かつ $\varphi\in C(J)$ なら $\varphi\circ f\in\mathscr{R}(I)$. これを認めれば、例えば $0\le p<1$ に対しても $|f|^p\in\mathscr{R}(I)$ である。

問 7.3.2 命題 7.3.3 の証明中 $(*)$ を示せ。ヒント：平均値定理。

命題 7.3.4 (三角不等式) $f\in\mathscr{R}(I)$ なら $|f|\in\mathscr{R}(I)$ かつ $\left|\int_I f\right|\le\int_I|f|$.

証明：命題 7.3.3（$p=1$) より $|f|\in\mathscr{R}(I)$. また、有限和に対する三角不等式より、区間分割 Δ とその任意の代表 ξ に対し

$$|s(f,\Delta,\xi)|\le s(|f|,\Delta,\xi).$$

上式で $\mathrm{m}(\Delta)\to 0$ とすれば所期の不等式を得る。 □

問 7.3.3 $1\le p<\infty$, $f\in\mathscr{R}(I)$ に対し $\|f\|_p=\left(\int_I|f|^p\right)^{1/p}$ とおく。$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ とするとき、以下を示せ；
(i) $s,t\ge 0$ に対し $st\le\frac{1}{p}s^p+\frac{1}{q}t^q$,(等号成立 $\iff s^p=t^q$).
(ii) $f,g\in\mathscr{R}(I)$ に対し $\|fg\|_1\le\dfrac{1}{p}\|f\|_p^p+\dfrac{1}{q}\|g\|_q^q$.
(iii) $f,g\in\mathscr{R}(I)$ に対し[43] $\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q$ **(ヘルダーの不等式)**

問 7.3.4 $1\le p\le q<\infty$ とする。ヘルダーの不等式を用い、次を示せ：$\|f\|_p\le\|f\|_q|I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.

問 7.3.5 ヘルダーの不等式を用い、次の（更に一般的な）不等式を示せ；$p,q,r\in[1,\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, $f,g\in\mathscr{R}(I)$ に対し $\|fg\|_r\le\|f\|_p\|g\|_q$.

問 7.3.6 $(\star)$ $1\le p<\infty$, $f,g\in\mathscr{R}(I)$ に対し $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$ **(ミンコウスキーの不等式)**[44] を示せ。ヒント：$p=1$ なら容易。以下 $1<p<\infty$, $h=|f+g|$ とする。$\|h\|_p=0$ なら所期不等式は自明。従って、$\|h\|_p>0$ としてよい。$\|h\|_p^p\le(\|f\|_p+\|g\|_p)\|h\|_p^{p-1}$ を示し、両辺を $\|h\|_p^{p-1}$ で割れば結果を得る。

[43] ヘルダーの不等式の特別な場合（$p=q=2$）はシュワルツの不等式と呼ばれる。K.H.A. Schwarz (1843–1921)。
[44] Hermann Minkowski (1864–1909)

ダルブーの可積分条件の更なる応用の一つとして、積分の区間加法性が示される。

命題 7.3.5 (**積分の区間加法性**) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を有界とする。このとき、I の区間分割 Δ に対し

(a) $f \in \mathscr{R}(I) \iff$ 全ての $J \in \Delta$ に対し $f \in \mathscr{R}(J)$

上の条件のいずれか（従って両方）が成り立てば、

(b) $\displaystyle\int_I f = \sum_{J\in\Delta} \int_J f.$

証明は 7.4 節で与えることにし、ここでは幾つかの応用を述べる。

系 7.3.6 I, J を共に $\mathbb{R}^d$ を有界区間、$J \subset I$ とする。このとき

(a) $\mathscr{R}(I) \subset \mathscr{R}(J)$.

(b) $f \in \mathscr{R}(I)$, I 上 $f \geq 0$ なら $\int_I f \geq \int_J f$.

証明： (a): $f \in \mathscr{R}(I)$ とし、$\Delta \in \mathscr{D}(I)$ を $J \in \Delta$ なるようにとる。そうすれば、命題 7.3.5 (a) より $f \in \mathscr{R}(J)$.
(b): 更に $f \geq 0$ なら、任意の $D \in \Delta$ に対し $\int_D f \geq 0$. 故に 命題 7.3.5 (b) より

$$\int_I f = \sum_{D\in\Delta} \int_D f \geq \int_J f.$$

□

系 7.3.7 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を有界とする。このとき、

(a) $f \in \mathscr{R}(I) \iff f \in \mathscr{R}(\mathring{I})$.

上のいずれか（従って両方）が成り立てば、

(b) $\displaystyle\int_I f = \int_{\mathring{I}} f.$

証明： $I \neq \mathring{I}$ の場合を言えばよい。I の区間分割 $\Delta = \{D_1, D_2, ...\}$ で $D_1 = \mathring{I}$, $|D_k| = 0$ $(k \geq 2)$ なるものが存在する（例 7.1.3 参照）例 7.1.5 より $k \geq 2$ に対し $f \in \mathscr{R}(D_k)$ かつ $\int_{D_k} f = 0$. 従って、区間加法性（命題 7.3.5) より結論を得る。 □

問 7.3.7 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$, 任意の $T > 0$ に対し $f \in \mathscr{R}([0, T])$ とする。$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{[0,T]} f = c$ を示せ。

問 7.3.8 区間の列 $I = I_0 \supset I_1 \supset I_2$ が、$|I_n| > 0$, $I_n \ni a$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ かつ $\mathrm{diam}(I_n) \to 0$ をみたすとする。このとき、 $f \in \mathscr{R}(I)$ かつ f が a で連続なら、$\lim_n \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} f = f(a)$ となることを示せ。

問 7.3.9 $(\star)$ **独立確率変数列の数学的構成:**
A を有限集合、$p_\alpha > 0$ $(\alpha \in A)$ は $\sum_{\alpha\in A} p_\alpha = 1$ を満たすとする。また $\Omega = [0, 1]$ に対し $\Gamma \subset \Omega$ の確率を $P[\Gamma] = \int_\Gamma d\omega$ で定義する（積分が意味をもつとき)。この問題の目的は関数 $X_n : \Omega \to A$ （$n = 1, 2, \ldots$）であって性質；

(1) $$P(\omega; X_j(\omega)=\alpha)=p_\alpha, \quad \forall \alpha\in A$$

(2) $$P\left(\bigcap_{j=1}^n \{\omega; X_j(\omega)=\alpha_j\}\right)=\prod_{j=1}^n P(\omega; X_j(\omega)=\alpha_j) \quad \forall \alpha_j \in A$$

を満たすものの構成である。これは「コインを何度も投げる」といった独立試行の数学的表現である。例えばコイン投げ続けて、 X_n が n 回目に 表か裏かを表わす ($A=\{$ 表, 裏 $\}$, $p_\alpha\equiv 1/2$) と思えば 、(1), (2) はその表現としてふさわしい。
$\Omega=[0,1]$ の閉部分区間の列 $\{I_{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n}; n\ge 1, \alpha_j\in A\}$ を次のように定める；まず Ω を閉区間 I_{α_1} ($|I_{\alpha_1}|=p_{\alpha_1}$, $\alpha_1\in A$) に分割する。次に各 I_{α_1} を閉区間 $I_{\alpha_1\alpha_2}$ ($|I_{\alpha_1\alpha_2}|=p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}$, $\alpha_2\in A$) に分割、以後は同様の手順を繰り返す。$X_n:\Omega\to A$ を

$$X_n(\omega)=\alpha \quad \text{if } \omega\in \bigcup_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\in A} I_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1},\alpha}$$

と定義するとき、(1), (2) を示せ。

7.4 ($\star$) ダルブーの可積分条件・証明編

7.4 節を通じ $I\subset\mathbb{R}^d$ は有界区間、$f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ は有界とする。

定義 7.4.1 記号は 定義 7.2.2 の通りとする。f の**下積分** (lower integral), **上積分** (upper integral) をそれぞれ次のように定める：

$$\underline{s}_I(f)=\sup_{\Delta\in\mathscr{D}(I)}\underline{s}_I(f,\Delta), \quad \overline{s}_I(f)=\inf_{\Delta\in\mathscr{D}(I)}\overline{s}_I(f,\Delta).$$

定義より

$$\underline{s}_I(f,\Delta)\le\underline{s}_I(f), \ \ \overline{s}_I(f)\le\overline{s}_I(f,\Delta). \tag{7.14}$$

ダルブーの可積分条件 I (定理 7.2.3) を次のように一般化して示す（条件 (a)–(c) は定理 7.2.3 と同じ)。

定理 7.4.2 (**ダルブーの可積分条件 II**) 記号は 定義 7.2.2, 定義 7.4.1 の通りとする。以下の条件は全て同値である：

(a) $f\in\mathscr{R}(I)$.

(b) $\displaystyle\lim_{m(\Delta)\to 0} r_I(f,\Delta)=0$.

(c) 任意の $\varepsilon>0$ に対し、$r_I(f,\Delta)<\varepsilon$ を満たす $\Delta\in\mathscr{D}(I)$ が存在する。

(d) $\underline{s}_I(f)=\overline{s}_I(f)$.

更に、上の条件のいずれか（従って全て）が成立するなら

$$\underline{s}_I(f)=\overline{s}_I(f)=\int_I f. \tag{7.15}$$

定理 7.4.2 の証明のうち、次の部分は簡単である。

補題 7.4.3 定理 7.4.2 の各条件について、(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c).

証明：(a) $\Rightarrow$ (b): 仮定より $\forall\varepsilon > 0$ に対し次のような $\delta > 0$ が存在：

(1) $\Delta \in \mathscr{D}(I), \mathrm{m}(\Delta) < \delta \implies \sup_\xi |s_I(f,\Delta,\xi) - s_I(f)| < \varepsilon/4.$

そこで、$\Delta \in \mathscr{D}(I)$ が $\mathrm{m}(\Delta) < \delta$ を満たすとし、以下を示す：

(2) $s_I(f) - \varepsilon/2 < \underline{s}_I(f,\Delta).$

(3) $s_I(f) + \varepsilon/2 > \overline{s}_I(f,\Delta).$

(2), (3) を認めれば、

$$r_I(f,\Delta) = \overline{s}_I(f,\Delta) - \underline{s}_I(f,\Delta) < (s_I(f) + \varepsilon/2) - (s_I(f) - \varepsilon/2) = \varepsilon.$$

となり (b) を得る。
(2), (3) の証明は次の通り：各 $D \in \Delta$ に対し

$$\exists \xi_D \in D,\ \exists \eta_D \in D,\ f(\xi_D) < \inf_D f + \frac{\varepsilon}{4|I|},\ \sup_D f - \frac{\varepsilon}{4|I|} < f(\eta_D).$$

今、Δ の代表として $\xi = \{\xi_D\}_{D\in\Delta}$ を選ぶと

$$\begin{aligned} s_I(f) - \varepsilon/4 &\overset{(1)}{\le} s_I(f,\Delta,\xi) = \sum_{D\in\Delta} f(\xi_D)|D| \\ &\overset{\xi\text{ の選び方}}{<} \sum_{D\in\Delta}\left(\inf_D f + \frac{\varepsilon}{4|I|}\right)|D| = \underline{s}(f,\Delta) + \varepsilon/4. \end{aligned}$$

従って (2) が成立。

一方、Δ の代表として $\eta = \{\eta_D\}_{D\in\Delta}$ を選ぶと

$$\begin{aligned} s_I(f) + \varepsilon/4 &\overset{(1)}{\ge} s_I(f,\Delta,\eta) = \sum_{D\in\Delta} f(\eta_D)|D| \\ &\overset{\eta\text{ の選び方}}{>} \sum_{D\in\Delta}\left(\sup_D f - \frac{\varepsilon}{4|I|}\right)|D| = \overline{s}_I(f,\Delta) - \varepsilon/4. \end{aligned}$$

従って (3) が成立。
(b) $\Rightarrow$ (c): 条件 (b) より任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次のような $\delta > 0$ が存在する：

$$\Delta \in \mathscr{D}(I), \mathrm{m}(\Delta) < \delta \implies r_I(f,\Delta) < \varepsilon.$$

そうすれば $\forall\varepsilon > 0$ に対し $\mathrm{m}(\Delta) < \delta$ を満たす任意の $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ が条件 (c) の要請を満たすことが判る。 □

次に、定理 7.4.2 の (c) $\Rightarrow$ (d) を示す。

補題 7.4.4 $\Delta, \widetilde{\Delta} \in \mathscr{D}(I)$ とする。I の各辺について、Δ の分点が全て $\widetilde{\Delta}$ の分点に含まれるとする（この場合、$\widetilde{\Delta}$ は Δ の**細分** と言う; 絵で説明)。このとき、任意の $J \in \Delta$ に対し

$$\widetilde{\Delta}_J \overset{\text{def.}}{=} \{D \in \widetilde{\Delta}\ ;\ D \subset \overline{J}\} \tag{7.16}$$

は J の区間分割である。また、

$$\overline{s}_I(f,\widetilde{\Delta}) = \sum_{J\in\Delta} \overline{s}_J(f,\widetilde{\Delta}_J), \quad \underline{s}_I(f,\widetilde{\Delta}) = \sum_{J\in\Delta} \underline{s}_J(f,\widetilde{\Delta}_J). \tag{7.17}$$

$$\underline{s}_I(f,\Delta) \le \underline{s}_I(f,\widetilde{\Delta}) \le \overline{s}_I(f,\widetilde{\Delta}) \le \overline{s}_I(f,\Delta). \tag{7.18}$$

証明： $\widetilde{\Delta}_J$ が J の J の区間分割であることは定義から明らか。
(7.17): 第一式を示す（他方も同様）。

(1) $$\overline{s}_I(f,\widetilde{\Delta}) = \sum_{D\in\widetilde{\Delta}} |D| \sup_D f$$

だが、(1) の右辺には $|D| > 0$ を満たす $D \in \widetilde{\Delta}$ のみが寄与している。また、$D \in \widetilde{\Delta}$ かつ $|D| > 0$ なら、$D \in \widetilde{\Delta}_J$ となる $J \in \Delta$ が唯一存在する。従って、

$$\text{(1) の右辺 } = \sum_{J\in\Delta}\sum_{D\in\widetilde{\Delta}_J} |D| \sup_D f = \sum_{J\in\Delta} \overline{s}_J(f,\widetilde{\Delta}_J).$$

(7.18): 真中の不等式は既知（(7.12)）。右端の不等式は次のようにして判る：

$$\overline{s}_J(f,\widetilde{\Delta}_J) \le |J| \sup_J f$$

と (7.17) より

$$\overline{s}_I(f,\widetilde{\Delta}) \le \sum_{J\in\Delta} |J| \sup_J f = \overline{s}_I(f,\Delta).$$

左端の不等式も同様。 □

補題 7.4.5 任意の $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathscr{D}(I)$ に対し $\underline{s}_I(f,\Delta_1) \le \overline{s}_I(f,\Delta_2)$. 従って、特に $\underline{s}_I(f) \le \overline{s}_I(f)$.

証明： 各辺毎に $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ の分点が Δ_1, Δ_2 の分点を全て含むように Δ をとれば Δ は Δ_1, Δ_2 両方を細分する。従って (7.18) より

$$\underline{s}_I(f,\Delta_1) \le \underline{s}_I(f,\Delta) \le \overline{s}_I(f,\Delta) \le \overline{s}_I(f,\Delta_2).$$

上の不等式で、Δ_1 について sup, Δ_2 について inf をとれば $\underline{s}_I(f) \le \overline{s}_I(f)$ が分かる。□

補題 7.4.6 定理 7.4.2 で (c) ⇒ (d).

証明： 条件 (c) の $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ に対し

$$0 \overset{\text{補題 7.4.5}}{\le} \overline{s}_I(f) - \underline{s}_I(f) \overset{(7.14)}{\le} r_I(f,\Delta) < \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので $\overline{s}_I(f) = \underline{s}_I(f)$. □

定理 7.4.2 (d) ⇒ (a) は次の定理 7.4.7 を経由して示す。定理 7.4.7 はリーマン積分の理論上、ひとつの鍵となる。

定理 7.4.7 （ダルブーの定理) 記号は 定義 7.2.2, 定義 7.4.1 の通りとするとき、

$$\underline{s}_I(f) = \lim_{m(\Delta)\to 0} \underline{s}_I(f,\Delta), \quad \overline{s}_I(f) = \lim_{m(\Delta)\to 0} \overline{s}_I(f,\Delta).$$

定理 7.4.7 を示す為に補題を準備する：

補題 7.4.8 $\Delta_0, \Delta \in \mathscr{D}(I)$ とする。更に Δ_0 と Δ の分点を併せて得られる区間分割を $\widetilde{\Delta}$ とする。このとき、I と Δ_0 のみによって決まり Δ には無関係な定数 C が存在して、

$$\sum_{\substack{J\in\Delta \\ \widetilde{\Delta}_J \ne \{J\}}} |J| \le C\mathrm{m}(\Delta).$$

但し、$\widetilde{\Delta}_J$ は (7.16) で定義する。

証明: Δ_0 は I の各辺 I_i $(i=1,...,d)$ に分点 $c_{i1} \le c_{i1} \le ... \le c_{iN_i}$ を与えて得られているとする。$J \in \Delta, \widetilde{\Delta}_J \neq \{J\}$ なら J のどれかの辺 J_i $(i=1,...,d)$ が c_{ik} $(k=1,...N_i)$ を内部に含む。そこで、$i=1,...,d$ と $k=1,...N_i$ に対し、c_{ik} を第 i 辺の内部に含むような $J \in \Delta$ 全体を Δ_{ik} と書くと、全ての $J \in \Delta_{ik}$ は第 i 辺 J_i を共有する（例えば $d=2$ で絵を描いてみれば分かる）。従って、

$$\cup_{J \in \Delta_{ik}} J \subset \{x \in I \; ; \; x_i \in J_i\}.$$

よって、$\displaystyle\sum_{J \in \Delta_{ik}} |J| \le |J_i||I|/|I_i| \le \mathrm{m}(\Delta)|I|/|I_i|.$

以上より、$\displaystyle\sum_{\substack{J \in \Delta \\ \widetilde{\Delta}_J \neq \{J\}}} |J| \le \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{N_i} \sum_{J \in \Delta_{ik}} |J| \le \mathrm{m}(\Delta)|I| \sum_{i=1}^{d} N_i/|I_i|.$ □

定理 7.4.7 の証明: 不足和について示す（過剰和でも同様）。$\varepsilon > 0$ を任意、$\Delta \in \mathscr{D}(I)$ は $C \operatorname{ocs}_I(f)\mathrm{m}(\Delta) < \varepsilon/2$ なるようにとる（ C は 補題 7.4.8 の定数)。一方、$\underline{s}_I(f)$ の定義から次のような $\Delta_0 \in \mathscr{D}(I)$ が存在する：

$$0 \le \underline{s}_I(f) - \underline{s}_I(f, \Delta_0) < \varepsilon/2.$$

Δ_0 と Δ の分点を併せて得られる区間分割を $\widetilde{\Delta}$ とすると、

$$\begin{aligned}
\underline{s}_I(f, \Delta_0) - \underline{s}_I(f, \Delta) &\overset{(7.18)}{\le} \underline{s}_I(f, \widetilde{\Delta}) - \underline{s}_I(f, \Delta) = \sum_{D \in \widetilde{\Delta}} |D| \inf_D f - \sum_{J \in \Delta} |J| \inf_J f \\
&= \sum_{J \in \Delta} \sum_{D \in \widetilde{\Delta}_J} |D|(\inf_D f - \inf_J f),
\end{aligned}$$

但し $\widetilde{\Delta}_J$ は (7.16) で定義する。所が、

$$\sum_{D \in \widetilde{\Delta}_J} |D|(\inf_D f - \inf_J f) \begin{cases} = 0, & \widetilde{\Delta}_J = \{J\} \text{ なら、} \\ \le \operatorname{ocs}_I(f)|J|, & \widetilde{\Delta}_J \neq \{J\} \text{ なら} \end{cases}$$

従って

$$\underline{s}_I(f, \Delta_0) - \underline{s}_I(f, \Delta) \le \operatorname*{ocs}_I(f) \sum_{\substack{J \in \Delta \\ \widetilde{\Delta}_J \neq \{J\}}} |J| \overset{\text{補題 7.4.8}}{\le} C \operatorname*{ocs}_I(f)\mathrm{m}(\Delta) < \varepsilon/2$$

以上より、

$$\underline{s}_I(f) - \underline{s}_I(f, \Delta) \le \underline{s}_I(f) - \underline{s}_I(f, \Delta_0) + \underline{s}_I(f, \Delta_0) - \underline{s}_I(f, \Delta) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

定理 7.4.2 の証明: 補題 7.4.3, 補題 7.4.6 より、(d) $\Rightarrow$ (a) と (7.15) を示せば十分。$s_I(f) = \overline{s}_I(f) = \underline{s}_I(f)$ とおく。ダルブーの定理より、$\forall \varepsilon > 0$ に対し次のような $\delta > 0$ が存在：

$$(*) \;\; \Delta \in \mathscr{D}(I), \mathrm{m}(\Delta) < \delta \implies s_I(f) - \varepsilon \le \underline{s}_I(f, \Delta) \le \overline{s}_I(f, \Delta) \le s_I(f) + \varepsilon.$$

そこで、$\mathrm{m}(\Delta) < \delta$ を満たす $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ とその任意の代表 ξ に対し、(7.13), $(*)$ より

$$s_I(f, \Delta, \xi) \begin{cases} \leq \overline{s}_I(f, \Delta) \leq s_I(f) + \varepsilon, \\ \geq \underline{s}_I(f, \Delta) \geq s_I(f) - \varepsilon. \end{cases}$$

従って

$$\sup_\xi |s_I(f, \Delta, \xi) - s_I(f)| \leq \varepsilon.$$

(7.15): 上記証明から判る。 □

命題 7.3.5 の証明： まず、上積分・下積分について次を示す。

(1) $$\overline{s}_I(f) = \sum_{J \in \Delta} \overline{s}_J(f), \quad \underline{s}_I(f) = \sum_{J \in \Delta} \underline{s}_J(f).$$

Δ の細分 $\widetilde{\Delta}$ に対し $\widetilde{\Delta}_J \in \mathscr{D}(J)$ を再び (7.16) で定義する。$m(\widetilde{\Delta}) \longrightarrow 0$ とすれば、各 $J \in \Delta$ に対し $m(\widetilde{\Delta}_J) \longrightarrow 0$. 従って、

$$\overline{s}_I(f) \overset{\text{定理 7.4.7}}{=} \lim_{m(\widetilde{\Delta}) \to 0} \overline{s}_I(f, \widetilde{\Delta}) \overset{(7.17)}{=} \lim_{m(\widetilde{\Delta}) \to 0} \sum_{J \in \Delta} \overline{s}_J(f, \widetilde{\Delta}_J) \overset{\text{定理 7.4.7}}{=} \sum_{J \in \Delta} \overline{s}_J(f)$$

ここで、上式の $\displaystyle\lim_{m(\widetilde{\Delta}) \to 0}$ は「$\widetilde{\Delta}$ は Δ の細分」という制約付きで $m(\widetilde{\Delta}) \to 0$ とする極限を表すとする。以上で (1) 第一式が示された。他方も同様。

(a) の「$\Rightarrow$」: $f \in \mathscr{R}(I)$ 及び 定理 7.4.2 条件 (d) より

$$\overline{s}_I(f) = \underline{s}_I(f) = \int_I f.$$

従って、(1) より

(2) $$\sum_{J \in \Delta} \underline{s}_J(f) = \sum_{J \in \Delta} \overline{s}_J(f) = \int_I f.$$

所が、各 $J \in \Delta$ に対し

$$\underline{s}_J(f) \leq \overline{s}_J(f).$$

これが、(2) と両立する為には 各 $J \in \Delta$ に対し

$$\underline{s}_J(f) = \overline{s}_J(f).$$

が必要。上式と 定理 7.4.2 条件 (d) より各 $J \in \Delta$ に対し $f \in \mathscr{R}(J)$.

(a) の 「$\Leftarrow$」: 仮定、及び 定理 7.4.2 条件 (d) より、全ての $J \in \Delta$ に対し

$$\overline{s}_J(f) = \underline{s}_J(f) = \int_J f.$$

従って、(1) より

(3) $$\overline{s}_I(f) = \underline{s}_I(f) = \sum_{J \in \Delta} \int_J f.$$

(3) と定理 7.4.2 条件 (d) より $f \in \mathscr{R}(I)$ かつ

$$\overline{s}_I(f) = \underline{s}_I(f) = \int_I f.$$

上式と (3) より (b) の成立も判る。 □

7.5　連続関数の積分

7.5 節では、連続関数の積分について調べる。7.5 節を通じ $I \subset \mathbb{R}^d$ は有界区間とする。また、次の記号を導入する：

$$C_{\mathrm{b}}(I) = \{f \in C(I)\ ;\ f \text{ は有界 }\}. \tag{7.19}$$

定理 7.5.1 (**連続関数の可積分性**) $f : I \to \mathbb{R}$ とする。

(a) $f \in C_{\mathrm{b}}(\overset{\circ}{I})$ なら $f \in \mathscr{R}(I)$. 従って $C_{\mathrm{b}}(I) \subset \mathscr{R}(I)$.

(b) 更に一般に、或る $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ に対し $f \in C_{\mathrm{b}}(\cup_{D\in\Delta} \overset{\circ}{D})$ なら $f \in \mathscr{R}(I)$.

証明の為にいくつかの補題を準備する：

補題 7.5.2 $f \in C(\overline{I})$ は次の性質を持つ：任意の $\varepsilon > 0$ に対し次のような $\delta > 0$ が存在：

$$x, y \in \overline{I}, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{7.20}$$

補題 7.5.2 で述べた f の性質を「一様連続性」（ε を決めたとき、(7.20) が成り立つようなδ を、$x, y \in \overline{I}$ の位置に無関係に選べること）という。一様連続性及び、補題 7.5.2 の証明は 7.6 節で詳しく述べることにし、ここでは補題 7.5.2 を認めて先に進む。

補題 7.5.3 $C(\overline{I}) \subset \mathscr{R}(I)$.

証明： $f \in C(\overline{I})$ とする。最大・最小値存在定理 (定理 5.5.5) より f は有界である。また、一様連続性（補題 7.5.2） より $\forall \varepsilon > 0$ に対し、次のような $\delta > 0$ が存在：

$$A \subset I,\ \mathrm{diam}(A) < \delta \implies \operatorname*{ocs}_A\ f < \varepsilon/|I|.$$

故に、

$$\Delta \in \mathscr{D}(I), m(\Delta) < \delta/\sqrt{d} \implies \max_{D\in\Delta} \operatorname*{ocs}_D\ f < \varepsilon/|I|.$$

従って、

$$r_I(f, \Delta) = \sum_{D\in\Delta} |D| \operatorname*{ocs}_D\ f \le \frac{\varepsilon}{|I|} \sum_{D\in\Delta} |D| = \varepsilon$$

となり、ダルブーの可積分条件（定理 7.2.3） (b) が成立。 □

補題 7.5.4 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が有界なら、次の条件は同値：

(a) $f \in \mathscr{R}(I)$

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次を満たす区間 $J \subset I$ が存在：

$$|I| - |J| < \varepsilon \text{ かつ } f \in \mathscr{R}(J).$$

証明： (a) ⇒ (b): $J = I$ とすればよい。
(b) ⇒ (a): $\sup_I |f| = M$, また、改めて $\varepsilon > 0$ を任意とする。仮定より、区間 $J \subset I$ を

$$|I| - |J| < \varepsilon/(4M) \text{ かつ } f \in \mathscr{R}(J)$$

なるようにとれる。また、$f \in \mathscr{R}(J)$ とダルブーの可積分条件 (c) より、区間分割 $\Delta_J \in \mathscr{D}(J)$ を

$$r_J(f, \Delta_J) < \varepsilon/2$$

なるようにとれる。更に、$\Delta \in \mathscr{D}(I)$ を次のようにとる (絵を描く)：

$$\Delta_J = \{D \in \Delta\ ;\ D \subset J\}.$$

このとき、

$$r_I(f, \Delta) = \sum_{D \in \Delta} \operatorname*{ocs}_D f|D| = \underbrace{\sum_{D \in \Delta_J} \operatorname*{ocs}_D f|D|}_{(1)} + \underbrace{\sum_{D \in \Delta \setminus \Delta_J} \operatorname*{ocs}_D f|D|}_{(2)}$$

に対し

$$\begin{aligned}(1) &= r_J(f, \Delta_J) < \varepsilon/2, \\ (2) &\leq 2M \sum_{D \in \Delta \setminus \Delta_J} |D| = 2M(|I| - |J|) < \varepsilon/2.\end{aligned}$$

従って $(1) + (2) < \varepsilon$. 以上と、ダルブーの可積分条件 (c) より $f \in \mathscr{R}(I)$. □

定理 7.5.1 の証明：(a):任意の $\varepsilon > 0$ に対し閉区間 $J \subset \overset{\circ}{I}$ を $|I| - |J| < \varepsilon$ なるように選べる。このとき、$f \in C(J)$ なので 補題 7.5.3 より $f \in \mathscr{R}(J)$. 以上と、補題 7.5.4 より $f \in \mathscr{R}(I)$.
(b): (a) と区間加法性（命題 7.3.5(a)） による。 □

例 7.5.5 $f(x) = \sin(1/x)$ $(x > 0)$ とすると $f \in \mathscr{R}((0, 1])$.

証明：f は $(0, 1]$ 上有界かつ連続。故に 定理 7.5.1 より $f \in \mathscr{R}((0, 1])$. □

問 7.5.1 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が有界かつ不連続点が有限個なら $f \in \mathscr{R}(I)$ であることを示せ。

命題 7.5.6 (**強単調性**) $f, g \in C_{\mathrm{b}}(I)$, I 上 $f \leq g$ とする。

(a) $f \not\equiv g$ なら $\int_I f < \int_I g$.

(b) $\int_I f = \int_I g$ なら $f \equiv g$

証明：(a): $h = g - f$ とすると、I 上 $h \geq 0$ かつ $h \not\equiv 0$. これから、$\int_I h > 0$ を言えばよい。仮定より $\varepsilon \stackrel{\text{def.}}{=} h(\xi) > 0$ を満たす $\xi \in I$ が存在。連続性より、ξ を含む区間 $J \subset I$ であって、$|J| > 0$ かつ J 上 $h \geq \varepsilon/2$ なるものが存在。この J に対し

$$\int_I h \overset{\text{系 7.3.6(b)}}{\geq} \int_J h \geq \frac{\varepsilon}{2}|J| > 0.$$

(b):(a) の対偶。 □

強単調性を用い、次の命題を示す。

命題 7.5.7 (**第一平均値定理**) $f \in C(\overline{I})$, $g \in C_{\rm b}(I)$ かつ $\overset{\circ}{I}$ 上 $g \geq 0$ とする。このとき、次のような $\xi \in \overset{\circ}{I}$ が存在：

$$\int_I fg = f(\xi) \int_I g$$

証明： I 上 $g \equiv 0$ の場合は自明なので、以下、I 上 $g \not\equiv 0$ とする。
<u>次のような定数 c が存在する場合</u>：

(1) I 上 $fg \equiv cg$

g の連続性から $\overset{\circ}{I}$ 上 $g \not\equiv 0$. 従って $g(\xi) \neq 0$ となる $\xi \in \overset{\circ}{I}$ が存在。これと $fg \equiv cg$ より $f(\xi) = c$ を得る。 従って、(1) 両辺を積分すれば所期結果を得る。
<u>(1) のような定数 c が存在しない場合</u>: 最大・最小値存在定理 (定理 5.5.5) より

$$\exists x_0 \in \overline{I},\ \exists x_1 \in \overline{I},\ f(x_0) = \min_{\overline{I}} f,\ f(x_1) = \max_{\overline{I}} f.$$

今、$g \not\equiv 0$ 及び、強単調性 (命題 7.5.6) より $\int_I g > 0$. そこで $m \stackrel{\rm def.}{=} \frac{\int_I fg}{\int_I g}$ に対し $m = f(\xi)$ となる $\xi \in \overset{\circ}{I}$ の存在を言えばよい。さて、

(2) $f(x_0) < m < f(x_1)$

実際、$f(x_0)g \leq fg \leq f(x_1)g$ および仮定より $f(x_0)g \not\equiv fg$, $fg \not\equiv f(x_1)g$. 故に強単調性 (命題 7.5.6) より

$$f(x_0) \int_I g < \int_I fg < f(x_1) \int_I g,\ \text{即ち (2) が成立する。}$$

一方、次のような $\varphi \in C([0,1] \longrightarrow \overline{I})$ が存在する：

(3) $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$, $t \neq 0, 1$ なら $\varphi(t) \in \overset{\circ}{I}$.

実際、$\{x_0, x_1\} \cap \overset{\circ}{I} \neq \emptyset$ なら $\varphi(t) = (1-t)x_0 + tx_1$ とすればよい。また、$\{x_0, x_1\} \cap \overset{\circ}{I} = \emptyset$ なら $x \in \overset{\circ}{I}$ をひとつ選び、$\varphi(t) = (1-2t)x_0 + 2tx$ $(0 \leq t \leq \frac{1}{2})$, $\varphi(t) = 2(1-t)x + (2t-1)x_1$ $(\frac{1}{2} \leq t \leq 1)$ とすればよい。

このとき、$f \circ \varphi \in C([0,1] \to \mathbb{R})$ に対し $f \circ \varphi(0) = f(x_0)$, $f \circ \varphi(1) = f(x_1)$. 従って (2) と中間値定理（定理 2.3.4）より $\exists t_* \in [0,1]$, $f \circ \varphi(t_*) = m$. 更に $\varphi(t_*) \in \overset{\circ}{I}$ が言えれば $\xi = \varphi(t_*)$ として、証明が終る。ところが (2) より

$$f \circ \varphi(t_*) = m \notin \{f(x_0), f(x_1)\} = \{f \circ \varphi(0), f \circ \varphi(1)\}, \quad \text{従って } t_* \neq 0, 1.$$

これと、(3) より $\varphi(t_*) \in \overset{\circ}{I}$. □

7.6 一様連続性

連続関数であっても、その変動は極めて大きいことがある。例えば $f(x) = x^2$ は x が大きくなると接線が限りなく急勾配となり、大きな変動を持つ。これに対し $f(x) = x + \sin x$ は接線の傾きが一定値以下なので、より穏やかに変動する。7.6 節では、「穏やかな変動を持つ連続関数」である「一様連続関数」について述べ、コンパクト集合上の連続関数が一様連続であること（定理 7.6.3）を示す。7.6 節を通じ、$D \subset \mathbb{R}^d$, $f, g, ...$ は D を定義域とする関数とする。

定義 7.6.1 次の 2 条件を考える：

(UC1) D 内の点列 (a_n), (b_n) について $a_n - b_n \longrightarrow 0$ なら $f(a_n) - f(b_n) \longrightarrow 0$.

(UC2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次のような $\delta > 0$ が存在する：

$$x, y \in D, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{7.21}$$

• 後で示すように、条件 (UC1),(UC2) は同値である。そこで、その一方（従って両方）が成り立つとき、f は **一様連続** (uniformly continuous) と言う。

• 集合 D で定義された実数値関数で、D 上一様連続なもの全体の集合を $C_{\mathrm{u}}(D)$ と記す。

定義 7.6.1 の (UC1),(UC2) が同値であることの証明はひとまず後回し（7.6 節の後半）にしよう。

注：(「連続」と「一様連続」の違い) D で定義された関数 f が連続であるとは、次の条件 (C1) または (C2) と同値である：

(C1) $a, a_n \in D$ $(n = 1, 2, ...)$ について $a_n \longrightarrow a$ なら $f(a_n) \longrightarrow f(a)$.

(C2) 任意の $\varepsilon > 0$ と $x \in D$ に対し次のような $\delta > 0$ が存在する：

$$y \in D, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{7.22}$$

(C1) と (UC1) の比較: (UC1) で特に $b_n \equiv a \in D$ とすると (C1) が得られるから、

D 上一様連続なら、D 上連続である。

だが、逆は正しくない。例えば $f(x) = x^2$ で定められる $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続 （$f \in C(\mathbb{R})$）だが一様連続でない（$f \notin C_{\mathrm{u}}(\mathbb{R})$）。実際、$a_n = n + \frac{1}{n}$, $b_n = n$ とすると、$a_n - b_n = \frac{1}{n} \to 0$ だが、

$$f(a_n) - f(b_n) = 2 + \frac{1}{n^2} \not\longrightarrow 0.$$

(C2) と (UC2) の比較: 両者の差は一見すると微妙だが、この違いを理解することも重要なので説明する。(C2) は <u>ε, x 両方に応じて</u> δ を選べば、(7.22) が成り立つことを意味する（ε が同じでも x が違えば、それに応じて δ を取り替える必要があるかも知れない）。これに対し、(UC2) は <u>ε だけに応じて</u> δ を選べば、x の位置に無関係に (7.21) が成り立つことを意味する（ε さえ決まっていれば、x 毎に δ をとり換える必要がない）。

一様連続関数と、そうでない連続関数の違いについては、これから述べる例と問で感覚を掴むといいだろう。

例 7.6.2 f がヘルダー連続 (例 4.2.3) なら $f \in C_{\mathrm{u}}(D)$. このことは、例えば定義 7.6.1 の条件 (UC1) から明らかである。

問 7.6.1 $\varepsilon > 0$, $0 \le p \le 1$ なら $f(x) = \log x$, $f(x) = x^p$ は $[\varepsilon, \infty)$ 上リプシッツ連続、従って一様連続であることを示せ。

問 7.6.2 $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^d$ に対し以下を示せ：(i) $C_{\mathrm{u}}(D_1 \cup D_2) \subset C_{\mathrm{u}}(D_1) \cap C_{\mathrm{u}}(D_2)$. (ii) $C_{\mathrm{u}}(D_1 \cup D_2) \neq C_{\mathrm{u}}(D_1) \cap C_{\mathrm{u}}(D_2)$ となる例がある。(iii) 次のような $\delta_0 > 0$ が存在すると仮定する：「$x, y \in D_1 \cup D_2$, $|x-y| < \delta_0$ なら $x, y \in D_1$ または $x, y \in D_2$」. このとき、$C_{\mathrm{u}}(D_1 \cup D_2) = C_{\mathrm{u}}(D_1) \cap C_{\mathrm{u}}(D_2)$.

問 7.6.3 (**連続だが一様連続でない例**) 次の各例で $f \in C(D)$ かつ $f \notin C_{\mathrm{u}}(D)$ を示せ：(i) $D = [0, \infty)$, $f(x) = x^p$ $(p > 1)$ (ii) $D = (0, 1]$, $f(x) = 1/x$. (iii) $D = (0, 1]$, $f(x) = \log x$. (iv) $D = (0, 1]$, $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ $(n \in \mathbb{N})$ なら $f(x) = (n+1)(2n+1)|x - \frac{2}{2n+1}|$. この例では、$D$, f ともに有界。

問 7.6.4 $-8 \leq a < \infty$, $f \in D^1((a, \infty))$, f' が正値、非減少かつ $\lim_{x \to \infty} f'(x) = \infty$ のとき、$f \notin C_{\mathrm{u}}((a, \infty))$ を示せ。

問 7.6.5 $D \subset \mathbb{R}^d$ が有界かつ $f \in C_{\mathrm{u}}(D)$ なら f は有界であることを示せ。一方、$D \subset \mathbb{R}^d$ が有界かつ $f \in C(D)$ も有界でも $f \in C_{\mathrm{u}}(D)$ とは限らない（問 7.6.3）。ヒント：定理 5.5.4.

問 7.6.6 ($\star$) $I \subset \mathbb{R}$ が区間、$f \in C_{\mathrm{u}}(I)$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対し次のような $K \in [0, \infty)$ の存在を示せ：$\forall x, y \in I$ に対し $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| + \varepsilon$.

次に、コンパクト集合上では全ての連続関数が一様連続であることを述べる：

定理 7.6.3 (**コンパクト集合上の連続関数は一様連続**) $K \subset \mathbb{R}^d$ がコンパクトなら $C_{\mathrm{u}}(K) = C(K)$.

証明は後回しにする（7.6 節末尾）。定理 7.6.3 は、例えば、有界閉区間上の連続関数のリーマン可積分性（定理 7.5.1）を示す際にも用いられる。実際、コーシーは連続関数の定積分を定義する際 (1823 年)、「暗黙のうちに」この事実を用いた。定理 7.6.3 は現在「ハイネの定理」と呼ばれることもある[45]。

問 7.6.7 $f \in C([0, \infty))$ かつ $f \in C_{\mathrm{u}}([1, \infty))$ なら $f \in C_{\mathrm{u}}([0, \infty))$ であることを示せ。特に、$0 < p \leq 1$, $f(x) = x^p$ は $[0, \infty)$ 上で一様連続である（問 7.6.1 参照）。ヒント：問 7.6.2(iii) を $D_1 = [0, 2]$, $D_2 = [1, \infty)$ として用いる。

問 7.6.8 ($\star$) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする。次のような $p > 0$ が存在するとき、f を**周期関数**、p を f の**周期**という：全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x+p) = f(x)$. 以下を示せ：(i) 周期関数 f の周期全体の集合が最小値 $p_0 > 0$ を持つとき、任意の周期は np_0 $(n \in \mathbb{N} \backslash \{0\})$ と書ける。(ii) f が連続かつ、任意に小さな周期を持てば、f は定数である。(iii) 連続な周期関数 f が定数でなければ、周期全体の集合は最小値 $p_0 > 0$ を持つ。

定義 7.6.1 で (UC1) $\Leftrightarrow$ (UC2) の証明: (UC1) $\Longrightarrow$ (UC2): 対偶を示す。(UC2) を否定すると、$\varepsilon > 0$ が存在し、任意の $\delta > 0$ に対し

$$C_{\delta,\varepsilon} \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in D \times D \,;\, |x - y| < \delta,\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\} \neq \emptyset.$$

[45] Eduard Heine (1821–81) ハイネは 1872 年の論文で、一様連続性の概念を提示し、定理 7.6.3（K が有界閉区間の場合）を示している。だが実は、これらの事実はハイネの師、 ディリクレが 1852 年に行った講義で既に述べている（発表は 1904 年)。

そこで、集合 $C_{1/n,\varepsilon}$ から点 (a_n, b_n) を選ぶ。このとき $|a_n - b_n| < 1/n$ より

$$a_n - b_n \longrightarrow 0.$$

一方、全ての $n \geq 1$ に対し $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$ より

$$f(a_n) - f(b_n) \not\longrightarrow 0.$$

以上より (UC1) は不成立。
(UC1) $\Longleftarrow$ (UC2): $\varepsilon > 0$ に対し (7.21) を満たす $\delta > 0$ を選ぶ。$a_n - b_n \longrightarrow 0$ よりこの δ に対し、$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し

$$n \geq n_0 \implies |a_n - b_n| < \delta.$$

すると (7.21) より

$$n \geq n_0 \implies |f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon.$$

よって $f(a_n) - f(b_n) \longrightarrow 0.$ □

次に定理 7.6.3 を示す。そのために次の補題を用いる：

補題 7.6.4 （部分列による収束判定 II） $a, a_n \in \mathbb{R}^d$ $(n \in \mathbb{N})$ に対し、次は同値である：

(a) $a_n \longrightarrow a.$

(b) $(a_n)_{n\geq 0}$ の任意の部分列 $(a_{k(n)})_{n\geq 0}$ は、更なる部分列 $(a_{\ell(n)})_{n\geq 0}$ で、$a_{\ell(n)} \longrightarrow a$ なるものを含む。

補題 7.6.4 の証明: (a) $\Rightarrow$ (b): $(a_{k(n)})_{n\geq 0}$ は (a_n) の部分列なので $a_{k(n)} \longrightarrow a$. 従って $\ell(n) = k(n)$ とすればよい。
(b) $\Rightarrow$ (a): 背理法による。条件 (a) を否定すると、ある部分列 $(a_{k(n)})_{n\geq 0}$ のいかなる部分列も a に収束しない。特に、$(a_{k(n)})_{n\geq 0}$ は a に収束しない。従って (a_n) は a に収束しない部分列を持つので、(a_n) 自身が a に収束しない。 □

定理 7.6.3 の証明: K 内の点列 $(a_n), (b_n)$ で、$a_n - b_n \longrightarrow 0$ なるものを任意に選び、

$$c_n \stackrel{\text{def.}}{=} f(a_n) - f(b_n) \longrightarrow 0$$

を言う。そのためには、(c_n) の任意の部分列 $(c_{k(n)})$ が、更なる 部分列 $(c_{\ell(n)})$ で $c_{\ell(n)} \longrightarrow 0$ なるものを含めばよい（補題 7.6.4）。

さて、$(a_{k(n)})$ は コンパクト集合 K の点列なので $a \in K$ に収束する部分列 $(a_{\ell(n)})$ を含む。更に、$a_n - b_n \longrightarrow 0$ より $b_{\ell(n)} \longrightarrow a$. 従って、$f$ の連続性から

$$c_{\ell(n)} = f(a_{\ell(n)}) - f(b_{\ell(n)}) \longrightarrow f(a) - f(a) = 0.$$

□

8　微積分の基本公式とその応用

1660 年代の前半にニュートンは、現在「微積分学の基本公式」と呼ばれる微分と積分の関係を発見した。1675 年、ライプニッツもニュートンと独立に微積分学の基本定理の発見に至った。ニュートンとライプニッツによるこれらの発見は、現在の微積分学の出発点となった。

8.1　原始関数と不定積分

定義 8.1.1 $I \subset \mathbb{R}$ は区間、その下端、上端をそれぞれ a, b $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$, $\overset{\circ}{I} = (a, b)$, $f : \overset{\circ}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ とする。

$$F \in D^1(\overset{\circ}{I}) \text{ かつ } \overset{\circ}{I} \text{ 上 } F' = f$$

であるとき、F を f の **原始関数** (primitive function) と言う。

注： $F, G \in C(I) \cap D^1(\overset{\circ}{I})$ かつ F を f の原始関数とするとき、

$$G \text{ が } f \text{ の原始関数} \iff G - F = c \text{ (定数)}$$

証明： $\Longrightarrow$: $(G - F)' = f - f = 0$. 従って微分による増減判定（定理 5.4.6）より $G - F = c$（定数）

$\Longleftarrow$ 明らか。 □

例 8.1.2 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, 及びその原始関数 F の具体例を列挙する $(a > 0)$：

I,	$f = F'$,	f の原始関数 F
$\mathbb{R}$	x^p $(p \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$
$(0, \infty)$	x^p $(p \neq -1)$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$
$(0, \infty)$	$1/x$	$\log x$
$\mathbb{R}$	e^{cx} $(c \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$	$\frac{1}{c}e^{cx}$
$(0, \infty)$	$\log x$	$x \log x - x$,
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x$
$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\tan x$	$-\log \lvert \cos x \rvert$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\, \frac{x}{a}$
$(-a, a)$,	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\, \frac{x}{a}$
(a, ∞)	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\log(x + \sqrt{x^2 - a^2})$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

証明： 各例について $F' = f$ が確認出来る。 □

問 8.1.1 $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ とする。以下の関数の原始関数を求めよ：

(i) $\frac{1}{(x-b)^2+a^2}$. (ii) $\frac{x}{(x-b)^2+a^2}$. (iii) $\frac{1}{x^3+a^3}$. (iv) $\frac{x}{x^3+a^3}$. (v) $\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $(b \neq 0, a)$.

ヒント：(ii):$\frac{x}{(x-b)^2+a^2} = \frac{b}{(x-b)^2+a^2} + \frac{x-b}{(x-b)^2+a^2}$. (iii)$\frac{a^3}{x^3+a^3} = \frac{a}{2(x^2-ax+a^2)} + \frac{1}{3(x+a)} - \frac{2x-a}{6(x^2-ax+a^2)}$. (iv):$\frac{ax}{x^3+a^3} = \frac{a}{2(x^2-ax+a^2)} - \frac{1}{3(x+a)} + \frac{2x-a}{6(x^2-ax+a^2)}$. (v):$\frac{b^2-a^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+b^2}$.

問 8.1.2 $f(x)=x^4+2bx^2+a^2$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a>|b|)$ とする。$1/f$ の原始関数を求めよ。
[ヒント] 次の手順で $1/f$ を変形する：
(i) $f(x)=(x^2+a)^2-2(a-b)x^2=(x^2+2cx+a)(x^2-2cx+a)$, 但し $c=\sqrt{(a-b)/2}$.
(ii) $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{4ac}\left(\frac{x+2c}{x^2+2cx+a}-\frac{x-2c}{x^2+2cx+a}\right)$.

定義 8.1.3 $I\subset\mathbb{R}$ は区間、その下端、上端をそれぞれ a,b $(-\infty\le a<b\le\infty)$, $\overset{\circ}{I}=(a,b)$, $f:\overset{\circ}{I}\to\mathbb{R}$ とする。

•
$$\text{任意の } [u,v]\subset I \text{ に対し } f\in\mathscr{R}((u,v)) \tag{8.1}$$
なら f は I 上 **局所可積分**（locally integrable）であると言い、I 上の局所可積分関数全体を $\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$ と記す。

• $f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$, $x,y\in I$ に対し次の記号を導入する：
$$\int_x^y f=\begin{cases}\int_{(x,y)}f, & x<y,\\ 0, & x=y,\\ -\int_{(y,x)}f, & y<x.\end{cases} \tag{8.2}$$
定義より、x, y の大小に無関係に
$$\int_y^x f=-\int_x^y f. \tag{8.3}$$
注：f が「局所可積分」（つまり $f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$）という意味をひと口で言うと、

任意の $x,y\in I$ に対し $\int_x^y f$ が定義できること

と言えるが、もう少し詳しい注意を述べておこう。

• 定義 8.1.3 で、f の定義域は $\overset{\circ}{I}$ なので、(8.1) では「$f\in\mathscr{R}([u,v])$」ではなく、「$f\in\mathscr{R}((u,v))$」とした ($[u,v]\subset I$ に対し $(u,v)\subset\overset{\circ}{I}$ だが、$[u,v]\subset\overset{\circ}{I}$ とは限らない!)。

• $I\subset\mathbb{R}$ が有界区間、$f:\overset{\circ}{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ も有界関数なら $f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)\iff f\in\mathscr{R}(\overset{\circ}{I})$（補題 7.5.4）. 一方、$I$ が非有界区間、或いは f が I の境界で発散する場合（$I=(0,\infty)$ $f(x)=1/x$, $\log x$ 等）でも $f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$, $x,y\in I$ でありさえすれば、$\int_x^y f$ を定義できる。これが、局所可積分という概念（$\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$ という記号）の利点のひとつである。

• $a\in\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}([a,b))$ なら、$\int_a^x f$ $(x\in I)$ を定義できるが、$f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a,b))$ なら、一般には $\int_a^x f$ $(x\in I)$ を定義出来ない。(例えば $f(x)=1/x$ なら、$f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((0,\infty))$ だが $\int_0^1 f$ は定義できない)。同様に $b\in\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a,b])$ なら、$\int_x^b f$ $(x\in I)$ を定義できるが、$f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a,b))$ なら、一般には $\int_x^b f$ $(x\in I)$ を定義出来ない。

問 8.1.3 以下を示せ： (i) I が有界なら、$\mathscr{R}(\overset{\circ}{I})\subset\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$. (ii) $C(I)\subset\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$. (iii) $a\in\mathbb{R}$ のとき、$C((a,b))\not\subset\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}([a,b))$, $b\in\mathbb{R}$ のとき、$C((a,b))\not\subset\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a,b])$.

記号 (8.2) の「使用上の注意」を、次の補題にまとめる。

補題 8.1.4 記号は 定義 8.1.3 の通り、 $f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$, $x,y,z\in I$ とするとき、

(a) $\left|\int_x^y f\right| \le \int_{x\wedge y}^{x\vee y} |f|.$

(b) $\int_x^z f = \int_x^y f + \int_y^z f$ （x, y, z の大小関係に関わらず）.

証明：(a): $J = (x\wedge y, x\vee y)$ とすると、

$$\left|\int_x^y f\right| = \left|\int_J f\right| \le \int_J |f| = \int_{x\wedge y}^{x\vee y} |f|.$$

(b):

$$F(x,y) = \int_x^y f, \quad G(x,y,z) = F(x,y) + F(y,z) + F(z,x)$$

とおく。$F(z,x) = -F(x,z)$ に注意すれば、示すべき事は

$$(*) \qquad G(x,y,z) = 0.$$

今、x, y, z を大きさの順に $u \le v \le w$ と並べ替える。このとき、(u,w) の区間分割 (u,v), (v,w) に関して区間加法性を用い、

$$\int_u^w f = \int_u^v f + \int_v^w f \text{ 即ち } G(u,v,w) = 0.$$

さて、x, y, z は u, v, w の置換（6 個ある）のうちどれかである。G の定義式の対称性 (変数の巡回置換不変性) から、

$$G(u,v,w) = G(v,w,u) = G(w,u,v), \quad G(w,v,u) = G(v,u,w) = G(u,w,v).$$

$F(y,x) = -F(x,y)$ より

$$G(w,v,u) = -G(u,v,w).$$

これらから $(*)$ が判る。 □

注：$\left|\int_x^y f\right| \le \int_x^y |f|$ は一般には正しくない（$\int_{(x\wedge y, x\vee y)} |f| \ne 0$, $x > y$ なら右辺は負！）。

定義 8.1.5 $I \subset \mathbb{R}$ は区間、$f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$, $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ とし、次の 2 条件を考える：

(a) 任意の $x, y \in I$ に対し

$$\int_y^x f = F(x) - F(y). \tag{8.4}$$

（上式右辺を $[F]_y^x$ と書くこともある。）

(b) $c_1 \in I$, $c_2 \in \mathbb{R}$ を用い、

$$F(x) = \int_{c_1}^x f + c_2 \tag{8.5}$$

と表せる。

これらは、同値であり、これらの一方（従って両方が）成り立つとき、F を f の **不定積分** (indefinite integral) と言う。

(a) ⇔ (b) の証明：(a) ⇒ (b): $c_1 \in I$ を任意に選び、(8.4) で $y = c_1$ とすると

$$F(x) = \int_{c_1}^x f + F(c_1).$$

(a) ⇐ (b): 任意の $x, y \in I$ に対し

$$F(x) - F(y) = \left(\int_{c_1}^x f + c_2\right) - \left(\int_{c_1}^y f + c_2\right) = \int_y^x f.$$

□

8.2　微積分の基本公式

次の定理により、適当な条件下で原始関数が不定積分を与える：

定理 8.2.1 （**微積分の基本公式**）$I \subset \mathbb{R}$ は区間、その下端、上端をそれぞれ a, b $(-\infty \le a < b \le \infty)$, $\overset{\circ}{I} = (a,b)$ とする。$F \in C(I) \cap D^1(\overset{\circ}{I})$, $f \overset{\text{def.}}{=} F' \in \mathscr{R}_{\text{loc}}(I)$ なら、

$$\text{任意の } x, y \in I \text{ に対し } \int_y^x f = [F]_y^x, \tag{8.6}$$

つまり、上記仮定のもとで、f の原始関数 F は f の不定積分である。

注：• 定理 8.2.1 は模式的に

$$F \overset{\text{微分}}{\longrightarrow} f \overset{\text{積分}}{\longrightarrow} F$$

と表現できる。これは関数 f に対しその原始関数 F を求める事により f の不定積分が求まる事を意味し、応用上積分計算の基礎となる。例えば例 8.1.2 の各例の f と F を (8.6) 代入した式が成立する。

• $F' \in \mathscr{R}_{\text{loc}}((a,b))$ のとき、F' は a, b を端点とする区間上で可積分でなくてもよいことに再度注意。これにより、 定理 8.2.1 が例 8.1.2 の $1/x$, $\log x$ の等のように定義域が開区間、その境界で発散する例も含めて適用出来る[46]。

証明：$x < y$ の場合を考え る（$y < x$ の場合も同様）。区間 (x, y) に N 等分点

$$x = c_0 < c_1 < ... < c_{N-1} < c_N = y$$

を与える[47]。平均値定理より $k = 1, 2, .., N$ に対し

$$\exists \xi_k \in (c_{k-1}, c_k), \ F(c_k) - F(c_{k-1}) = f(\xi_k)(c_k - c_{k-1}).$$

従って、(x, y) の N 等分割 $\{(c_{k-1}, c_k)\}_{k=1}^N$ と代表 $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ に関する f のリーマン和 は、

$$\sum_{k=1}^N f(\xi_k)(c_k - c_{k-1}) = \sum_{k=1}^N (F(c_k) - F(c_{k-1})) = F(y) - F(x).$$

$f \in \mathscr{R}((x, y))$ と上式より

$$\int_x^y f = \lim_N \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\xi_k) = F(y) - F(x).$$

□

　定理 8.2.1 の "発見" は、ニュートン, ライプニッツまで遡る。しかし、 最初の厳密な証明は 1823 年 コーシーが与えた。

　次の定理により、適当な条件下で不定積分は原始関数でもある（定理 8.2.1 の逆）：

定理 8.2.2 $I \subset \mathbb{R}$ は区間、その下端、上端をそれぞれ a, b $(-\infty \le a < b \le \infty)$, $\overset{\circ}{I} = (a,b)$, $f \in \mathscr{R}_{\text{loc}}(I)$, $F : I \to \mathbb{R}$, F は f の不定積分とする。このとき、

[46]多くの教科書で、定理 8.2.1 に相当する定理を述べる際、はじめから I を有界閉区間に限っている。確かに（適当な有界閉区間に制限すれば）本質はその場合に尽きるが、具体例には自然な定義域が開区間であり、境界では定義出来ないものも多い。その意味で I を有界閉区間と限らない方が、具体例との対応が見やすい。

[47]簡単の為 N 等分としたが、特にその必要はない。

(a) $F \in C(I)$.

(b) f が $x \in I$ で連続[48]$\Longrightarrow F$ は x で可微分かつ $F'(x) = f(x)$.

(c) $f \in C(\overset{\circ}{I}) \cap \mathscr{R}_{\rm loc}(I)$ なら、F は f の原始関数である。

注： • 定理 8.2.2 は模式的に

$$f \overset{\text{積分}}{\longrightarrow} \text{不定積分} \overset{\text{微分}}{\longrightarrow} f$$

と表現できる。

• 定理 8.2.2(b) で f の x における連続性を仮定したが、この仮定がないと $F'(x)$ の存在は保証されない。例えば、$f = 1_{[0,\infty)}$ に対し $F(x) = \int_0^x f = x \vee 0$ は $x = 0$ で可微分でない。一方、f の不連続点で F が可微分な例もある（問 8.2.3 参照)。

• 定理 8.2.1 と 定理 8.2.2(c) を併せると、$f \in C(\overset{\circ}{I}) \cap \mathscr{R}_{\rm loc}(I)$ に対し、「f の原始関数」と「f の不定積分」は、実は同一概念になることが分る。

証明：(a):連続性を言うには次を示せば十分。任意の有界閉区間 $K \subset I$, $x, y \in K$ に対し

$$|F(x) - F(y)| \le M|x - y|,$$

但し $M = \sup_K |f|$. ところが、

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_y^x f \right| \le \int_{x \wedge y}^{x \vee y} |f| \le M \underbrace{(x \vee y - x \wedge y)}_{=|x-y|}.$$

(b): $y \in I$, $y \neq x$ とする。

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) = \underbrace{\frac{1}{y - x} \int_x^y (f(z) - f(x)) dz}_{(1)}.$$

今、f は x で連続なので $\forall \varepsilon > 0$ に対し次のような $\delta > 0$ が存在：

$(*)$ $z \in I,\ |x - z| < \delta \implies |f(z) - f(x)| < \varepsilon.$

今、(1) で $|x - y| < \delta$ とする。このとき、積分変数 z についても $|x - z| < \delta$ なので、$(*)$ より

$$|(1)| \le \left| \frac{1}{y - x} \int_x^y |f(z) - f(x)| dz \right| \le \varepsilon.$$

以上より、$y \to x$ で、

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} \longrightarrow f(x).$$

(c): (b) の帰結。 □

問 8.2.1 $f, g \in C([0,\infty) \to (0,\infty))$ とする。$\frac{f}{g}$ が単調増加なら $t \mapsto \frac{\int_0^t f}{\int_0^t g}$ も単調増加であることを示せ。

---

[48] $x \in I \setminus \overset{\circ}{I}$ なら「f が $x \in I$ で定義されかつ x で連続」と解釈する。(c) でも同様。

問 8.2.2 $\int_0^x f^2$ を、$f = \cos, \sin, \mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}$ の各場合について求めよ。ヒント： f を exp を使って表せば計算しやすい。

問 8.2.3 $F(x) = x^2 \sin(1/x)$ $(x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$, $F(0) = 0$ とする。以下を示せ:(i) $F \in D^1(\mathbb{R})$. (ii) $F' \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, (iii) $F'(x)$ は $x = 0$ で不連続。(iv) $F(x) = \int_0^x F'$ $(x \in \mathbb{R})$.
この問の F は不連続な導関数を持つ可微分関数であると同時に、不連続関数の不定積分で、可微分な例（定理 8.2.2 参照）でもある。

問 8.2.4 $-\infty < a < b < \infty$, $f \in \mathscr{R}([a, b])$, $a = a_0 < a_1 < ... < a_n \to b$, $b = b_0 > b_1 > ... > b_n \to b$ とする。$\int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_{n+1}}^{b_n} f$ を示せ。

問 8.2.5 次を示せ：$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \lfloor\frac{1}{x}\rfloor\right)\,dx = 1 - \gamma$ (γ は オイラーの定数：問 3.3.1).

問 8.2.6 (**グロンウォールの不等式**[49]) $\alpha \in \mathbb{R}$, $I = [0, T]$ とする。$u \in C(I \to \mathbb{R})$, $v \in C(I \to [0, \infty))$ が、$u(t) \le \alpha + \int_0^t vu$, $\forall t \in I$ を満たすとき、次を示せ：$u(t) \le \alpha \exp\left(\int_0^t v\right)$ $\forall t \in I$.
ヒント：$V(t) = \int_0^t v$, $F(t) = e^{-V(t)} \int_0^t vu$, $G(t) = \alpha\left(1 - e^{-V(t)}\right)$ とおいて $F \le G$ を示せばよい。そこで $F - G$ を微分する。

問 8.2.7 ($\star$) $\alpha \in \mathbb{R}$, $I = [0, T]$, $u \in C(I \to \mathbb{R})$, $v \in C(I \to [0, \infty))$ とする。次の (a),(b) が同値であることを示せ。
(a) $u(t) = \alpha + \int_0^t vu$, $\forall t \in I$ (b) $u(t) = \alpha \exp\left(\int_0^t v\right)$ $\forall t \in I$..
ヒント： まず、(b) $\Rightarrow$ (a) を示す（これは容易）。
(a) $\Rightarrow$ (b): $u_*(t) = \alpha \exp\left(\int_0^t v\right)$ とおくとき、$w = |u - u_*|$ に対し $w(t) \le \int_0^t vw$, $\forall t \in I$.
そこで、グロンウォールの不等式（問 8.2.6）を用いよ。

問 8.2.8 ($\star$) $I = [0, \infty)$, $u \in C^1(I \to \mathbb{R})$, $v, w \in C(I \to \mathbb{R})$,
$\frac{d}{dt}u(t) \le v(t)u(t) + w(t)$, $\forall t > 0$ とする。このとき、$u(t) \le \left(u(0) + \int_0^t we^{-V}\right) e^{V(t)}$, $\forall t > 0$ を示せ、但し $V(t) = \int_0^t v$.

問 8.2.9 ($\star$)(**逆関数の積分**) $J \subset \mathbb{R}$ を区間、$g \in C(J) \cap D^1(\mathring{J})$, $\mathring{J}$ 上 $g' > 0$ とする。中間値定理（定理 2.3.4）より $I = g(J)$ は区間、また g の逆関数 $f = g^{-1} : I \longrightarrow J$ に対し、逆関数微分定理（定理 6.3.1） より $f \in C(I) \cap D^1(\mathring{I})$ このとき、次を示せ：任意の $u, v \in I$ に対し $\int_u^v f = [xf(x)]_u^v - \int_{f(u)}^{f(v)} g$. （この式はグラフを描くと “納得” 出来る）

問 8.2.10 ($\star$) 次の $f : I \to \mathbb{R}$ について 問 8.2.9 の結果を用い原始関数を求めよ。(i) $I = [-1, 1]$, $f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x$. (ii) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$.

8.3 置換積分・部分積分

以下、積分の計算や評価に有用な公式を幾つか述べる。それらが成立するための細かい条件はあまり気にする必要はない。むしろ実際に応用する中で使い方を体で覚えることが重要である。

連鎖律と、微積分の基本公式を組み合わせることにより、置換積分公式を得る：

[49]Thomas Hakon Grönwall (1877–1932). フーリエ級数や積分方程式の他、解析数論も研究した。ここで述べた不等式の証明は 1919 年。

命題 8.3.1 (**置換積分 I**) $I,\ J$ は共に $\mathbb{R}$ 内の有界閉区間とし、以下を仮定する。

(a) $g \in C(J) \cap D^1(\mathring{J})$

(b) $I = g(J)$ とするとき、$f \in C(I)$ かつ $(f \circ g)g' \in \mathscr{R}(\mathring{J})$

(例えば $f \in C(I)$ かつ $g \in C^1(J)$ なら十分) このとき、$\alpha, \beta \in J$ に対し

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g)(x) g'(x) dx.$$

注：置換積分 I は積分変数 y を関数 $f(x)$ に置き換えて積分する公式である。「形式的導出」 は次の通り：$y = g(x)$ とすると、$dy/dx = g'(x)$ だから、これらを（後者は「$dy = g'(x)dx$」 として！）左辺に代入すると右辺を得る。

証明：F を f の不定積分とする。このとき、定理 8.2.2 より

$$F \in D^1(I) \cap C(I),\ F' = f \in C(I).$$

よって、微積分の基本公式 (定理 8.2.1) から

(1) $$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = [F]_{g(\alpha)}^{g(\beta)} = [F \circ g]_{\alpha}^{\beta}.$$

一方、 g に対する仮定と連鎖律（命題 5.1.10） より

$$F \circ g \in C(J) \cap D^1(\mathring{J}) \text{ かつ } \mathring{J} \text{ 上 } (F \circ g)' = (f \circ g)g' \in \mathscr{R}(\mathring{J}).$$

よって、微積分の基本公式 (定理 8.2.1) から

(2) $$[F \circ g]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ g)' = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g)g'.$$

(1),(2) を併せて結論を得る。 □

例 8.3.2 $f \in C([0,1]^2)$ に対し

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t, 1-t)\, d\theta &= \int_0^1 f(1-t, t)\, d\theta. \\ \int_0^{\pi/2} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta &= \int_0^{\pi/2} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

証明：第 1 式: t を $1-t$ に置換。
第 2 式： θ を $\frac{\pi}{2} - \theta$ に置換。 □

問 8.3.1 $f \in C([0,T]), f(T-x) = f(x)\ (\forall x \in [0,T])$ とする。$\int_0^T xf(x)\, dx = \frac{T}{2} \int_0^T f$ を示せ。

例 8.3.3

$$\begin{array}{ll} \int_0^x f = \frac{1}{2}xf(x) + \frac{a^2}{2}\mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{a}, & |x| \le a,\ f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \\ \int_0^x f = \frac{1}{2}xf(x) + \frac{a^2}{2}\mathrm{sh}^{-1}\frac{x}{a}, & x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}, \\ \int_a^x f = \frac{1}{2}xf(x) + \frac{a^2}{2}\mathrm{ch}^{-1}\frac{x}{a}, & x \ge a,\ f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}. \end{array}$$

証明： $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ の場合を示す。

$$\int_0^x f(y)dy \overset{\text{置換 } y=a\sin s}{=} a^2\int_0^t \cos^2 s\; ds \overset{\text{問 } 8.2.2}{=} \frac{a^2}{2}(\cos t\sin t+t)=\frac{1}{2}xf(x)+\frac{a^2}{2}\text{Arcsin}\,\frac{x}{a}.$$

$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}$, $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ の場合はそれぞれ $x=a\,\mathrm{sh}\,t$, $x=a\,\mathrm{ch}\,t$ と変換して同様の計算が出来る（問 8.3.2)。 □

問 8.3.2 例 8.3.3 で、$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}$, $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ の場合を示せ。

問 8.3.3 等式、$\frac{1}{\cos}=\frac{\cos}{1-\sin^2}$, $\frac{1}{\mathrm{ch}}=\frac{\mathrm{ch}}{1+\mathrm{sh}^2}$ と置換積分を用い、以下を示せ：

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{\cos} &= \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right), \quad 0\le x<\pi/2,\\ \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}} &= \text{Arctan}\,(\mathrm{sh}\,x), \quad x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

問 8.3.4 ($\star$) (**リーマン・ルベーグの補題**) $I=[a,b](-\infty<a<b<b<\infty)$, $f\in C(I)$, $\theta\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ とする。次を示せ：

$$\left|\int_I f(x)e^{2\pi \mathbf{i}\theta x}dx\right| \le (b-a)\sup_{\substack{x,y\in I\\ |x-y|\le 1/|\theta|}}|f(x)-f(y)|+\frac{\max_I|f|}{|\theta|},$$

$$\text{従って}\quad \lim_{|\theta|\to\infty}\int_I f(x)e^{2\pi\mathbf{i}\theta x}dx=0.$$

置換積分公式は次の形で応用される場合も多いが、(逆関数を考えることにより) 結局 命題 8.3.1 の特別な場合である。

系 8.3.4 (**置換積分 II**) I は $a,b\in\mathbb{R}$ を端点とする閉区間とし、以下を仮定する：

(a) $h\in C(I)\cap D^1(\mathring{I})$, $\mathring{I}$ 上 $h'>0$ (または $\mathring{I}$ 上 $h'<0$).

(b) $J=h(I)$, $\varphi\in C(J)$.

(c) h の逆関数[50] $g:J\longrightarrow I$ について $\varphi g'\in\mathscr{R}(\mathring{J})$.

このとき、

$$\int_a^b(\varphi\circ h)(x)\,dx=\int_{h(a)}^{h(b)}\varphi(y)g'(y)\,dy.$$

注： 置換積分 II は関数 $h(x)$ を積分変数 y に置換して積分する公式である。「形式的導出」 は次の通り：$y=h(x)$ 即ち $x=g(y)$ とすると、$dx/dy=g'(y)$ だから、これらを（後者は 「$dx=g'(y)dy$」 として！）左辺に代入すると右辺を得る。

系 8.3.4 の証明： $f=\varphi\circ h$, また h の逆関数を g とすると、f, g は命題 8.3.1 の仮定を満たす。$\alpha=h(a)$, $\beta=h(b)$ とおくと、

$$\int_a^b\varphi\circ h=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}f \overset{\text{置換積分 I}}{=} \int_\alpha^\beta (f\circ g)g'=\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)}\varphi g'.$$

□

積の微分と、微積分の基本公式を組み合わせることにより、部分積分公式を得る：

[50] 逆関数定理 (定理 6.3.1) より $g\in C(J)\cap D^1(\mathring{J})$

命題 8.3.5 (**部分積分**) $I \subset \mathbb{R}$ は $a, b \in \mathbb{R}$ を端点とする閉区間、

$$f, g \in C(I) \cap D^1(\mathring{I}), \ \ f'g, fg' \in \mathscr{R}(\mathring{I})$$

とする (例えば $f, g \in C^1(I)$ なら十分)。このとき、

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

証明：仮定から

(1) $fg \in C(I) \cap D^1(\mathring{I})$.

また、

(2) $(fg)' = f'g + fg' \in \mathscr{R}(\mathring{I})$.

以上と微積分の基本公式（定理 8.2.1）より

$$[fg]_a^b = \int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'.$$

□

例 8.3.6 以下の等式（例 8.3.3 ）を部分積分の応用として再証明する：

$$\begin{array}{ll} \int_0^x f = \frac{1}{2}xf(x) + \frac{a^2}{2}\mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{a}, & |x| \le a, \ f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \\ \int_0^x f = \frac{1}{2}xf(x) + \frac{a^2}{2}\mathrm{sh}^{-1}\frac{x}{a}, & x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}, \\ \int_a^x f = \frac{1}{2}xf(x) + \frac{a^2}{2}\mathrm{ch}^{-1}\frac{x}{a}, & x \ge a, \ f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}. \end{array}$$

証明： $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ の場合を示す。部分積分より

$(*)$ $I \stackrel{\text{def.}}{=} \displaystyle\int_0^x f = xf(x) + \int_0^x \frac{y^2\,dy}{f(y)}.$

所が、

$$\int_0^x \frac{y^2\,dy}{f(y)} = \int_0^x \frac{-(a^2 - y^2) + a^2}{f(y)}\,dy = -I + a^2\mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{a}.$$

これを $(*)$ に代入し、I について解けばよい。$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ の場合も同様（問 8.3.5)。 □

問 8.3.5 例 8.3.6 で、$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ の場合の証明に倣い、$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ の場合を示せ。

問 8.3.6 $(\star)$ $m, n \in \mathbb{N}$, f は $2n$ 次以下の多項式とする。次を示せ：

$$\int_0^{\frac{m\pi}{2}} f \sin = \begin{cases} \sum_{k=0}^n (-1)^k \{f^{(2k)}(0) - (-1)^{\frac{m}{2}} f^{(2k)}(\frac{m\pi}{2})\}, & m \in 2\mathbb{N}, \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \{f^{(2k)}(0) + (-1)^{\frac{m-1}{2}} f^{(2k+1)}(\frac{m\pi}{2})\}, & m \notin 2\mathbb{N} \end{cases}$$

問 8.3.7 $(\star)$ 円周率 π は無理数であることを証明する。以下の (i)–(v) を示し、証明を完成せよ: $p, q > 0$ に対し多項式 $f_n(x) = x^n(p - qx)^n/n!$ を考える。$r = p/q$ とするとき、(i) $f_n(x) = f_n(r - x)$. (ii) $f_n(x) = \displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{m=n}^{2n} \begin{pmatrix} n \\ m-n \end{pmatrix} p^{2n-m}(-q)^{m-n}x^m.$

(iii) $0 \le m < n$ なら $f_n^{(m)}(r) = (-1)^m f_n^{(m)}(0) = 0$, $n \le m \le 2n$ なら

$f_n^{(m)}(r) = (-1)^m f_n^{(m)}(0) = \dfrac{(-1)^m m!}{n!}\left(\begin{array}{c} n \\ m-n \end{array}\right) p^{2n-m}(-q)^{m-n}$.
(iv) 積分 $I(f_n) = \int_0^r f_n \sin$ について $\lim_n I(f_n) = 0$. (v) $\pi = p/q\,(p, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$ と仮定し矛盾を導く。この p, q を用いて f_n を定義した場合の積分 $I(f_n)$ について $I(f_n) \geq 1$. これは (iv) と矛盾する。ヒント：問 8.3.6 より $I(f_n) \in \mathbb{Z}$.

命題 8.3.7 ($\star$)(**第 2 平均値定理**) $I \subset \mathbb{R}$ は $a, b \in \mathbb{R}$ を端点とする閉区間とし、以下を仮定する：

(a) $f \in C_{\mathrm{b}}(\overset{\circ}{I})$.

(b) $G \in C(I) \cap D^1(\overset{\circ}{I})$, $G' \in C_{\mathrm{b}}(\overset{\circ}{I})$（例えば $G \in C^1(I)$ なら十分）かつ G は I 上単調。

このとき、次を満たす $c \in \overset{\circ}{I}$ が存在する：

$$\int_a^b fG = G(b)\int_c^b f + G(a)\int_a^c f.$$

証明：F を f の不定積分とする。このとき、定理 8.2.1(b) より $F \in C(I)$. 更に G' は $\overset{\circ}{I}$ 上有界連続かつ定符合。そこで、第 1 平均値定理（命題 7.5.7）を区間 $\overset{\circ}{I}$ に適用し、

$(*)$ $\exists c \in \overset{\circ}{I}, \displaystyle\int_a^b FG' = F(c)\,[G]_a^b$.

これらを用い、以下の如く結論を得る：

$$\begin{aligned}\int_a^b fG &\overset{\text{部分積分}}{=} [FG]_a^b - \int_a^b FG' \overset{(*)}{=} [FG]_a^b - F(c)\,[G]_a^b \\ &= G(b)\,[F]_c^b + G(a)\,[F]_a^c = G(b)\int_c^b f + G(a)\int_a^c f.\end{aligned}$$

□

問 8.3.8 ($\star$) $\left|\int_0^x \sin(1/y)dy\right| \leq cx^2$ を示せ、但し c は x に無関係な定数。

8.4 テイラー展開

本節で述べるテイラーの定理は、多くの教科書で微分法に関する定理として述べらる。一方、テイラーの定理の証明は微積分の基本公式の応用と捉える考え方は自然であり、剰余項の積分表示も応用上重要である。講義では上記の理由から、テイラーの定理を積分の応用として述べることにする。また、ロルの定理を用いた証明も併記する（積分による証明に比べて技巧的であるが、可積分性が不要な分、条件は少し緩められる）。

以下で $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ を有界な開区間、$\overline{I} = [\alpha, \beta]$ とする。

定理 8.4.1 (テイラーの定理)[51]
$a, b \in \overline{I}$, $f \in C^n(\overline{I})$ $(n = 1, 2, ..)$ に対し $R_{n,a,b}$ を

$$f(b) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(b-a)^m}{m!} + R_{n,a,b} \tag{8.7}$$

により定め、テイラーの定理における n **次剰余**と呼ぶ。このとき、任意の $a, b \in \overline{I}$ に対し、以下が成立する：

[51] Brooks Taylor (1685–1731)

(a) $R_{n,a,b} = \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f^{(n)}(x_n) dx_n.$

(b) $R_{n,a,b} = \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)}{(n-1)!} dx.$

(c) $R_{n,a,b} = \frac{f^{(n)}(c)(b-a)^n}{n!}$ を満たす $c \in (a \wedge b, a \vee b)$ が存在する。

証明：(a), (b) は同時に示す。

$n = 1$ のとき、$f \in C^1(\overline{I})$. 従って微積分の基本公式より、

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x_1) dx_1$$

故に (a),(b) は共に成立。

次に、(a),(b) が n で成立するとし、$f \in C^{n+1}(\overline{I})$ を仮定する。微積分の基本公式より、

$$f^{(n)}(x_n) = f^{(n)}(a) + \int_a^{x_n} f^{(n+1)}(x_{n+1}) dx_{n+1}.$$

これを (a) に代入し、

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} dx_n = (b-a)^n/n!$$

に注意すれば、$n+1$ に対する (a) を得る。また、部分積分より

$$\text{(b) 右辺} = \underbrace{\left[-\frac{(b-x)^n f^{(n)}(x)}{n!} \right]_a^b}_{= \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!}} + \int_a^b \frac{(b-x)^n f^{(n+1)}(x)}{n!} dx.$$

となり、$n+1$ に対する (b) を得る。

(c): (b) において、$(b-x)^{n-1}$ は $(a \wedge b, a \vee b)$ 上定符合。故に積分の平均値定理（命題 7.5.7）より

$$\exists c \in (a \wedge b, a \vee b), \quad \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)}{(n-1)!} dx = f^{(n)}(c) \underbrace{\int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx}_{=(b-a)^n/n!}.$$

□

注： 定理 8.4.1(c) の $c \in (a \wedge b, a \vee b)$ は $\theta \in (0,1)$ を用いて $c = a + (b-a)\theta$ と書けるから、定理 8.4.1(c) を、

$$R_{n,a,b} = \frac{f^{(n)}(a + (b-a)\theta)(b-a)^n}{n!} \text{ を満たす } \theta \in (0,1) \text{ が存在する}$$

と言い換えても同じことである。

問 8.4.1 $n \geq 2$, $f \in C^n(\overline{I})$ に対し、次を示せ：

$$\lim_{\substack{b \to a \\ b \neq a}} (b-a)^{-n} \left(f(b) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(b-a)^m}{m!} \right) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

なお、問 8.4.5 も参照。

問 8.4.2 $f \in C^2(\overline{I})$, $a \in I$ に対し、次を示せ：

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} h^{-2}(f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)) = f''(a).$$

なお、問 8.4.6 も参照。

問 8.4.3 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = \frac{1}{(2n+2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2}$ とするとき以下を示せ：

$$\sin x - \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \in \begin{cases} (-\varepsilon_n, 0), & n \text{ が偶数のとき、} \\ (0, \varepsilon_n), & n \text{ が奇数のとき。} \end{cases}$$

例 5.2.5 より、巾級数：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

が、$x = a \pm r$ で絶対収束するなら、$f \in C^\infty(a-r, a+r)$. 次に述べる定理 8.4.2 は逆に、与えられた C^∞ 関数がある条件のもとで巾級数に展開できることを主張する。

定理 8.4.2 (テイラー展開)

$f \in C^\infty(\overline{I})$ が条件

(a) $\lim_n (|I|^n/n!) \sup_I |f^{(n)}| = 0$

を満たすとする ($|I|$ は区間 I の長さ：$|I| = \beta - \alpha$)。このとき、

(b) 任意の $a \in \overline{I}$ に対し

$$\lim_n \sup_{x \in \overline{I}} \left| f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^m}{m!} \right| = 0.$$

(c) 特に、任意の $a, x \in \overline{I}$ に対し

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^m}{m!}.$$

証明： 任意の $a, x \in \overline{I}$ に対し、定理 8.4.1 より、

$$\left| f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^m}{m!} \right| = |R_{n,a,x}| \leq (|I|^n/n!) \sup_I |f^{(n)}|.$$

これより (b)、従って (c) が成立。 □

問 8.4.4 以下を確認せよ：(i) $f(x)$ が

$$e^x, \quad \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh} x, \quad \cos x, \quad \sin x$$

なら、任意の有界開区間 $I \subset \mathbb{R}$ で 定理 8.4.2 の条件 (a) が満たされる。(ii): (i) によって得られるテイラー展開の $a = 0$ の場合は命題 3.1.1, 命題 3.2.1, 命題 3.2.2 で $z = x \in \mathbb{R}$ としたものと一致する。(iii): $f(x) = \log(1+x)$ なら、$\overline{I} \subset (-1, 1)$ なる有界開区間 I で 定理 8.4.2 の条件 (a) が満たされる。(iv): (iii) によって得られるテイラー展開の $a = 0$ の場合が例 5.4.8 で述べたものと一致する。

次に、定理 8.4.1(c) に対する仮定を少し緩めることが出来る事を述べる。証明は少し技巧的だが、積分を用いない。

定理 8.4.3 $(\star)$ $n = 1, 2, .., f \in C^{n-1}(\bar{I}) \cap D^n(I)$ に対し定理 8.4.1(c) が成立。

証明：定数 $\gamma \in \mathbb{R}$ を次のように定める：

$$f(b) = p(b) + \frac{\gamma(b-a)^n}{n!}.$$

γ は a, b, n に依存する。示すべきことは

(1) $\exists c \in (a \wedge b, a \vee b),\ \gamma = f^{(n)}(c)$.

その為、 $n-1$ 次多項式 p 及び $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$p(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^m}{m!}, \quad g(x) = f(x) - p(x) - \frac{\gamma(x-a)^n}{n!}$$

と定める。今、 p の定義から、

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \ \ k = 0, 1, ..., n-1.$$

従って、

(2) $g^{(k)}(a) = 0, \ \ k = 0, 1, ..., n-1$.

g の定義から、

$$f^{(n)}(x) = \gamma + g^{(n)}(x).$$

従って、(1) を示すには次を言えば十分：

(3) $1 \le k \le n \Longrightarrow \exists c_k \in (a \wedge b, a \vee b),\ g^{(k)}(c_k) = 0$.

(3) を k に関する帰納法で示す。
$k = 1$： $g(a) = g(b) = 0$ なのでロルの定理より (3) の c_1 が存在。
(3) の c_{k-1} の存在を仮定する。このとき、(2) より $g^{(k-1)}(c_{k-1}) = g^{(k-1)}(a) = 0$. 従ってロルの定理より

$$\exists c_k \in (a \wedge c_{k-1}, a \vee c_{k-1}), \ \ g^{(k)}(c_k) = 0.$$

$(a \wedge c_{k-1}, a \vee c_{k-1}) \subset (a \wedge b, a \vee b)$ だから、c_k は求めるものである。 □

問 8.4.5 $(\star)$ $n \ge 2$, $f \in C^{n-2}(\bar{I}) \cap D^{n-1}(I)$, かつ $f^{(n)}(a)$ が存在するとき、次を示せ：

$$\lim_{\substack{b \to a \\ b \neq a}} (b-a)^{-n} \left(f(b) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(b-a)^m}{m!} \right) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

問 8.4.6 $(\star)$ $f \in D^1(I)$, $a \in I$, かつ $f''(a)$ が存在するなら、次が成立することを示せ：

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} h^{-2}(f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)) = f''(a).$$

9　広義積分

9.1　広義積分とは？

$-\infty \le a < b \le \infty$, $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ とする。$a, b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{R}((a,b))$ なら、定義 8.1.3 の意味で積分

$$\int_a^b f$$

が定義出来る。9 章では (a,b) が非有界区間、或いは f が非有界関数の場合の積分 (「広義積分」という) を考察する。一般論の前に簡単な例を述べる。

例 9.1.1 $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, c > 0$ とする。「関数 $f(x) = e^{-cx}$ の非有界区間 (a, ∞) での積分」を考えてみよう。$v \in (a, \infty)$ とすると

$$\int_a^v e^{-cx}\, dx = \left[-\frac{e^{-cx}}{c} \right]_a^v \longrightarrow \frac{e^{-ca}}{c} \quad (v \longrightarrow \infty)$$

なので、

$$\int_a^\infty e^{-cx}\, dx = \frac{e^{-ca}}{c}$$

と考えるのが自然である。

例 9.1.2 $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ とし、(a,b) 上の非有界関数 $1/\sqrt{x-a}$, $1/\sqrt{b-x}$ の積分を考えてみよう。$u, v \in (a,b)$ に対し

$$\begin{aligned} \int_a^v \frac{dx}{\sqrt{b-x}}\, dx &= [-2\sqrt{b-x}]_a^v \longrightarrow 2\sqrt{b-a} \quad (v \longrightarrow b), \\ \int_u^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}}\, dx &= [2\sqrt{x-a}]_u^b \longrightarrow 2\sqrt{b-a} \quad (u \longrightarrow a) \end{aligned}$$

なので、

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}\, dx = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}}\, dx = 2\sqrt{b-a}$$

と考えるのが自然である。つまり、$f(x) = 1/\sqrt{b-x}$ のとき、f は $x \to b$ で発散するので、ひとまず $[a, v]$ $(v < b)$ で積分してから、

$$\int_a^b f = \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \int_a^v f.$$

と考えた。また、$f(x) = 1/\sqrt{x-a}$ のとき、f は $x \to a$ で発散するので、ひとまず $[u, b]$ $(a < u)$ で積分してから、

$$\int_a^b f = \lim_{\substack{u \to a \\ u > a}} \int_u^b f$$

と考えた。例えば $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}}$ なら f は $x \to a$, $x \to b$ の両方で発散する。そこで、$c = (a+b)/2$ とし、ひとまず $[u, v]$ $(a < u < c < v < b)$ で積分すると

$$\int_u^v f = \int_u^c f + \int_c^v f$$

なので、更に $u \to a$, $v \to b$ の極限をとって

$$\int_a^b f = \lim_{\substack{u \to a \\ u > a}} \int_u^c f + \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \int_c^v f$$

と考えればよさそうだ。

上の例を一般化して「広義積分」を定義する:

定義 9.1.3 • $-\infty \le a < b \le \infty$, $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ とし、以下の極限 (一般には存在すると限らない) を考える：

$$
\begin{aligned}
s_{a,b}(f) &= \lim_{\substack{v\to b\\ v<b}}\int_a^v f, \quad f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}([a,b)) \text{ のとき、} && (9.1)\\
s_{a,b}(f) &= \lim_{\substack{u\to a\\ u>a}}\int_u^b f, \quad f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a,b]) \text{ のとき、} && (9.2)\\
s_{a,b}(f) &= \lim_{\substack{u\to a\\ u>a}}\int_u^c f+\lim_{\substack{v\to b\\ v<b}}\int_c^v f, \quad f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a,b)) \text{ のとき。} && (9.3)
\end{aligned}
$$

但し (9.3) で $c\in(a,b)$ （補題 9.1.4 参照）. 上記極限 $s_{a,b}(f)$ が存在すれば (f が実数値の場合、極限 $s_{a,b}(f)$ が $\pm\infty$ の場合も含める)、$s_{a,b}(f)$ を f の (a,b) 上での**広義積分** (improper integral) と呼び[52]、$f\in\mathscr{R}((a,b))$ の場合の積分と同じ記号 $\int_a^b f$ で表す。また、

$$\int_b^a f=-\int_a^b f \tag{9.4}$$

と定める。これに対し、$f\in\mathscr{R}((a,b))$ に対する従来の積分を（区別のための便宜上）**狭義積分**と呼ぶことがある。

• f の (a,b) 上での広義積分が存在して $\pm\infty$ でないなら、f は (a,b) 上**広義可積分**、或いは $\int_a^b f$ が**収束する**と言う。

注 1：定義 9.1.3 で、(9.1) 型極限と (9.2) 型極限は本質的に同じで、(9.3) 型極限は 両者の和である。従って広義積分の本質は (9.1) 型極限に尽きる。

注 2：$f\ge 0$ の場合、(9.1) は v についての非減少関数の極限なので ∞ を含めれば常に存在する。(9.2), (9.2) についても同様である。従って $f\ge 0$ の場合、「広義積分 $\int_a^b f$ が収束する」ということと 「$\int_a^b f<\infty$」は全く同じ意味である。

定義 9.1.3 で、広義積分の定義は (9.1)–(9.3) の三種類与えられたが、これらの整合性、及び、(9.3) の極限 $s_{a,b}(f)$ の有無、及びその値は $c\in(a,b)$ の選び方に依らないことを次の補題 9.1.4 で確かめる。また、狭義積分が広義積分の特別の場合であることも確認する。補題 9.1.4 は定義 9.1.3 の論理的整合性を保証するためだけのものであり、実用的ではないので、飛ばして先に進んでも差支えない。

補題 9.1.4 （$\star$）定義 9.1.3 において

(a) (9.3) の極限 $s_{a,b}(f)$ の有無、及びその値は $c\in(a,b)$ の選び方に依らない。

(b) $f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a,b])$ に対し (9.1), (9.3) の極限は一致する（一方が存在すれば他方も存在して等しい）。同様に、$f\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a,b])$ に対し、(9.2), (9.3) の極限は一致する（一方が存在すれば他方も存在して等しい）。

(c) $a,b\in\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{R}((a,b))$ なら、$s_{a,b}(f)$ が存在し、狭義の積分 $\int_a^b f$ に一致する。

証明は後回しにする。

次の補題の内容はごく自然だが、厳密に言うと証明を要するので、一応述べておく。

[52] (9.1), (9.2) の場合には、それぞれ、「$[a,b)$ 上の広義積分」、「$(a,b]$ 上の広義積分」と呼ぶこともある。

補題 9.1.5 $f \in \mathscr{R}_{\rm loc}((a,b))$ に対し $\int_a^b f$ が収束するとする。このとき、

(a) $c \in (a,b)$ に対し $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$

(b)
$$\int_a^b f = \lim_{\substack{v \to b \\ v<b}} \int_a^v f = \lim_{\substack{u \to a \\ u>a}} \int_u^b f.$$

(c)
$$\lim_{\substack{v \to b \\ v<b}} \int_v^b f = \lim_{\substack{u \to a \\ u>a}} \int_a^u f = 0.$$

補題 9.1.5 の証明も後回しにする。

問 9.1.1 $a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{R}_{\rm loc}([a,b))$, かつ広義積分 $\int_a^b f$ が収束するとする。このとき、$u<v$, $u,v \to b$ なら $\int_u^v f \to 0$ となることを示せ[53]。

問 9.1.2 $-\infty \le a < b \le \infty$, $f \in \mathscr{R}_{\rm loc}((a,b))$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n \to b$ とする。$\int_a^b f = \sum_{n=0}^\infty \int_{a_n}^{a_{n+1}} f$ を示せ。

問 9.1.3 $f \in C([0,\infty))$ かつ $\int_0^\infty f$ が収束すれば $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ と言えるか？

もう少し具体例を述べよう。定義 9.1.3 で、f の不定積分 F が求まる場合、広義積分はその極限として計算出来る。例えば極限 (9.1) は

$$[F]_a^b \stackrel{\rm def.}{=} \lim_{\substack{v \to b \\ v<b}} [F]_a^v.$$

以下、そのような例で 例 9.1.1, 例 9.1.2 以外のものを幾つか述べる。

例 9.1.6
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{c^2+x^2} = \left[\frac{1}{c}{\rm Arctan}\,\frac{x}{c}\right]_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{c}. \quad c>0.$$

更に $\log x$ は $x=0$ の近傍で、$1/\sqrt{x^2-a^2}$, $1/\sqrt{b^2-x^2}$ はそれぞれ $x=a,b$ の近傍で非有界だが、不定積分の極限として以下の広義積分が求められる (例 8.1.2 参照)：

$$\begin{aligned}
\int_0^b \log x\, dx &= [x\log x - x]_0^b = b\log b - b, \quad (0<b<\infty), \\
\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= [{\rm ch}^{-1}(x/a)]_a^b = {\rm ch}^{-1}(b/a), \quad (0<a<b<\infty), \\
\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}} &= [{\rm Arcsin}\,(x/b)]_a^b = \pi/2 - {\rm Arcsin}\,(a/b), \quad (-b \le a < b < \infty)
\end{aligned}$$

問 9.1.4 $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ に対し次を示せ：

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

ヒント：例 9.1.1 で $c = \alpha - \mathbf{i}\beta$ とし、実部と虚部をとれば簡単。

次の例は「$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p>1$」（例 3.4.2）の類似である。

[53]実は逆も正しい（命題 13.2.4）

例 9.1.7 $a > 0$ なら、$\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1, \\ \infty, & p \le 1. \end{cases}$

証明： 原始関数の形から、求める積分は

$$p \neq 1 \text{ なら } \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^\infty = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1, \\ \infty, & p < 1 \end{cases} \qquad p = 1 \text{ なら } [\log x]_a^\infty = \infty.$$

□

問 9.1.5 $-\infty < a < b < \infty$ のとき、次を示せ: $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p < 1, \\ \infty, & p \ge 1. \end{cases}$

補題 9.1.4 の証明： (a):補題 8.1.4 より

$$\int_u^c f + \int_c^v f = \int_u^v f.$$

従って極限をとる前の式が、$c \in (a, b)$ の選び方に無関係。
(b): $f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}([a, b))$ とする。$c, u \in [a, b)$ に対し

$$F_c(u) = \int_c^u f = -\int_u^c f$$

が定義される。従って、 定理 8.2.2 より $F_c(u)$ は $u \in [a, b)$ で連続。そこで、例えば (9.3) の $s_{a,b}(f)$ の存在を仮定すると、

$$\begin{aligned} s_{a,b}(f) &= \lim_{\substack{u \to a \\ u > a}} \int_u^c f + \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \int_c^v f = \int_a^c f + \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \int_c^v f \\ &= \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \left(\int_a^c f + \int_c^v f\right) = \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \int_a^v f. \end{aligned}$$

となり、(9.1) の $s_{a,b}(f)$ も存在し両者が等しいことが分かる。逆に (9.1) の $s_{a,b}(f)$ が存在すると仮定すると、上の等式を逆に辿って (9.3) の $s_{a,b}(f)$ が存在し、両者が等しいことが分かる。$f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a, b])$ に対する議論も同様である。
(c):$a, b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{R}((a, b))$ なら、$c, u \in [a, b]$ に対し $F_c(u)$ が定義され、定理 8.2.2 より $F_c(u)$ は $u \in [a, b]$ で連続。以上より、

$$s_{a,b}(f) = \lim_{\substack{u \to a \\ u > a}} \int_u^c f + \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \int_c^v f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

□

補題 9.1.5 の証明： (a): 仮定より、

(1) $\displaystyle\lim_{\substack{u \to a \\ u > a}} \int_u^c f,\ \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \int_c^v f$ が存在し、両者の和が $\displaystyle\int_a^b f$.

また $f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a, b)) \subset \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a, c]) \cap \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}([c, b))$ だから (9.1),(9.2) より

(2) $$\int_a^c f = \lim_{\substack{u \to a \\ u > a}} \int_u^c f, \quad \int_c^b f = \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \int_c^v f.$$

(1), (2) より (a) を得る。
(b): $c \in [u,v] \subset (a,b)$ となる $u, v \in \mathbb{R}$ に対し

$$\int_u^v f = \int_u^c f + \int_c^v f.$$

上式で $u \longrightarrow a$ とすると (2) より

(3) $$\int_a^v f = \int_a^c f + \int_c^v f.$$

以上より、

$$\lim_{\substack{v \to b \\ v<b}} \int_a^v f \stackrel{(3)}{=} \int_a^c f + \lim_{\substack{v \to b \\ v<b}} \int_c^v f \stackrel{(2)}{=} \int_a^c f + \int_c^b f \stackrel{(a)}{=} \int_a^b f.$$

これで第 1 式が示せた。第 2 式も同様。
(c): (a) より、

$$\int_v^b f = \int_a^b f - \int_a^v f, \quad \int_a^u f = \int_a^b f - \int_u^b f.$$

上式で $u \longrightarrow a$, $v \longrightarrow b$ とすれば (b) より結論を得る。 □

9.2 広義積分の収束判定

広義積分の収束判定は級数の収束判定とよく似ている。級数の場合、絶対収束すれば収束する（系 2.5.7）が、次の命題で述べるように、広義積分についても同様である：

命題 9.2.1 $f, g \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}((a,b))$, $|f| \le g$ とする。このとき

(a) $\displaystyle\int_a^b g < \infty$ なら $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b |f|$ は共に収束する。

(b) $\displaystyle\int_a^b |f|$ が収束すれば、$\displaystyle\int_a^b f$ も収束する。

なお、$\displaystyle\int_a^b |f|$ が収束するとき、$\displaystyle\int_a^b f$ は**絶対収束**する (converge absolutely) と言う。これに対し $\displaystyle\int_a^b f$ が収束し、$\displaystyle\int_a^b |f|$ は収束しないとき、$\displaystyle\int_a^b f$ は**条件収束**する (converge conditionally) と言う。

証明： (a): 定義 9.1.3 の後に注意したように、$a \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}([a,b))$ と仮定して (9.1) 型極限の場合のみ考えれば十分である。
(i):<u>f が実数値の場合</u>: $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ より、$a < v < b$ に対し

$$\int_a^v f = \int_a^v f^+ - \int_a^v f^-, \quad \int_a^v |f| = \int_a^v f^+ + \int_a^v f^-.$$

よって、$\int_a^b f^{\pm}$ が共に収束すれば、$\int_a^b f$, $\int_a^b |f|$ は共に収束する。所が、

$$(a,b) \ni v \mapsto \int_a^v f^{\pm}$$

は非減少。また、有界であることが次のようにして分かる：

$$\int_a^v f^{\pm} \le \int_a^v |f| \le \int_a^v g \le \int_a^b g < \infty$$

よって $\int_a^b f^{\pm}$ は共に収束する。
(ii) f が複素数値の場合: $|f|$ は実数値、$|f| \leq g$ だから (i) より $\int_a^b |f|$ の収束が分かる。更に $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ も実数値、$|\mathrm{Re}\, f| \leq |f|$, $|\mathrm{Im}\, f| \leq |f|$ だから (i) より $\int_a^b \mathrm{Re}\, f$, $\int_a^b \mathrm{Im}\, f$ の収束が分かる。更に $f = \mathrm{Re}\, f + \mathbf{i}\, \mathrm{Im}\, f$ から $\int_a^b f$ の収束が分かる。
(b): (a) の特別な場合 ($g = |f|$) である。 □

系 9.2.2 (**比較定理**) $a \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}([a, b))$, $c \in (a, b)$, 更に $[c, b)$ 上 $|f| \leq g$ とするとき、

(a) $\displaystyle\int_c^b g < \infty$ なら $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b |f|$ は共に収束する。

(b) $\displaystyle\int_c^b |f| = \infty$ なら $\displaystyle\int_a^b g$ は収束しない。

証明: (a):$f, |f|, g$ について $\int_a^b$ の収束と $\int_c^b$ の収束は同値だから 命題 9.2.1 に帰着する。
(b):(a) の対偶である。 □

例 9.2.3 (a) $f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}([0, \infty))$ に対し $\int_0^\infty f$ の絶対収束は $\int_0^\infty f(x) e^{\mathbf{i}x} dx$ の絶対収束と同値である。

(b) $f \in C^1([0, \infty))$ が非負非増加なら

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0. \iff \int_0^\infty f(x) e^{\mathbf{i}x}\, dx \text{ が収束。}$$

証明: (a):$|f(x)| = |f(x) e^{\mathbf{i}x}|$ より明らか。
(b):$0 < v$ とすると、

$$\int_0^v f(x) e^{\mathbf{i}x}\, dx = \underbrace{\left[-\mathbf{i} e^{\mathbf{i}x} f(x)\right]_0^v}_{(1)} + \underbrace{\mathbf{i} \int_0^v e^{\mathbf{i}x} f'(x)\, dx}_{(2)}.$$

(2) について $|e^{\mathbf{i}x} f'(x)| = |f'(x)|$ かつ

$$\int_0^v |f'| = -\int_0^v f' = f(0) - f(v) \leq f(0).$$

よって比較定理 (系 9.2.2) より $\lim\limits_{v \to \infty}$ (2) は絶対収束する。また、$\lim\limits_{v \to \infty}$ (1) の収束は $\lim\limits_{v \to \infty} e^{\mathbf{i}v} f(v)$ の収束と同値だが、これは $\lim\limits_{v \to \infty} f(v) = 0$ と同値である (問 9.2.1)。 □

注: 非負非増加数列 (a_n) に対し $\lim\limits_n a_n = 0$ と級数 $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$ の収束は同値である (命題 2.5.9)。例 9.2.3(b) は、その類似と考えられる。

問 9.2.1 例 9.2.3(b) の証明で、「$\lim\limits_{v \to \infty} e^{\mathbf{i}v} f(v)$ の収束 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{v \to \infty} f(v) = 0$」 を示せ。

問 9.2.2 例 9.2.3(b) は、$e^{\mathbf{i}x}$ を $\sin x$ または $\cos x$ におきかえても成り立つことを示せ。

例 9.2.4 (**広義積分と級数の比較**) $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ が非増加とするとき、

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \leq \int_0^\infty f \leq \sum_{n=0}^\infty f(n).$$

従って、

$$\sum_{n=0}^\infty f(n) < \infty \iff \int_0^\infty f \text{ が収束.}$$

証明: f は単調なので任意の有界区間上可積分（命題 7.3.1）。今、$f_0, f_1 : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ を次のように定義する： $n = 0, 1, ...$ に対し

$$x \in [n, n+1) \text{ なら } f_0(x) = f(n),\ f_1(x) = f(n+1).$$

(絵で説明)。このとき、

$$\int_0^\infty f_0 = \sum_{n=0}^\infty f(n), \quad \int_1^\infty f_1 = \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

一方、

$$\text{全ての } x \geq 0 \text{ で } f_1(x) \leq f(x) \leq f_0(x), \text{ 従って } \int_0^\infty f_1 \leq \int_0^\infty f \leq \int_0^\infty f_0.$$

以上より結論を得る。 □

問 9.2.3 「$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1$」（例 3.4.2）を 例 9.1.7, 例 9.2.4 から導け。

問 9.2.4 $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は非増加とする。「$\int_0^\infty f < \infty \ \Leftrightarrow\ \int_0^\infty f|\sin| < \infty$」 を示せ。

問 9.2.5 $x > 0,\ p \geq 0,\ f(x) = \frac{\sin x}{x^p}$ とする。以下を示せ：(i) $p > 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_1^\infty f$ は収束。(ii) $p > 1 \Leftrightarrow \displaystyle\int_1^\infty |f|$ は収束。

問 9.2.6 $x > 0$ に対し、以下を示せ：
(i) 級数 $S(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{1+n^2x^2}$ は収束する。
(ii) $\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan} x \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x^2} + \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan} x$.

命題 9.2.5 (**次数による収束判定**) $a \in \mathbb{R},\ f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}([a,b))$ とする。次の (a),(b) どちらかなら、広義積分 $\int_a^b f$ は絶対収束する。

(a) $b = \infty$ で次のような $c \in (a \vee 0, \infty),\ M \in [0,\infty),\ p > 1$ が存在：

$$x \in [c,\infty) \implies |f(x)| \leq M/x^p.$$

(b) $b < \infty$ で次のような $c \in (a,b),\ M \in [0,\infty),\ p < 1$ が存在：

$$x \in [c,b) \implies |f(x)| \leq M/(b-x)^p.$$

また、次の (c), (d) どちらかなら、広義積分 $\int_a^b f$ は収束しない。

(c) $b = \infty$ で次のような $c \in (a \vee 0, \infty),\ M \in (0,\infty),\ p \leq 1$ が存在：

$$x \in [c,\infty) \implies f(x) \geq M/x^p.$$

(d) $b < \infty$ で次のような $c \in (a,b),\ M \in (0,\infty),\ p \geq 1$ が存在：

$$x \in [c,b) \implies f(x) \geq M/(b-x)^p.$$

証明：例 9.1.7, 問 9.1.5, 及び 比較定理（系 9.2.2）を組み合わせる。詳しくは問とする（問 9.2.7 ）。 $\square$

問 9.2.7 命題 9.2.5 の証明を詳しく書き下せ。

例 9.2.6 $x > 0,\ p \geq 0,\ f(x) = \frac{\sin x}{x^p}$ とするとき、

$$p < 2 \iff \int_0^1 f \text{ が収束（} p \leq 1 \text{ なら積分は狭義のもの）}$$

証明：$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ より次のような $c \in (0,1)$ が存在：

$$x \in (0,c) \text{ なら } \quad \tfrac{1}{2} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

従って、

$$x \in (0,c) \text{ なら } \quad \frac{1}{2x^{p-1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{p-1}}$$

上式と次数による収束判定より、$\int_0^1 f$ は、$p-1 < 1$ なら収束、$p-1 \geq 1$ なら収束しない。 $\square$

注：$x > 0,\ p \geq 0,\ f(x) = \frac{\sin x}{x^p}$ とするとき、問 9.2.5, 例 9.2.6 の結果を表にまとめると、次のようになる（$\int_0^\infty f = \int_0^1 f + \int_1^\infty f$ に注意)。

	$\int_0^1 f$	$\int_1^\infty f$	$\int_0^\infty f$
$p = 0$	狭義の積分	収束しない	収束しない
$0 < p \leq 1$	狭義の積分	条件収束	条件収束
$1 < p < 2$	絶対収束	絶対収束	絶対収束
$p \geq 2$	収束しない	絶対収束	収束しない

9.3 置換積分と部分積分

命題 9.3.1 (**広義積分に対する置換積分 I**) $J = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ とし、以下を仮定:

(a) $g \in D^1(J)$ かつ極限

$$g(\alpha+) = \lim_{\substack{u \to \alpha \\ u > \alpha}} g(u), \quad g(\beta-) = \lim_{\substack{v \to \beta \\ v < \beta}} g(v)$$

が共に存在（$\pm\infty$ も許す)。

(b) $I = g(J)$ とするとき、$f \in C(I)$ かつ $(f \circ g)g' \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(J)$.

このとき、広義積分

$$\int_{g(\alpha+)}^{g(\beta-)} f(y)dy, \quad \int_\alpha^\beta (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

のどちらかが収束すれば、他方も収束し、両者は一致する。

証明：$[u,v] \subset J$ とする。このとき、以下が成立：

(1) $I_{u,v} = g([u,v])$ とするとき、$f \in C(I_{u,v})$.

(2) $g \in D^1([u,v])$, $(f \circ g)g' \in \mathscr{R}((u,v))$.

従って、狭義の積分に対する置換積分 I （命題 8.3.1）より

$$\int_{g(u)}^{g(v)} f(y)dy = \int_u^v (f \circ g)(x)g'(x)dx.$$

上式で $u \longrightarrow \alpha$, $v \longrightarrow \beta$ として結論を得る。 □

例 9.3.2 $f \in C(\mathbb{R})$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$ に対し、広義積分

$$c_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(c_1 x + c_2)\, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f.$$

のどちらかが収束すれば、他方も収束し、両者は一致する。

証明：命題 9.3.1 で $J = \mathbb{R}$, $g(x) = c_1 x + c_2$ としたもの。 □

問 9.3.1 以下の広義積分 I, J のどちらかが収束すれば他方も収束し、$I = J$ となることを示せ:
(i) $f \in C((0,\infty))$, $c \in (0,\infty)$ に対し、$I = \int_0^\infty f(cx)\, \frac{dx}{x}$, $J = \int_0^\infty f(x)\, \frac{dx}{x}$.
(ii) $f \in C((0,\infty))$ に対し、$I = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x^2+1}\, dx$, $J = \int_0^\infty \frac{f(1/x)}{x^2+1}\, dx$.
(iii) $f \in C((0,\infty))$ に対し、$I = \int_1^\infty \frac{f(\mathrm{ch}^{-1}x)}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$, $J = \int_0^\infty f$.
(vi) $f \in C((0,\pi/2))$ に対し、$I = \int_0^1 \frac{f(\mathrm{Arcsin}\, x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, $J = \int_0^{\pi/2} f$.

問 9.3.2 問 9.3.1 を利用し、以下の等式を示せ：(i) $\int_0^\infty \frac{(\log x)^{2n+1}}{x^2+1}\, dx = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. (ii)$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{ch}} = \pi/2$. (iii) $\int_0^1 \frac{(\mathrm{Arcsin}\, x)^{p-1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi^p}{p2^p}$, $(p > 0)$.

問 9.3.3 $T_a(x) = \cos(a\mathrm{Arccos}\, x)$ $(x \in [-1,1], a \in \mathbb{C})$ に対し次を示せ：

$$2\int_{-1}^1 \frac{T_a(x)T_b(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\sin(a+b)\pi}{a+b} + \frac{\sin(a-b)\pi}{a-b},$$

但し $\frac{\sin 0\pi}{0} = \pi$ とする。特に $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$ なら上の積分は 0 である。

問 9.3.4 関数 $\ell_n : [e_n, \infty) \to [1, \infty)$ $(n \geq 1)$ を

$$e_n = \underbrace{\exp \circ \cdots \circ \exp}_{n}(1), \quad \ell_n(x) = \underbrace{\log \circ \cdots \circ \log}_{n}(x)$$

によって定義する。任意の n に対し次を示せ；

$$\int_{e_n}^\infty \frac{dx}{x\ell_1(x) \cdots \ell_{n-1}(x)\ell_n(x)^{1+\varepsilon}} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} < \infty & \text{if } \varepsilon > 0, \\ \infty & \text{if } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

ヒント：左辺を I_n とする。$x = e^y$ と変数変換すると $I_n = I_{n-1} = \ldots = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}$.

問 9.3.5 例 9.2.4 と問 9.3.4 の結果から次を示せ：$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}} \begin{cases} < \infty & \text{if } \varepsilon > 0, \\ = \infty & \text{if } \varepsilon = 0. \end{cases}$

問 9.3.6 広義積分 $\int_1^\infty \sin(x^q)\, dx$ が収束するような $q > 0$ の範囲を求めよ。
ヒント： $x^q = y$ と置換し、例 9.2.6 の結果を用いよ。

置換積分公式は次の形で応用される場合も多い。

系 9.3.3 (**広義積分に対する置換積分 II**) $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$ とし、以下を仮定する：

(a) $h\in D^1(I)$, I 上 $h'>0$ (または I 上 $h'<0$).

(b) $J=h(I)$ とするとき、 $\varphi\in C(J)$.

(c) h の逆関数[54] $g:J\longrightarrow I$ について $\varphi g'\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(J)$.

このとき、広義積分

$$\int_a^b(\varphi\circ h)(x)\,dx,\quad \int_{h(a+)}^{h(b-)}\varphi(y)g'(y)\,dy$$

のどちらかが存在すれば、他方も存在し両者は一致する。

証明： $[u,v]\subset I$ とすると、系 8.3.4 より

$$\int_u^v\varphi\circ h=\int_{h(u)}^{h(v)}(f\circ g)g'.$$

上式で $u\longrightarrow a$, $v\longrightarrow b$ として結論を得る。 □

命題 9.3.4 (**広義積分に対する部分積分**) $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$ とし、以下を仮定：

(a) $f,g\in D^1(I)$, $f'g,fg'\in\mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$.

(b) $f(x)g(x)$ の $x\longrightarrow a$, $x\longrightarrow b$ での極限は共に存在して有限。

このとき、広義積分

$$\int_a^b f'g,\quad \int_a^b f'g$$

のどちらかが収束すれば、他方も収束し

$$\int_a^b f'g=[fg]_a^b-\int_a^b fg'.$$

証明： $[u,v]\subset I$ とする。このとき、

$$f,g\in D^1([u,v]),\quad f'g,fg'\in\mathscr{R}((u,v))$$

従って、狭義の積分に対する部分積分（命題 8.3.5）より

$$\int_u^v f'g=[fg]_u^v-\int_u^v fg'.$$

$u\longrightarrow a$, $v\longrightarrow b$ として結論を得る。 □

問 9.3.7 $0<p<2$ に対し広義積分 $I_1=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^p}\,dx$, $I_2=\int_0^\infty\frac{1-\cos x}{x^{p+1}}\,dx$, $I_3=\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^{p+1}}\,dx$ は全て収束し、$I_1=pI_2=p2^{1-p}I_3$ となることを示せ[55]。ヒント：第一の等式には部分積分を、第二の等式には $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ を用いる。

---

[54]逆関数定理 (定理 6.3.1) より $g\in C(J)\cap D^1(\mathring{J})$

[55]$p=1$ なら $I_1=\pi/2$ (後述)。

9.4 Γ-関数・B-関数

以下で述べる Γ-関数・B-関数は数学の様々な分野、更には物理学・工学をはじめとする応用科学でも色々な形で登場する重要な関数である。

命題 9.4.1 $u > 0$ とする。広義積分

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1}e^{-x}\,dx \tag{9.5}$$

は収束し、$u \mapsto \Gamma(u)$ $((0,\infty) \to (0,\infty))$ を **Γ-関数**（ガンマ関数）と呼ぶ。これについて、以下が成立する（但し $n \in \mathbb{N}$）：

$$\Gamma(u+1) = u\Gamma(u), \tag{9.6}$$

$$\Gamma(u+n) = (u+n-1)(u+n-2)\cdots(u+1)u\Gamma(u), \tag{9.7}$$

$$\Gamma(1+n) = n!. \tag{9.8}$$

証明：(9.5) の収束：$f(x) = x^{u-1}e^{-x}$ $(x>0)$ とする。$n \in \mathbb{N}$ に対し $e^{-x} \leq n!x^{-n}$ だから

(1) $\qquad 0 \leq f(x) \leq n!x^{u-1-n}$,

(1) で $n=0$ とすれば、次数による収束判定（命題 9.2.5）より $\int_0^1 f$ が収束。また、(1) で $n > u$ とすれば、再び次数による収束判定（命題 9.2.5）より $\int_1^\infty f$ が収束。以上より $\int_0^\infty f$ は収束。

(9.6):

$$\Gamma(u+1) = \int_0^\infty x^u e^{-x}\,dx = \underbrace{[-x^u e^{-x}]_0^\infty}_{=0} + u\underbrace{\int_0^\infty x^{u-1}e^{-x}\,dx}_{=\Gamma(u)}.$$

(9.7): (9.6) を繰り返し適用。

(9.8): 次に注意：

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

これと、(9.7) を併せればよい。 □

問 9.4.1 $u, v \in (0,\infty)$ に対し以下を示せ：

$$\Gamma(u) = v^u \int_0^\infty y^{u-1}e^{-vy}\,dy \tag{9.9}$$

$$= v^u \int_0^1 \left(\log\frac{1}{s}\right)^{u-1} s^{v-1}\,ds, \tag{9.10}$$

$$= 2v^u \int_0^\infty r^{2u-1}e^{-vr^2}\,dr \tag{9.11}$$

問 9.4.2 $m, n \in \mathbb{N}$, D^m は m 階微分とする。以下を示せ：

(i) $e^x D^m(x^n e^{-x})$ は n 次多項式で、x^n の係数は $(-1)^m$.

(ii) $L_n(x) = e^x D^n(x^n e^{-x})$ を**ラゲール多項式**[56]と呼ぶ。$0 \leq m \leq n$ なら

$$\int_0^\infty x^m L_n(x)e^{-x}\,dx = (-1)^m m!\int_0^\infty D^{n-m}(x^n e^{-x})\,dx = (-1)^n(n!)^2\delta_{m,n}.$$

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = (n!)^2\delta_{m,n}.$$

ヒント：部分積分。

[56]Edmond Laguerre (1834–86)

問 9.4.3 n 次以下の多項式 f が、$m=0,1,..,n-1$ に対し $\int_0^\infty x^m f(x)e^{-x}\,dx=0$ を満たすなら f はラゲール多項式 L_n の定数倍であることを示せ。

問 9.4.4 $x,\nu\in[0,\infty)$ に対し $J_\nu(x)=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$ は絶対収束し、$x^2J_\nu''+xJ_\nu'+(x^2-\nu^2)J_\nu=0$ を満たすことを示せ。J_ν を **ベッセル関数**という[57]。

命題 9.4.2 $u,v>0$ に対し、次の広義積分の収束と等号が成立する：

$$\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2u-1}\theta\sin^{2v-1}\theta\,d\theta \tag{9.12}$$

これらの積分を $B(u,v)$ と記し、B-**関数**（ベータ関数）と呼ぶ。また、$B(u,v)$ は以下の性質を持つ：

$$B(u,v)=B(v,u), \tag{9.13}$$

$$B(1,u)=B(u,1)=1/u, \tag{9.14}$$

$$B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=\pi. \tag{9.15}$$

証明： (9.12) 左辺の収束を言うため $f(x)=x^{u-1}(1-x)^{v-1}$, $M_u=1\vee(1/2)^{u-1}$ とおく。

$$x\in(0,1/2] \text{ なら } f(x)\le M_v x^{u-1}$$
$$x\in[1/2,1) \text{ なら } f(x)\le M_u(1-x)^{v-1}.$$

これらと、次数による収束判定（命題 9.2.5）より $\int_0^{1/2}f$, $\int_{1/2}^1 f$ が収束、従って $\int_0^1 f$ が収束する。等号は $x=\cos^2\theta$ と変換すれば得られる。また、
(9.13): 例 8.3.2 による。
(9.14):

$$B(1,u)\stackrel{(9.13)}{=}B(u,1)=\int_0^1 x^u dx=1/u.$$

(9.15): (9.12) 右辺で $u=v=1/2$ とすれば明らか。 □

問 9.4.5 $t,u,v>0$ とする。以下を示せ：
(i) $B(u,v)=\int_0^\infty \frac{y^{v-1}dy}{(1+y)^{u+v}}$. (ii) $\int_0^1 x^{u-1}(1-x^t)^{v-1}\,dx=\frac{1}{t}B(\frac{u}{t},v)$. (iii) $B(u,u)=2^{1-2u}B(u,\frac{1}{2})$. (iv) $\int_0^\infty \frac{x^{u-1}dx}{(1+x^t)^v}=\frac{1}{t}B(v-\frac{u}{t},\frac{u}{t}),(vt>u)$.

問 9.4.6 $u,v>0$ に対し以下を示せ：

$$B(u+1,v)=\frac{u}{v}B(u,v+1),\quad B(u,v+1)=\frac{v}{u}B(u+1,v), \tag{9.16}$$

$$B(u+1,v)=\frac{u}{u+v}B(u,v),\quad B(u,v+1)=\frac{v}{u+v}B(u,v). \tag{9.17}$$

更に $k,\ell\in\mathbb{N}$ に対し

$$B(k+u,\ell+v)=\frac{(k-1+u)_k(\ell-1+v)_\ell}{(k+\ell-1+u+v)_{k+\ell}}B(u,v), \tag{9.18}$$

但し、ここで次の記号を用いた：一般に、数列 a_n と $0\le k\le n$ に対し

$$(a_n)_k=\underbrace{a_na_{n-1}\cdots a_{n-k+1}}_{k\text{ 個}} \tag{9.19}$$

[57]Friedrich Whilhelm Bessel (1784–1846)

特に

$$B(k+1,\ell+1)=\int_0^1 x^k(1-x)^\ell\,dx=\frac{k!\ell!}{(k+\ell+1)!} \tag{9.20}$$

問 9.4.7 $-\infty<a<b<\infty,\ u,v>0$ に対し次を示せ：

$$\int_a^b (x-a)^{u-1}(b-x)^{v-1}dx=(b-a)^{u+v-1}B(u,v)$$

これと (9.20) より $\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n dx=\frac{(b-a)^{m+n+1}m!n!}{(m+n+1)!}$ $(m,n\in\mathbb{N})$ が分かる。

問 9.4.8 $q_n(x)=(x^2-1)^n$ の m 階微分 $q_n^{(m)}(x)$ を考える（問 5.2.2, 問 5.4.4 参照）。以下を示せ：(i) $q_n^{(m)}(x)$ は $2n-m$ 次多項式で、x^{2n-m} の係数は $\frac{(2n)!}{(2n-m)!}$. (ii) $0\le m\le n-1$ なら $q_n^{(m)}(-1)=q_n^{(m)}(1)=0$ (問 5.4.4 の復習). (iii) $0\le m\le n$ なら

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^m q_n^{(n)}(x)\,dx &= (-1)^m m!\int_{-1}^1 q_n^{(n-m)}(x)\,dx=\frac{2^{2n+1}(n!)^3}{(2n+1)!}\delta_{m,n},\\ \int_{-1}^1 q_m^{(m)}q_n^{(n)} &= \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}\delta_{m,n}.\end{aligned}$$

従って、ルジャンドル多項式 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}q_n^{(n)}(x)$ に対し $\int_{-1}^1 P_mP_n=\frac{2}{2n+1}\delta_{m\,n}$, 但し $\delta_{m\,n}$ は $m=n,\ m\neq n$ に応じてそれぞれ $1,0$ を表す。
ヒント：部分積分。問 9.4.7 の結果も使える。

問 9.4.9 n 次以下の多項式 f が、$k=0,1,..,n-1$ に対し $\int_{-1}^1 x^kf(x)dx=0$ を満たすなら f は $q_n^{(n)}$ の（従って ルジャンドル多項式 P_n の）定数倍であることを示せ。

Γ 関数と B 関数は、実は次の関係式で結ばれている：

命題 9.4.3 任意の $u,v>0$ に対し

$$B(u,v)=\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{9.21}$$

証明は 9.7 節で与えることにし、ここでは応用を述べる。

系 9.4.4 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. また、$v>0$ に対し

$$\int_0^\infty e^{-vr^2}\,dr=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi/v}.$$

証明：

$$\pi \stackrel{(9.15)}{=} B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \stackrel{(9.21)}{=} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\Gamma(\tfrac{1}{2})^2$$

より $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. また、

$$\int_0^\infty e^{-vr^2}\,dr \stackrel{(9.11)}{=} \frac{1}{2\sqrt{v}}\Gamma(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi/v}.$$

□

問 9.4.10 $m, n \in \mathbb{N}$ に対し次を示せ：

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) &= \begin{cases} \frac{(n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n/2}}, & n \in 2\mathbb{N}, \\ \frac{(n-1)!!}{2^{(n-1)/2}}, & n \notin 2\mathbb{N}. \end{cases} \\ B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) &= 2\int_0^{\pi/2} \cos^m\theta \sin^n\theta \, d\theta = \begin{cases} \pi\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \{m,n\} \subset 2\mathbb{N}, \\ 2\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \{m,n\} \not\subset 2\mathbb{N}. \end{cases}\end{aligned}$$

問 9.4.11 $m, n \in \mathbb{N}$, D^m は m 階微分とする。以下を示せ：
(i) エルミート多項式: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} D^n(e^{-x^2/2})$ は n 次多項式で、x^n の係数は 1（問 5.2.3 の復習）. (ii) $0 \le m \le n$ なら

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^m H_n(x) e^{-x^2/2}\, dx &= (-1)^{n+m} m! \int_{-\infty}^{\infty} D^{n-m}(e^{-x^2/2})\, dx = n!\sqrt{2\pi}\delta_{m,n}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2/2}\, dx &= n!\sqrt{2\pi}\delta_{m,n}.\end{aligned}$$

ヒント：部分積分。

問 9.4.12 n 次以下の多項式 f が、$m = 0, 1, .., n-1$ に対し $\int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x) e^{-x^2/2}\, dx = 0$ を満たすなら f は エルミート多項式 H_n の定数倍であることを示せ。

9.5 (⋆) ウォリスの公式・スターリングの公式

命題 9.5.1 $t \ge 0$ に対し、

$$\begin{aligned}W_n(t) &= \frac{(t+2n-1)(t+2n-3)\cdots(t+1)}{(t+2n)(t+2n-2)\cdots(t+2)} = \frac{(t+2n)(t+2n-1)\cdots(t+1)}{(t+2n)^2(t+2n-2)^2\cdots(t+2)^2}, \\ w(t) &= \sqrt{\frac{(t+1)B(\frac{t+2}{2}, \frac{1}{2})}{2B(\frac{t+1}{2}, \frac{1}{2})}}\end{aligned}$$

とおく。このとき

$$W_n(t) = \frac{w(t)}{\sqrt{n}}(1+\varepsilon_n), \quad \lim_n \varepsilon_n = 0. \tag{9.22}$$

特に $t = 0$ なら

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+\varepsilon_n) \quad (\textbf{ウォリスの公式}).$$

注： ウォリスの公式は硬貨を $2n$ 回投げて丁度 n 回表が出る確率に対し、その $n \to \infty$ での漸近挙動を表す[58]。

証明：

$$W_n(t) = \frac{(n+\frac{t-1}{2})(n-1+\frac{t-1}{2})\cdots(1+\frac{t-1}{2})}{(n+\frac{t}{2})(n-1+\frac{t}{2})\cdots(1+\frac{t}{2})} = \frac{(n+u-1)_n}{(n+u-\frac{1}{2})_n},$$

但し $u = (t+1)/2$. 次の不等式を準備する：

(1) $0 \le u_0 \le 1$, $v > 0$ なら $\frac{u}{u+v} \le \frac{B(u+u_0, v)}{B(u,v)} \le 1$.

[58] John Wallis (1616–1703)

実際、$B(u,v)$ が u について単調減少であることと、(9.17) より

$$B(u,v) \geq B(u+u_0,v) \geq B(u+1,v) = \frac{u}{u+v}B(u,v).$$

さて、

$$B(n+u,\tfrac{1}{2}) \overset{(9.18)}{=} \frac{(n+u-1)_n}{(n+u-\frac{1}{2})_n}B(u,\tfrac{1}{2}) = W_n(t)B(u,\tfrac{1}{2}).$$

また、

(2) $(n+u)_n = (n+u)(n+u-1)_{n-1} = \frac{n+u}{u}(n+u-1)_n$.

これに注意して、

$$B(n+u+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \overset{(9.18)}{=} \frac{(n+u-\frac{1}{2})_n}{(n+u)_n}B(u+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \overset{(2)}{=} \frac{u}{n+u}\underbrace{\frac{(n+u-\frac{1}{2})_n}{(n+u-1)_n}}_{=1/W_n(t)}B(u+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}).$$

これらから、

$$\frac{B(n+u+\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{B(n+u,\frac{1}{2})} = \frac{u}{n+u}\frac{B(u+\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{B(u,\frac{1}{2})W_n(t)^2} = \frac{w(t)^2}{(u+n)W_n(t)^2}.$$

即ち、

(2) $$W_n(t) = w(t)\sqrt{\frac{B(n+u,\frac{1}{2})}{(u+n)B(n+u+\frac{1}{2},\frac{1}{2})}}.$$

(1),(2) より (9.22) を得る。 □

問 9.5.1 命題 9.5.1 の ε_n について、証明中の (1),(2) を用い $-\frac{t+1}{2n+t+1} \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{2n+t+3}$ を示せ。

命題 9.5.2 $n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1+\varepsilon_n)$, 但し $\varepsilon_n \geq 0$, $\lim_n \varepsilon_n = 0$. (**スターリングの公式**[59])

証明： $s_n \overset{\text{def.}}{=} \frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n}$ が非増加で、$\sqrt{2\pi}$ に収束することを証明する。その為に

$$\sigma_n = \log s_n = \sum_{k=1}^{n}\log k - \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\log n + n$$

とし、次を言う：

(1) $$0 \leq \sigma_n - \sigma_{n+1} \leq \tfrac{1}{12n^3}\left(n+\tfrac{1}{2}\right).$$

これが示せれば、極限

$$\sigma = \lim_n \sigma_n = \underbrace{\sigma_1}_{=1} - \sum_{j=1}^{\infty}(\sigma_j - \sigma_{j+1}) \in (-\infty, 1]$$

の存在が分かり、$\lim_n s_n = e^\sigma$ （これが $\sqrt{2\pi}$ に等しいことは、後で示す）. 次の (2),(3) を経て (1) を示す。

(2) $c_n = n+\frac{1}{2}$ とするとき、$x \in [n,n+1]$ で $\frac{1}{c_n} - \frac{x-c_n}{c_n^2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{c_n} - \frac{x-c_n}{c_n^2} + \frac{(x-c_n)^2}{n^3}$.

[59] James Stirling (1692–1770)

(3) $\quad \frac{1}{c_n} \le \log\frac{n+1}{n} \le \frac{1}{c_n} + \frac{1}{12n^3}$.

(2) の左側は、 $\frac{1}{x}$ と、その $x = c_n$ における接線（不等式左辺）の比較による。(2) の右側を示すため $f(x) = \frac{1}{c_n} - \frac{1}{x} - \frac{x-c_n}{c_n^2} + \frac{(x-c_n)^2}{n^3}$ とおくと、

$$f'(x) = \frac{(x-c_n)\{2x^2c_n^2 - (x+c_n)n^3\}}{x^2c_n^2n^3}.$$

$x \in [n, n+1]$ で上式の $\{...\}$ は正なので、$[n, c_n]$ で $f' \le 0$, $[c_n, n+1]$ で $f' \ge 0$. 従って f は $[n, c_n]$ で $\searrow$, $[c_n, n+1]$ で $\nearrow$, $f(c_n) = 0$. 以上より (2) を得る。また、(2) を $x \in [n, n+1]$ で積分すれば (3) を得る。

$$\begin{aligned}\sigma_n - \sigma_{n+1} &= -\log(n+1) - \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\log n + \left(n+\tfrac{3}{2}\right)\log(n+1) - 1\\ &= \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} - 1 \stackrel{(3)}{\in} [0, \frac{c_n}{12n^3}].\end{aligned}$$

以上で (1) が判り、s_n の収束が言えた。

次に $s \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_n s_n = \sqrt{2\pi}$ を示す。

$$\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{4^n s_n^2 n(n/e)^{2n}}{s_{2n}\sqrt{2n}(2n/e)^{2n}} = \frac{s_n^2}{s_{2n}}\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

両辺を $\sqrt{n}$ で割って $n \to \infty$ とすれば、ウォリスの公式より $\sqrt{\pi} = \frac{s}{\sqrt{2}}$ を得る。 □

問 9.5.2 命題 9.5.2 の ε_n について、$0 \le \varepsilon_n \le \frac{1}{n}$ を示せ。

問 9.5.3 命題 9.5.2 でスターリングの公式の証明にウォリスの公式を用いた。これとは逆に、スターリングの公式からウォリスの公式を導け。

問 9.5.4 $k_n \in \{0, 1, ..., n\}$, $\lim_n \frac{k_n}{\sqrt{n/2}} = x \in \mathbb{R}$, $p_n = 4^{-n}\binom{2n}{n+k_n}$ とするとき、$\lim_n \sqrt{\pi n}p_n = \exp(-x^2/2)$ (**ドゥモアブル-ラプラス の中心極限定理**) を示せ[60]。
硬貨を $2n$ 回投げるとする。このとき p_n は表が $n + k_n$(約 $n + x\sqrt{n/2}$) 回出る確率を表す。

9.6 ($\star$) 凸関数

定義 9.6.1 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が次の性質を満たすなら f を **(下に) 凸** (convex) と言う：

$$x, z \in I,\ x < y < z \text{ なら } f(y) \le \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z). \tag{9.23}$$

また、(9.23) の $\le$ が常に $<$ なら、f を **(下に) 狭義 凸** (strictly convex) と言う

問 9.6.1 $\varphi : [0, \infty)$ が凸、$x, y \in [0, \infty)$ に対し $\varphi(x+y) + \varphi(0) \ge \varphi(x) + \varphi(y)$ を示せ。
ヒント：$x + y > 0$ と仮定してよい。この時、$\varphi(x) \le \frac{y}{x+y}\varphi(0) + \frac{x}{x+y}\varphi(x+y)$. また、同様の式が x, y を入れ替えても成立。

命題 9.6.2 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ について以下の各条件は同値。

(a) f は 凸。

[60] Abraham de Moivre (1667–1754), Pierre Simon Laplace (1749–1827)

(b1) $x, z \in I$, $x < y < z$ なら $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

(b2) $x, z \in I$, $x < y < z$ なら $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

(c1) f は次の性質を満たす:

$$\overset{\circ}{I} \text{ 上右可微分かつ左可微分、} \tag{9.24}$$

$$\overset{\circ}{I} \text{ 上 } f'_- \le f'_+, \tag{9.25}$$

$$x \in I,\ z \in \overset{\circ}{I},\ x < z \text{ なら } \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le f'_-(z), \tag{9.26}$$

$$x \in \overset{\circ}{I},\ z \in I,\ x < z \text{ なら } f'_+(x) \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{9.27}$$

(c2) 次の性質を満たす $g : \overset{\circ}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する：

$$x \in I,\ y \in \overset{\circ}{I} \text{ なら } g(y)(x-y) \le f(x) - f(y). \tag{9.28}$$

証明: (a) $\iff$ (b1) $\iff$ (b2): 条件 (b1), (b2) 共に (9.23) の単純な書き換えに過ぎない。

(b1) & (b2) $\Longrightarrow$ (c1): (9.24): 最初に幾つかの注意をする。(b1) は次のように言い替えられる：

(1) $x \in I$ に対し、$y \in I \cap (x, \infty) \mapsto \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ は単調増加。

同様に (b2) は次のように言い替えられる：

(2) $z \in I$ に対し、$y \in I \cap (-\infty, z) \mapsto \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$ は単調減少。

また (b1), (b2) より

(3) $x, z \in I$, $x < y < z$ なら $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

$x \in \overset{\circ}{I}$ とし、x での右可微分性を示そう。$x' < x$ なる $x' \in I$ をひとつ選ぶ。$y \in I$, $x < y$ なら

(4) $\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'} \underbrace{\le}_{(3)\text{ より}} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

(1) と 例 4.3.2 より極限

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in I \cap (x,\infty)}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \inf_{y \in I \cap (x,\infty)} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

が存在し、(4) より $-\infty$ ではないので実数値に確定。これで f の $\overset{\circ}{I}$ 上での右可微分性が判る。左可微分性の証明も同様（問 9.6.2)。

(9.25): (b1) (b2) より $x, z \in I$, $x < y < z$ なら

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

上式で $x \longrightarrow y,\ z \longrightarrow y$ として $f'_-(y) \le f'_+(y)$ を得る。

(9.26): (b2) で $y \longrightarrow z$ とすると、(2) より右辺は単調増加して $f'_-(z)$ に収束。

(9.27): (b1) で $y \longrightarrow x$ とすると、(2) より左辺は単調減少して $f'_+(x)$ に収束。

(c1) $\Longrightarrow$ (c2): $x \in I,\ y \in \overset{\circ}{I},\ f'_-(y) \le g(y) \le f'_+(y)$ とする。

$x < y$ なら (9.26) より

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'_-(y) \le g(y),\ \text{即ち}\ f(x)-f(y) \ge g(y)(x-y).$$

$y < x$ なら (9.27), (9.25) より

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \ge f'_+(y) \ge g(y),\ \text{従って}\ f(x)-f(y) \ge g(y)(x-y).$$

以上より (9.28) が示される。

(c2) $\Longrightarrow$ (a): 凸関数の定義 (9.23) を検証する為、$x, z \in I,\ x < y < z$ とする。(9.28) より

$$\begin{aligned} f(x) &\ge f(y)+g(y)(y-x), \\ f(z) &\ge f(y)+g(y)(y-z). \end{aligned}$$

上の 2 式にそれぞれ $t=(z-y)/(z-x),\ s=(y-x)/(z-x)$ を乗じて加えると、$t+s=1$ より

$$tf(x)+sf(z) \ge f(y)+g(y)\{y-(tx+sz)\}$$

所が、$y = tx+sz$ なので上式から (9.28) が出る。 □

問 9.6.2 命題 9.6.2 (b1) & (b2) $\Longrightarrow$ (c1) の証明中、f の $\overset{\circ}{I}$ 上での左可微分性を示せ。

系 9.6.3 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ について以下の各条件は同値。

(a) f は 狭義 凸。

(b1) $x, z \in I,\ x < y < z$ なら $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} < \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

(b2) $x, z \in I,\ x < y < z$ なら $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} < \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

(c1) f は次の性質を満たす:

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{I}\ \text{上右可微分かつ左可微分、} \\ &\overset{\circ}{I}\ \text{上}\ f'_- \le f'_+, \\ &x \in I,\ z \in \overset{\circ}{I},\ x < z\ \text{なら}\ \frac{f(z)-f(x)}{z-x} < f'_-(z), \qquad (9.29) \\ &x \in \overset{\circ}{I},\ z \in I,\ x < z\ \text{なら}\ f'_+(x) < \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \qquad (9.30) \end{aligned}$$

(c2) 次の性質を満たす $g : \overset{\circ}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する：

$$x \in I,\ y \in \overset{\circ}{I}\ \text{なら}\ g(y)(x-y) < f(x)-f(y). \qquad (9.31)$$

証明: 命題 9.6.2 の証明を辿れば判る。 □

問 9.6.3 $-\infty < a < b < \infty$, $I = [a,b]$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を凸とする。次を示せ：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)|I| \le \int_I f \le \frac{f(a)+f(b)}{2}|I|.$$

ヒント：右側の不等式： f は凸なので、$x \in I$ に対し $f(x) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
左側の不等式： $c = \frac{a+b}{2}$ とする。系 9.6.4 より次のような定数 $\ell \in \mathbb{R}$ が存在：$x \in I$ に対し $f(c) + \ell(x-c) \le f(x)$.

系 9.6.4 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が凸ならば、f は (9.24), (9.25) を満たしかつ、$y \in \overset{\circ}{I}$, $f'_-(y) \le \ell \le f'_+(y)$ なら

$$\text{全ての } x \in I \text{ に対し} \quad \ell(x-y) \le f(x) - f(y).$$

特に $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が狭義 凸 ならば上式 $\le$ は $<$ に置き換わる。

証明: 命題 9.6.2 (c1) $\Rightarrow$ (c2) の証明を辿れば判る。 □

系 9.6.5 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ は凸とする。このとき、

(a) f は $\overset{\circ}{I}$ 上右可微分かつ左可微分、$f'_\pm$ は共に $\overset{\circ}{I}$ 上単調増加。特に、f が狭義凸なら、$f'_\pm$ は共に $\overset{\circ}{I}$ 上狭義単調増加。

(b) $f \in C(\overset{\circ}{I})$. 更に詳しく、次が成立する：$[a,b] \subset \overset{\circ}{I}$ なら全ての $x, y \in [a,b]$ に対し

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y|, \tag{9.32}$$

但し $L = |f'_+(a)| \vee |f'_-(b)| < \infty$.

証明: (a): $\overset{\circ}{I}$ 上右可微分かつ左可微分であることは、命題 9.6.2 で既知。更に $x, z \in \overset{\circ}{I}$, $x < z$ なら

$$f'_-(x) \underbrace{\le}_{(9.25)\text{ より}} f'_+(x) \underbrace{\le}_{(9.27)\text{ より}} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \underbrace{\le}_{(9.26)\text{ より}} f'_-(z) \underbrace{\le}_{(9.25)\text{ より}} f'_+(z).$$

以上より $f'_\pm$ は共に $\overset{\circ}{I}$ 上単調増加。特に、f が狭義凸なら、上記証明で (9.26), (9.27) の替りに (9.29), (9.30) を用いることにより f の狭義単調性を得る。
(b): (9.32) を示せばよい。$x, y \in [a,b]$, $x < y$ なら (9.26), (9.27) と $f'_\pm$ の単調性より

$$f'_+(a) \le f'_+(x) \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'_-(y) \le f'_-(b).$$

これから (9.32) が出る。 □

例 9.6.6 $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ を有界閉区間、$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が凸なら $f \in \mathscr{R}(I)$.

証明：f の有界性：凸であることから、$f \le h_1$ となる 1 次関数 h_1 が存在する（$(a, \varphi(a))$, $(b, \varphi(b))$ を結ぶ線分）。一方、系 9.6.4 より I 上 $h_2 \le f$ となる 1 次関数 h_2 も存在。
$f \in C(\overset{\circ}{I})$: 系 9.6.5(c) による。 □

命題 9.6.7 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ が凸、$x_1, ..., x_n \in I$, $p_1, ..., p_n \in [0,1]$, $p_1 + ... + p_n = 1$ なら

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j p_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} f(x_j) p_j. \tag{9.33}$$

証明：(i):$p_j = 1$, $p_k = 0$, $(k \neq j)$ となる j がある場合: このとき、(9.33) は、左辺 $=\varphi(x_j) =$ 右辺 なので、（自明に）成立する。
(ii): (i) 以外の場合：このとき、$y = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j \in \overset{\circ}{I}$. 従って命題 9.6.2 条件 (c2) より $j = 1, ..., n$ に対し

$$g(y)(x_j - y) \leq f(x_j) - f(y),$$

従って

$$\sum_{j=1}^{n} p_j g(y)(x_j - y) \leq \sum_{j=1}^{n} p_j \left(f(x_j) - f(y)\right)$$

上式で

$$\text{左辺} = 0, \quad \text{右辺} = \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j) - f(y)$$

以上より (9.33) を得る。 □

問 9.6.4 $f \in \mathscr{R}(I)$ が有界閉区間 $J \subset \mathbb{R}$ に値をとり、かつ $\varphi: J \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続かつ凸とする。$\varphi \circ f \in \mathscr{R}(I)$ (命題 7.3.3 証明後の注参照) を認めて次を示せ：$\varphi\left(\frac{1}{|I|}\int_I f\right) \leq \frac{1}{|I|}\int_I \varphi \circ f$ (**イェンセンの不等式**[61]) ヒント：命題 9.6.7 より、リーマン和に対し、$\varphi\left(\frac{1}{|I|} s_I(f, \Delta, \xi)\right) \leq \frac{1}{|I|} s_I(\varphi \circ f, \Delta, \xi)$.

命題 9.6.8 $f \in C(I) \cap D^1(\overset{\circ}{I})$ なら、

$$f' \text{ が } \overset{\circ}{I} \text{ 上単調増加} \iff f \text{ が } I \text{ 上凸} \tag{9.34}$$

$$f' \text{ が } \overset{\circ}{I} \text{ 上狭義単調増加} \iff f \text{ が } I \text{ 上狭義凸} \tag{9.35}$$

更に、$f \in C^1(I) \cap D^2(\overset{\circ}{I})$ なら、

$$\overset{\circ}{I} \text{ 上 } f'' \geq 0 \iff f \text{ が } I \text{ 上凸} \tag{9.36}$$

$$\overset{\circ}{I} \text{ 上 } f'' \geq 0 \text{ かつ次の条件 } (*) \text{ を満たす} \iff f \text{ が } I \text{ 上狭義凸} \tag{9.37}$$

$(*)$ $a, b \in \overset{\circ}{I}$, $a < b$ なら (a, b) 上 $f'' \not\equiv 0$

証明: (9.34) と (9.35) の $\Longrightarrow$：命題 9.6.2, 系 9.6.3 の条件 (c2) が $g = f'$ として成立することを言う。そのため、$x \in I$, $y \in \overset{\circ}{I}$ とする。平均値定理（定理 5.4.1）より

(1) $\exists c \in (x \wedge y, x \vee y)$, $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$.

ここで、f' の単調性より

(2) $y < x$ なら $f'(y) \leq f'(c)$, $x < y$ なら $f'(c) \leq f'(y)$.

(1), (2) より、$x \leq y$, $y \leq x$ いずれの場合も

[61] J.L.W.W. Jensen (1859–1925)

(3) $f'(y)(x-y) \le f(x) - f(y)$.

となり、所期の結果を得る。f' が狭義単調増加なら (2) での 2 つの $\le$ は共に $<$ となる。故に (3) での $\le$ は $<$ となる。

(9.34) と (9.35) の $\Longleftarrow$: 系 9.6.5(a) の特別な場合。

(9.36), (9.37): 仮定より $f' \in C(I) \cap D^1(I)$. 従って f' に微分による増減判定（定理 5.4.6）を適用して、

$$\mathring{I} \text{ 上 } f'' \ge 0 \iff f \text{ が } I \text{ 上単調増加}$$
$$\mathring{I} \text{ 上 } f'' \ge 0 \text{ かつ条件 } (*) \text{ を満たす} \iff f \text{ が } I \text{ 上狭義単調増加}$$

以上と、(9.34), (9.35) から (9.36), (9.37) が判る。 □

問 9.6.5 命題 9.6.8 を用い、以下の $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が狭義凸であることを確かめよ。
(i) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2p}$ $(p \in \mathbb{N} \backslash \{0\})$, $f(x) = a^x$ $(a > 0)$.
(ii)$I = [0, \infty)$, $f(x) = x^p$ $(p > 1)$, $f(x) = -x^p$ $(0 < p < 1)$.
(iii)$I = (0, \infty)$, $f(x) = x^p$ $(p < 0)$,$f(x) = -\log x$.

問 9.6.6 $a_1, ..., a_n \in [0, \infty)$, $p_1, ..., p_n \in [0, 1]$, $p_1 + ... + p_n = 1$ なら

$$a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} \le a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n.$$

上の不等式で、$n = 2$ の場合を Young の不等式という。また、$p_1 = \cdots = p_n = 1/n$ の場合が 「相加平均 $\ge$ 相乗平均」。
ヒント；$a_j > 0$ の場合を示せば十分。そこで、両辺の log を考え、 命題 9.6.7 を適用。

9.7 $(\star)\Gamma$-関数・ B-関数 （続き）

補題 9.7.1 $0 < u \mapsto \log \Gamma(u)$ は凸である。また、$w > 0$ を固定するとき、$0 < u \mapsto \log B(u, w)$ は凸である。

証明： $u \to \log \Gamma(u)$ が凸であることを示すため、$p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u, v > 0$ とする。このとき、

$$\Gamma\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}\right) = \int_0^\infty (x^{u-1}e^{-x})^{1/p}(x^{v-1}e^{-x})^{1/q}\, dx$$

ところが、ヘルダーの不等式（問 7.3.3 で、狭義の積分に対して示したが、広義積分に対しても同様に示される）より

$$\text{上式右辺} \le \left(\int_0^\infty x^{u-1}e^{-x}\, dx\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty x^{v-1}e^{-x}\, dx\right)^{1/q} = \Gamma(u)^{1/p}\Gamma(u)^{1/q}.$$

両辺の対数をとれば、

$$\log \Gamma\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}\right) \le \frac{\log \Gamma(u)}{p} + \frac{\log \Gamma(v)}{q}.$$

次に $u \to \log B(u, w)$ が凸であることを示すため、$p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u, v > 0$ とする。このとき、

$$B\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}, w\right) = \int_0^1 (x^{u-1}(1-x)^{w-1})^{1/p}(x^{v-1}(1-x)^{w-1})^{1/q}\, dx$$

ところが、ヘルダーの不等式（問 7.3.3 で、狭義の積分に対して示したが、広義積分に対しても同様に示される）より

$$\begin{aligned}\text{上式右辺} &\le \left(\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{w-1}\,dx\right)^{1/p}\left(\int_0^1 x^{v-1}(1-x)^{w-1}\,dx\right)^{1/q}\\ &= B(u,w)^{1/p}B(u,w)^{1/q}.\end{aligned}$$

両辺の対数をとれば、

$$\log B\left(\frac{u}{p}+\frac{v}{q},w\right)\le\frac{\log B(u,w)}{p}+\frac{\log B(v,w)}{q}.$$

□

命題 9.7.2 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ が次の性質を満たすとする：

(a) $f(1)=1,\ f(u+1)=uf(u)\ (\forall u>0)$.

(b) $\log f$ は凸。

このとき、任意の $u>0$ に対し

$$f(u)=\Gamma(u)=\lim_n\frac{n!n^u}{u(u+1)\cdots(u+n)}.\quad(\textbf{ガウスの積公式})$$

証明： Γ 関数は (a),(b) を満たす（命題 9.4.1）。従って、一般に (a),(b) を満たす f について

(1) $\qquad f(u)=\lim_n\frac{n!n^u}{u(u+1)\cdots(u+n)}.$

を言えばよい。$\varphi=\log f$,

$$\varphi_n(u)=\log\left(\frac{n!n^u}{u(u+1)\cdots(u+n)}\right)$$

とする。まず、(a) を繰り返し用い

(2) $\qquad \varphi(u+n)-\varphi(u)=\sum_{j=0}^{n-1}(\underbrace{\varphi(u+j+1)-\varphi(u+j)}_{\log(u+j)})=\log\left(u(u+1)\cdots(u+n-1)\right).$

特に $u=1$ とすれば

(3) $\qquad \varphi(n+1)=\log n!.$

また、

(4) $\qquad \varphi(u)-\varphi_n(u)=\varphi(u+n+1)-\varphi(n+1)-u\log n.$

実際、(2) で n のかわりに $n+1$ とすると、

$$\varphi(u+n+1)-\varphi(u)=\log\left(u(u+1)\cdots(u+n)\right)=-\varphi_n(u)+\underbrace{\log n!}_{\varphi(n+1)}+u\log n.$$

今、$u\in(0,1]$ とする。一方、φ は凸なので、$[n,n+1]$, $[n+1,u+n+1]$, $[n+1,n+2]$ でのグラフの傾きを考えて、

$$\underbrace{\varphi(n+1)-\varphi(n)}_{\log n}\le(\varphi(u+n+1)-\varphi(n+1))/u\le\underbrace{\varphi(n+2)-\varphi(n+1)}_{\log(n+1)}.$$

これを (4) に代入すると、

$$0 \le \varphi(u) - \varphi_n(u) \le u \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$n \to \infty$ として、$\lim_n \varphi_n(u) = \varphi(u)$. $u \in (0,1]$ に対し (1) がわかった。ここから、$u \in (0,n](n \in \mathbb{N}$ は任意） に対し (1) が成立することを n に関する帰納法で容易に示すことができる。 $\square$

命題 9.4.3 の証明：v を固定し、関数 $f(u) = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(v)} B(u,v)$ が命題 9.7.2 の条件 (a),(b) を満たすことを言えば (9.21) がわかる。

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(v)} B(1,v) \overset{(9.6),(9.14)}{=} \frac{v\Gamma(v)}{\Gamma(v)} \frac{1}{v} = 1. \\ f(u+1) &= \frac{\Gamma(1+u+v)}{\Gamma(v)} B(1+u,v) \overset{(9.6),(9.16)}{=} \frac{(u+v)\Gamma(u+v)}{\Gamma(v)} \frac{u}{u+v} B(u,v) = uf(u). \end{aligned}$$

また、

$$\log f(u) = \log \Gamma(u+v) + \log B(u,v) - \log \Gamma(v)$$

の右辺第 1,2 項は凸（命題 9.4.1, 命題 9.4.2）だから $\log f$ は凸である。これで (9.21) がわかった。

(9.21) で $u = v = 1/2$ とすれば、$\pi = \Gamma(\frac{1}{2})^2$ となり、これから $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ が判る。$\square$

10　収束の一様性

10.1　一様収束と局所一様収束

$I \subset \mathbb{R}$ を有界な区間、$f_n, f \in C(I)$ も有界とする。もし、各点 $x \in I$ で $\lim_n f(x) = f(x)$ なら

$$\lim_n \int_I f_n = \int_I f \tag{10.1}$$

ではないか？... と漠然と期待してしまうかも知れない。所が、(10.1) は正しいこともあれば、正しくないこともある。

例 10.1.1 $I = (0, 1]$ とする。

(a) $f_n(x) = x/n$ とすると、I 上各点で $f_n \longrightarrow 0$. また、

$$\int_I f_n = \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^1 x dx}_{=1/2} \longrightarrow 0, \ \ (n \longrightarrow \infty)$$

だから (10.1) は正しい。ちなみにこの f_n について $\sup_I f_n = \frac{1}{n}$. 従って

(a') $\lim_n \sup_I f_n = 0$.

(b) $f_n(x) = \left(n - n^2 x\right) \vee 0$ $(x \in I,\, n \in \mathbb{N})$ とする。絵を描いてみると容易に分るように I 上各点で $f_n \longrightarrow 0$ だが、$\int_I f_n \equiv 1/2$. 従って (10.1) は正しくない。ちなみにこの f_n については $\sup_I f_n = n \geq 1$ だから、(a') は不成立である。

もし、どういう条件のもとで (10.1) が正しいか分れば、その条件を確かめることにより安心して (10.1) を使うことができる。その「条件」のひとつが「一様収束」と呼ばれる概念であり、例 10.1.1(a) の f_n がもつ性質 (a') を一般化したものと考えられる：

定義 10.1.2 D を集合、 $f, f_n, n = 0, 1, ...$ は D 上の関数とする。

•

$$\|f\|_D = \sup_D |f| \tag{10.2}$$

を D 上の**一様ノルム** (uniform norm) と呼ぶ[62]

•

(1) $\lim_n \|f_n - f\|_D = 0$.

なら、(f_n) は f に D 上**一様収束**する（converge uniformly）と言う。これに対し、

(2) 全ての $x \in D$ に対し $\lim_n f_n(x) = f(x)$

なら (f_n) は f に (D 上) **各点収束**する（converge pointwise）と言う。全ての $x \in D$ に対し $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_D$ だから (1), (2) より

$$\text{一様収束} \implies \text{各点収束} \tag{10.3}$$

である。

[62] この節では、一様ノルムを用いる機会が多い。その度に "$\sup_D |f|$" と書くのは煩わしいので、(10.2) の略式記号を用いることにする（この講義の中だけの記号だが)。

問 10.1.1 $x \in [0,1]$,$f_n(x) = x^n$, $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ とする。以下を示せ：(i) f_n は $[0,1]$ 上 f に各点収束するが一様収束しない。(ii) $0 < \delta < 1$ のとき、f_n は $[0,\delta]$ 上 f に一様収束する。

問 10.1.2 一様ノルム (10.2) に関して以下を示せ：(i) $f \not\equiv 0$ なら $\|f\|_D > 0$. (ii) $c \in \mathbb{R}$ に対し $\|cf\|_D = |c|\|f\|_D$. (iii) $\|f+g\|_D \le \|f\|_D + \|g\|_D$.

問 10.1.3 $f_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ が一様収束するなら、任意の $\varepsilon > 0$ に対し「$m,n \ge n_0 \implies \|f_m - f_n\|_D < \varepsilon$」を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在することを示せ。
注：この問の逆も正しい。

問 10.1.4 $I = (0,1]$,$f \in C(I)$ に対し $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n = 1,2,..)$ を $x \in (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ $(k = 1,..,n)$ なら $f_n(x) = f(\frac{k}{n})$ と定める。このとき以下を示せ：(i) 任意の $x \in I$ に対し $\lim_n |f(x) - f_n(x)| = 0$. (ii) $f \in C_{\mathrm{u}}(I)$ なら $\lim_n \|f - f_n\|_I = 0$. (iii) $f \in C(I)$ が有界なら $\lim_n \|f - f_n\|_I = 0$ か？ ヒント：問 7.6.3.

問 10.1.5 ($\star$) $B_{n,r}(x) = \frac{n!}{r!(n-r)!} x^r (1-x)^{n-r}$ $(x \in \mathbb{R},\ n,r \in \mathbb{N},\ r \le n)$ とする。以下を示せ：(i) $\varphi(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{r=0}^n e^{rt} B_{n,r}(x) = ((e^t - 1)x + 1)^n$, 特に $\varphi(0) = \sum_{r=0}^n B_{n,r}(x) = 1$.
(ii)$\varphi'(0) = \sum_{r=0}^n r B_{n,r}(x) = nx$. (iii) $\varphi''(0) = \sum_{r=0}^n r^2 B_{n,r}(x) = n(n-1)x^2 + nx$.
特に $x \in [0,1]$ なら、 $B_{n,r}(x)$ は、成功確率 x の独立事象が n 回中 r 回成功する確率を表す。また、n 回中の成功回数を表す確率変数を S_n とするとき $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ はそれぞれ S_n, S_n^2 の平均値である。

問 10.1.6 ($\star$) **多項式近似定理**: $I = [0,1]$, $B_{n,r}(x) = \frac{n!}{r!(n-r)!} x^r (1-x)^{n-r}$ $(x \in I,\ n,r \in \mathbb{N},\ r \le n)$ とする (問 10.1.5 参照)。以下を示せ：
(i) $\sum_{r=0}^n (r - nx)^2 B_{n,r}(x) = nx(1-x) \le n/4$.
(ii) 任意の $x \in I$, $\delta > 0$ に対し $\sum_{\substack{0 \le r \le n \\ |k-nx| \ge n\delta}} B_{n,r}(x) \le (4n\delta^2)^{-1}$.
(iii) $f \in C(I)$, $f_n \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{r=0}^n f(n/r) B_{n,r}$ とすると、$\lim_n \|f - f_n\|_I = 0$
この問より、 任意の $f \in C(I)$ に対し、I 上 f に一様収束する多項式の列 f_n の存在が分かる。この事実 は 1885 年 ワイエルシュトラスにより得られた。問 10.1.6 で述べた証明はベルンシュタインによる（1912 年)。

問 10.1.7 ($\star$) $-\infty < a < b < \infty$, $I = [a,b]$ とする。各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n : I \to \mathbb{R}$ は非減少かつ、各 $t \in I$ に対し $f(t) = \lim_n f_n(t)$ が存在して連続と仮定する。このとき、$\lim_n \|f_n - f\|_I = 0$ を示せ。

問 10.1.8 ($\star$) $K \subset \mathbb{R}^d$ はコンパクト、$f_n \in C(K \to \mathbb{R})$ $(n = 1,2,\cdots)$ は $\forall x \in K$ で、$f_1(x) \ge f_2(x) \ge \cdots \ge f_n(x) \ge \cdots \ge \inf_{n \ge 1} f_n(x) > -\infty$ を満たすとする。以下を示せ：
(i)$\sup_{x \in K} \inf_{n \ge 1} f_n(x) = \inf_{n \ge 1} \sup_{x \in K} f_n(x)$. (ii) **ディニ の定理**[63]**:** $f(x) = \inf_{n \ge 1} f_n(x)$ が連続関数なら $\lim_n \|f_n - f\|_K = 0$.

[63]Ulisse Dini (1845–1913)

定義 10.1.3 $D \subset \mathbb{R}^d$, f, f_n, $n = 0, 1, ...$ は D 上の関数とする。

- 全てのコンパクト集合 $K \subset D$ に対し

$$\lim_n \|f_n - f\|_K = 0$$

なら、(f_n) は f に (D 上) **局所一様収束**する（converge locally uniformly）、或いは **広義一様収束**（converge uniformly in wider sense）と言う。全ての $x \in D$ に対し $K = \{x\}$ はコンパクト、また、全ての部分集合 $K \subset D$ に対し

$$\|f_n - f\|_K \leq \|f_n - f\|_D$$

なので、

$$\text{一様収束} \implies \text{局所一様収束} \implies \text{各点収束}. \tag{10.4}$$

問 10.1.9 f, f_n, g $(\nu \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{R}^d$ 上の有界関数で、$f_n \to f$ ($\mathbb{R}^d$ 上局所一様)、$\lim_{|x| \to \infty} g(x) = 0$ とする。このとき、$f_n g \to fg$ ($\mathbb{R}^d$ 上一様) を示せ。

問 10.1.10 $D \subset \mathbb{R}^d$, $f_n : D \to \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $f \in C(D \to \mathbb{C})$ とする。このとき、次の (a),(b) は同値であることを示せ：**(a)**: $f_n \to f$ (D 上局所一様). **(b)**: 任意の収束列 $x_n \to x$ に対し、$f_n(x_n) \to f(x)$.

連続関数列 f_n が f に各点収束しても、f は連続とは限らない（問 10.1.1）。所が、局所一様収束するならば f の連続性が保証される：

定理 10.1.4 $D \subset \mathbb{R}^d$, $f_n \in C(D)$, $n = 0, 1, ...$ が $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ に局所一様収束すれば、$f \in C(D)$.

証明： $x_n, x \in D$, $x_n \longrightarrow x$ とし、$f(x_n) \longrightarrow f(x)$ を言えばよい。任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \underbrace{|f(x_n) - f_m(x_n)|}_{(1)} + \underbrace{|f_m(x_n) - f_m(x)|}_{(2)} + \underbrace{|f_m(x) - f(x)|}_{(3)}.$$

$K \stackrel{\text{def.}}{=} \{x_n\}_{n \geq 0} \cup \{x\}$ はコンパクトである。$f_n \longrightarrow f$ (局所一様) より

$(*)$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\|f - f_m\|_K < \varepsilon/3$,

従って、$(*)$ の m に対し

$$(1) + (3) < 2 \cdot \varepsilon/3.$$

一方、$(*)$ の m に対し $f_m \in C(D)$ より

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ (2) < \varepsilon/3.$$

以上より $\forall n \geq n_0$ に対し $(1) + (2) + (3) < \varepsilon$. □

問 10.1.11 $D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $f_n \in C(D)$ $(n \in \mathbb{N})$ とする。$f_n \longrightarrow f$ (D 上各点収束) を仮定するとき、以下に述べる条件について (a) $\iff$ (b) $\implies$ (c) を示せ：(a) $f_n \longrightarrow f$ (D 上局所一様)。(b) $x_m, x \in D$, $x_m \longrightarrow x$ なら $\lim_m \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x_m) - f_n(x)| = 0$. このとき、$(f_n)_{n \geq 0}$ は**同程度連続**（equi-continuous）と言う。(c) $f \in C(D)$.

ヒント：(a) $\implies$ (c) （定理 10.1.4）なので (a) $\implies$ (b) を言う際、(c) も仮定してよい。(b) $\implies$ (a) を言う際も、まず (c) を示してからそれを用いて (a) を示す。

10.2　関数項級数

10.1 節で関数列の（局所）一様収束という概念を導入した。関数列の具体例は巾級数の部分和をはじめ、関数項級数の形で与えられることが少なくない。10.2 節では関数項級数が（局所）一様収束するための代表的な十分条件を与える。

定理 10.2.1 (**ワイエルシュトラス の M-テスト**) D を集合、$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ （$n \in \mathbb{N}$）,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_D < \infty$$

なら関数項級数 $s = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は D の各点で絶対収束し、かつ

$$\lim_N \|s - \sum_{n=0}^{N} f_n\|_D = 0.$$

証明： 全ての $x \in D$ に対し $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_D$. よって $\|\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\|_D \le \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_D$. 以上から、全ての $x \in D$ に対し

(1) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \le \left\| \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \right\|_D \le \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_D.$

(1) より $s = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は D の各点で絶対収束する。また、

$$\|s - \sum_{n=0}^{N} f_n\|_D \le \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n| \right\|_D \overset{(1)}{\le} \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_D.$$

仮定より、上式右辺 $\to 0$ $(N \to 0)$. □

例 10.2.2 $a_n, c \in \mathbb{C}$, $(n \in \mathbb{N})$, $\rho \in (0, \infty]$ とし、巾級数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

は全ての $z \in D_\rho(c) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z-c| < \rho\}$ に対し絶対収束するとする。このとき、

(a) 上の巾級数は $D_\rho(c) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z-c| < \rho\}$ 上局所一様収束する。

(b) (a) で述べた収束は、一般には $D_\rho(c)$ 上一様でない。

証明： $g_n(z) = a_n(z-c)^n$, $f_n = \sum_{j=0}^{n} g_j$ とする。
(a):任意のコンパクト集合 $K \subset D_\rho(c)$ に対し $\exists r < \rho$, $K \subset D_r(c)$. 従って、仮定より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_K \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty.$$

従って、ワイエルシュトラス の M-テスト より f_n は K 上一様収束する。
(b): 今、$c = 0$, $a_n \equiv 1$ なら、$f(z)$ は全ての $z \in D_1(0)$ で絶対収束する。所が、$x_n = 1 - n^{-1} \in D_1(0)$ に対し

$$\|f_n - f_{n-1}\|_{D_1(0)} = \|g_n\|_{D_1(0)} \ge g_n(x_n) = x_n^n \longrightarrow e^{-1} > 0$$

上式と 問 10.1.3 より f_n は $D_1(0)$ 上一様収束しない。 □

問 10.2.1 $f_n(x)=\sum_{j=1}^n \frac{1}{1+xj^2}$ は $n\to\infty$ のとき $x\in(0,\infty)$ について局所一様収束するが、一様収束はしないことを示せ。

問 10.2.2 $\mathrm{Arcsin}\, y=\sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!y^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ （命題 6.4.1 参照）の右辺は $y\in[-1,1]$ について一様収束することを示せ。

問 10.2.3 ($\star$) **全ての点で微分不可能な連続関数** $x\in\mathbb{R}$ に対し $g(x)=(x-[x])\wedge(1-(x-[x]))$, （$[x]$ は x の整数部分）$f(x)=\sum_{n=1}^\infty 4^{-n}g(4^nx)$ とおく。以下を示せ。(i)：f は $\forall x\in\mathbb{R}$ で連続。(ii):f は $\forall x\in\mathbb{R}$ で微分不可能。ヒント：$g_n(x)=4^{-n}g(4^nx)$, また $x\in\mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots$ に対し

$$\delta_k(x)=\begin{cases}4^{-k-1}, & \text{if } x\in\cup_{m\in\mathbb{Z}}\left[\frac{2m}{4^{k+1}},\ \frac{2m+1}{4^{k+1}}\right),\\ -4^{-k-1}, & \text{if } x\in\cup_{m\in\mathbb{Z}}\left[\frac{2m-1}{4^{k+1}},\ \frac{2m}{4^{k+1}}\right)\end{cases}$$

とおく。このとき、$|g_n(x+\delta_k(x))-g_n(x)|$ の値は、$n\le k$, $n>k$ に応じて各々 4^{-k-1}, 0 となることを示し、$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x+\delta_k(x))-f(x)}{\delta_k(x)}$ が存在しないことを結論せよ。

ワイエルシュトラスの M-テスト (定理 10.2.1) は関数項級数が、絶対かつ一様に収束する為の十分条件を与える。一方、後で示すように (例 10.2.5)、

$$g(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\quad x\in[0,1]$$

は一様収束するが、$x=1$ まで含めた $g(x)$ の一様収束はワイエルシュトラスの M-テストから直接には得られない（ $g(1)$ は絶対収束しない)。このように、必ずしも絶対収束しない関数項級数が一様収束する為の十分条件 (定理 10.2.4) を与えよう。そのために次の補題を用意する。補題の条件は少し複雑に見えるかも知れないが、$p_n=1/n$, $q_n=(-1)^{n-1}$ といった具体例 (上記 $g(1)$ に対応する) を念頭におくと意味が分りやすいだろう。

補題 10.2.3 (**ディリクレの収束判定法**) 数列 $p_n\in[0,\infty)$, $q_n\in\mathbb{C}$ $(n\in\mathbb{N})$ に以下の条件を考える：

(a) 全ての $n\in\mathbb{N}$ に対し $p_n\ge p_{n+1}$.

(b) $Q_n=q_0+\ldots+q_n$ は有界。

(c1) $\lim_n p_n=0$.

(c2) Q_n が 収束。

このとき、(a),(b) に加え、(c1) または (c2) を仮定すれば、

$$s_n=\sum_{m=0}^n p_mq_m$$

は収束し、極限 s は次を満たす：

$$|s-s_m|\le 2p_{m+1}\sup_{j\ge m}|Q_j-Q|. \tag{10.5}$$

但し (c1) を仮定するとき $Q\in\mathbb{C}$ は任意、また、(c2) を仮定するとき $Q=\lim_n Q_n$.

証明： まず (a),(b) を仮定する。$n \ge m \ge 0$, $Q \in \mathbb{C}$ に対し $q_j = (Q_j - Q) - (Q_{j-1} - Q)$ に注意すると、

$$\begin{aligned} s_n - s_m &= \sum_{j=m+1}^{n} p_j q_j = \sum_{j=m+1}^{n} p_j (Q_j - Q) - \sum_{j=m}^{n-1} p_{j+1}(Q_j - Q) \\ &= \underbrace{\sum_{j=m+1}^{n-1} (p_j - p_{j+1})(Q_j - Q)}_{(1)} + \underbrace{p_n(Q_n - Q)}_{(2)} - p_{m+1}(Q_m - Q). \end{aligned}$$

よって、s_n の収束を言うには、(1),(2) の収束 $(n \to \infty)$ を言えばよい。
(1) について:

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^{n-1} |(p_j - p_{j+1})(Q_j - Q)| &\le \sup_{j \ge m+1} |Q_j - Q| \sum_{j=m+1}^{n-1} (p_j - p_{j+1}) \\ &\le p_{m+1} \sup_{j \ge m+1} |Q_j - Q| \quad (n \text{ に無関係な有限値}). \end{aligned}$$

よって、 (1) は n についての級数と考えて絶対収束する。
(2) について: (c1) を仮定すると

$$|(2)| \le p_n \sup_j |Q_j - Q| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

また、(c2) を仮定し、$Q = \lim_n Q_n$ とすると、

$$|(2)| \le p_0 |Q_n - Q| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

以上から s_n の収束が言えた。また、上で得られた不等式を組み合わせると、

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &\le |(1)| + |(2)| + p_{m+1}|Q_m - Q| \\ &\le p_{m+1} \sup_{j \ge m+1} |Q_j - Q| + |(2)| + p_{m+1}|Q_m - Q| \\ &\le 2p_{m+1} \sup_{j \ge m} |Q_j - Q| + |(2)|. \end{aligned}$$

また、上の議論より $\lim_n (2) = 0$ だから上式で $n \to \infty$ とすれば (10.5) を得る。 □

定理 10.2.4 (**ディリクレの一様収束判定法**[64]) D を集合とし、関数列

$$p_n : D \longrightarrow [0, \infty), \quad q_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

について以下の条件を考える：

(a) 全ての $x \in D$, $n \in \mathbb{N}$ に対し $p_n(x) \ge p_{n+1}(x)$.

(b) $Q_n = q_0 + ... + q_n$ について $\sup_{n \ge 0} \|Q_n\|_D < \infty$.

(c1) $\lim_n \|p_n\|_D = 0$.

(c2) $\|p_0\|_D < \infty$ かつ Q_n が D 上一様収束。

[64] この呼び名の是非はわからないが、引用の便宜の為、こう呼ぶことにする。

このとき、(a),(b) に加え、(c1) または (c2) を仮定すれば、関数項級数

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} p_m q_m$$

は D 上一様収束し、極限 s は次を満たす：

$$|s(x) - s_m(x)| \le 2p_{m+1}(x) \sup_{j \ge m} |Q_j - Q|(x) \quad x \in D. \tag{10.6}$$

但し (c1) を仮定するとき $Q : D \to \mathbb{C}$ は任意、また、(c2) を仮定するとき $Q(x) = \lim_n Q_n(x)$.

証明： 各 $x \in D$ 毎に 補題 10.2.3 を適用して、s_n の各点収束と (10.6) を得る。(10.6) より、

$$\|s - s_m\|_D \le 2\|p_{m+1}\|_D \sup_{j \ge m} \|Q_j - Q\|_D.$$

よって (c1) または (c2) を仮定すれば $\lim_m \|s - s_m\|_D = 0$. □

例 10.2.5 $\varepsilon \ge 0$, $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \, ; \, |z| \le 1, \ |1+z| > \varepsilon\}$ とする（絵で説明）。

(a) $\varepsilon > 0$ なら $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ は D_ε 上一様収束する。

(b) $x \in (-1, 1]$ に対し $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$. 右辺は $[-1+\varepsilon, 1]$ 上一様収束する。

証明：(a): 定理 10.2.4 で $D = D_\varepsilon$, $p_n = 1/n$, $q_n(z) = (-1)^{n-1} z^n$ とすると、

$$Q_n(z) = z \sum_{m=0}^{n-1} (-z)^m = z \frac{1 - (-z)^n}{1+z}$$

従って、

$$|Q_n(z)| \le \frac{2}{|1+z|} \le \frac{2}{\varepsilon}$$

となり、定理 10.2.4 の仮定 (a),(b),(c1) が満たされ、所期の一様収束が判る。
(b): $f(x) = \log(1+x)$ とする。(a) より、g の収束は $[-1+\varepsilon, 1]$ 上一様だから $g \in C([-1+\varepsilon, 1] \to \mathbb{R})$ (定理 10.1.4). また、$x \in (-1, 1)$ なら $f(x) = g(x)$ (例 5.4.8). そこで、$x \to 1$ として $x = 1$ でも等式が正しいことが分る。 □

問 10.2.4 $x \in [-1, 1]$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x)\log(1-x) + x$ を示せ。

問 10.2.5 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+n}$ は $x \in [0, \infty)$ について一様収束し、連続関数になることを示せ。

問 10.2.6 ($\star$) $z \in \mathbb{C} \backslash \{-1\}$, $|z| \le 1$ に対し $\mathrm{Log}\,(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ を示せ（命題 6.5.1 参照）。

定理 10.2.6 (**アーベルの定理**[65]) 複素数列 $(a_n)_{n\ge 0}$ に対し $\sum a_n$ が収束するとする。このとき、

$$s_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m, \ \ n \in \mathbb{N}$$

は $x \in [0,1]$ について一様収束し、極限 $s(x)$ は $[0,1]$ 上連続。

証明：$D = [0,1]$, $q_n(x) = a_n$, $p_n(x) = x^n$ とすると 定理 10.2.4 の仮定 (a), (b), (c2) が満たされ、所期の一様収束が判る。$s(x)$ の連続性は定理 10.1.4 による。 □

例 10.2.7 $y \in [-1,1]$ に対し $\mathrm{Arctan}\, y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1}$. 特に $y=1$ とすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}, \quad (\textbf{ライプニッツの級数}).$$

証明：$y \in (-1,1)$ に対しては 命題 6.4.2 で示した。右辺の級数を $f(y)$ として、$f(y)$ が $[-1,1]$ で一様収束すれば 定理 10.1.4 より $y = \pm 1$ での連続性が判り結論を得る。ところが、$f(y)$ の部分和は奇関数なので $[0,1]$ 上での一様収束を言えば十分。今、$f(1)$ は $y=1$ で収束する（交代級数収束定理：命題 2.5.9(b)、あるいは 補題 10.2.3 より）。従って、定理 10.2.6 より $f(y)$ は $[0,1]$ 上一様収束する。 □

問 10.2.7 $x \in [-1,1]$ に対し $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \int_0^x \frac{\mathrm{Arctan}\, y}{y} dy$ を示せ。$x=1$ のとき、この級数（積分）の値をカタラン数と言う[66]。

10.3 関数列の微分・積分

10.3 節では、関数列の極限と積分の交換可能性：

$$\lim_n \int_I f_n = \int_I \lim_n f,$$

(項別積分とも言う)、あるいは、関数列の極限と微分の交換可能性：

$$\lim_n f_n' = (\lim_n f)'$$

(項別微分とも言う) について考える。これらについては、「収束の一様性」が鍵となる。一方、この節で述べる例や問からも分るように、こうした微分・積分と極限の交換可能性により、興味深い数々の等式が証明できる。今まで微分積分学を学んできた成果を実感できるのでは... と期待する。

定理 10.3.1 (**項別積分**) $I \subset \mathbb{R}^d$ を有界区間、$f_n \in \mathscr{R}(I)$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ とする（定義 7.1.4 参照）。このとき、以下の条件に関して (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) が成立する：

(a) $\lim_n \|f_n - f_\infty\|_I = 0.$

(b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_I < \infty$ かつ $f_n \longrightarrow f_\infty$ (I 上局所一様)

[65] Niels Henrik Abel (1802–1829)

[66] Eugéne Charles Catalan (1814–1894).

(c) $\lim_n \int_I |f_n - f_\infty| = 0$. 特に、$\lim_n \int_I f_n = \int_I f_\infty$.

証明： (a) $\Rightarrow$ (b) は明らか。(b) $\Rightarrow$ (c) を示す前に、(a) $\Rightarrow$ (c) が次のようにして分かることに注意する：

$$\left|\int_I f_\infty - \int_I f_n\right| \le \int_I |f_\infty - f_n| \le \|f_\infty - f_n\|_I |I| \longrightarrow 0 \ \ (n \longrightarrow \infty).$$

(b) $\Rightarrow$ (c) を示す。$M = \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \|f_n\|_I$ とおく。今、$\varepsilon > 0$ と任意とし、閉区間 $J \subset I$ を $|I| - |J| < \frac{\varepsilon}{4M+1} \le \varepsilon$ なるようにとる。$\lim_n \|f_n - f_\infty\|_J = 0$ と、先程述べた注意より、次のような $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在：

$$n \ge n_0 \implies \int_J |f_n - f_\infty| \le \varepsilon/2.$$

$n \ge n_0$ とするとき、$\|f_\infty - f_n\|_I \le 2M$, 及び区間加法性を用い、

$$\int_I |f_n - f_\infty| \le \int_J |f_n - f_\infty| + 2M(|I| - |J|) \le \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M+1} \le \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから (c) を得る。 □

注１：定理 10.3.1 (b) より更に緩やかな次の条件を仮定しても (c) は成立する (ルベーグの収束定理の特別な場合、[吉田 1, 52 頁, 定理 2.4.1] 参照)：

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_I < \infty \text{ かつ } f_n \longrightarrow f_\infty \ (I \text{ 上各点収束})$$

但し、$f_n \longrightarrow f_\infty$ (I 上各点収束) だけでは (c) を結論出来ない (例 10.1.1 参照)。

注２：定理 10.3.1 で $f_n \in \mathscr{R}(I)$ ($n \in \mathbb{N}$) だけでなく、$f_\infty \in \mathscr{R}(I)$ も仮定した。だが、実は $f_n \in \mathscr{R}(I)$ ($n \in \mathbb{N}$) と 仮定 (b) から $f_\infty \in \mathscr{R}(I)$ も自動的に従う。このことはあまり応用される機会がないと思うが、念の為 10.3 節の末尾に証明しておく。

例 10.3.2 $x \in (-1, 1)$ に対し $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ (例 5.4.8) を項別積分を用いて再証明する。

証明： $f_N(y) = \sum_{n=0}^{N} (-y)^n$ とおく。

(1) $y \in (-1, 1)$ について局所一様に $\lim_N f_N(y) = \frac{1}{1+y}$ (例 10.2.2).

(2) $x \in (-1, 1)$ に対し $\int_0^x f_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$.

$x \in (-1, 1)$ とすると (1) の収束は $[0 \wedge x, 0 \vee x]$ 上一様。従って、

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \int_0^x \frac{dy}{1+y} \overset{\text{項別積分}}{=} \lim_N \int_0^x f_N \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.
\end{aligned}$$

□

問 10.3.1 $x \in (-1,1)$ に対する展開 $\mathrm{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ (命題 6.4.2) を 例 10.3.2 の証明に倣って示せ。

問 10.3.2 $f(\theta) = \frac{1-r^2}{|1-re^{\mathbf{i}\theta}|^2}$ $(\theta \in \mathbb{R},\ 0 < r < 1)$ に対し以下を示せ：
(i) 全ての $\theta \in \mathbb{R}$ に対し $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{\mathbf{i}n\theta}$ (右辺は $\theta \in \mathbb{R}$ について一様収束). ヒント：$f(\theta) = 1 + \frac{re^{\mathbf{i}\theta}}{1-re^{\mathbf{i}\theta}} + \frac{re^{-\mathbf{i}\theta}}{1-re^{-\mathbf{i}\theta}}$.
(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-\mathbf{i}n\theta}\, d\theta = r^{|n|}$, $(n \in \mathbb{Z})$.
上の f は単位円板の**ポアソン核** と呼ばれる。この問で f のフーリエ級数（例 10.3.6）による表示が得られたことになる。

問 10.3.3 以下を示せ：(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x\log x)^n}{n!}$ は $x \in (0,1]$ について一様収束する。(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x}\, dx$. ヒント：(9.8),(9.10).

問 10.3.4 $(\star)$ (i) $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C^1(I)$ とする。$\lim_n \frac{n}{(b-a)^{n+1}} \int_I (b-x)^n f(x) dx = f(a)$ を示せ。(ii) $b \geq 0$,$s_n(b) = \sum_{m=0}^{n} \frac{b^m}{m!}$ とする。$\lim_n \frac{(n+1)!}{b^{n+1}} \left(e^b - s_n(b)\right) = 1$ を示せ。ヒント：$e^b - s_n(b)$ の積分表現 (定理 8.4.3) に (i) を適用する。

例 10.3.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

証明： $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{b_n x^{2n+1}}{2n+1}$ (但し $b_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$) とおくと

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} f_N \circ \sin &= \sum_{n=0}^{N} \frac{b_n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} \\ &\stackrel{\text{問 9.4.10}}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{b_n}{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

よって

$$\lim_N \int_0^{\pi/2} f_N \circ \sin = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \tag{1}$$

一方、問 10.2.2 より $\lim_N f_N = \mathrm{Arcsin}$ ([0,1] 上一様収束). 従って $\lim_N f_N \circ \sin\theta = \theta$ $(\theta \in [0,\pi/2]$ について一様収束). よって項別積分 (定理 10.3.1) より

$$\lim_N \int_0^{\pi/2} f_N \circ \sin = \int_0^{\pi/2} \theta\, d\theta = \frac{\pi^2}{8}. \tag{2}$$

(1),(2) より $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. また、

$$s \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}}_{=\pi^2/8} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}}_{=s/4}, \quad \text{よって } s = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

例 10.3.3 の等式は 1735 年、オイラーが示した（オイラーは $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, $k = 4,6,8,10,12$ も求めた）。ここではオイラーの証明 ([杉浦, I 巻, 315 頁] 参照）に少し工夫を加え、広義積分を使わず議論した。なお、より一般に、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1} B_k \pi^{2k}}{(2k)!}, \quad k = 1,2,..$$

が知られている [杉浦, II 巻, 337 頁]、ここで $B_1, B_2, ..$ はベルヌーイ数を表す (問 3.3.5)。

問 10.3.5 以下を示せ：(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=\int_0^x\frac{1}{y}\log\frac{1}{1-y}dy$ $(x\in[0,1])$.
(ii) $\int_0^1\frac{1}{x}\log\frac{1}{1-x}dx=\int_0^1\frac{1}{1-x}\log\frac{1}{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{x}{e^x-1}dx=\frac{\pi^2}{6}$. ヒント：例 10.3.3.

例 10.3.4 $(\star)$ $\theta\in(0,2\pi)$, $r\in[0,1]$ に対し

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^ne^{\mathbf{i}n\theta}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\cos(n\theta)}{n}+\mathbf{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\sin(n\theta)}{n}\\ &= -\tfrac{1}{2}\log\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)+\mathbf{i}\varphi(r,\theta),\end{aligned}\tag{10.7}$$

但し $\varphi(r,\theta)=\begin{cases}\text{Arctan}\,\left(\frac{r-\cos\theta}{\sin\theta}\right), & \theta\neq\pi,\\ 0, & \theta=\pi.\end{cases}$ 特に $r=1$ のとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\mathbf{i}n\theta}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}+\mathbf{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}=-\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)+\mathbf{i}\frac{\pi-\theta}{2}.\tag{10.8}$$

また級数の収束は $r<1$ なら $\theta\in(0,2\pi)$ について一様、$r=1$ なら $\theta\in(0,2\pi)$ について局所一様である。

注：

(1) (10.7) の各辺は、対数の主値を用い $-\text{Log}\,(1-re^{\mathbf{i}\theta})$ と表せる（問 10.2.6 参照)。

(2) (10.8) 虚部の等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}$ は $\theta=0$ で不成立（左辺 =0, 右辺=$\frac{\pi}{2}$）. これは、左辺の $\theta=0$ での不連続性による。一方、この等式で $\theta=\frac{\pi}{2}$ とすればライプニッツの級数 (例 10.2.7) を得る。

証明：<u>$r\in[0,1)$ の場合：</u>$\theta\in(0,2\pi)$ を任意に固定すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^ne^{\mathbf{i}(n+1)\theta}=\frac{e^{\mathbf{i}\theta}}{1-\rho e^{\mathbf{i}\theta}}=\frac{\cos\theta-\rho+\mathbf{i}\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2},\quad(\rho\in[0,r]\text{ について一様収束}).$$

両辺を $\rho\in[0,r]$ で積分すると、項別積分（定理 10.3.1） より (10.7) を得る。
<u>$r=1$ の場合：</u>$\theta\in(0,2\pi)$ だから 例 10.2.5 より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^ne^{\mathbf{i}n\theta}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-re^{\mathbf{i}\theta})^n}{n}$$

は $r\in[0,1]$ について一様収束する。従って (10.7) の左辺は $r\in[0,1]$ について連続。故に $r<1$ の場合の (10.7) で $r\to1$ として

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\mathbf{i}n\theta}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}+\mathbf{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}=-\tfrac{1}{2}\log\left(2-2\cos\theta\right)+\mathbf{i}\varphi(1,\theta).$$

右辺で $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\sin\theta=2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ を用いれば (10.8) を得る。 □

問 10.3.6 $(\star)$ 以下を示せ：$\theta\in(-\pi,\pi)\backslash\{0\}$ に対し、
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{(2n-1)\mathbf{i}\theta}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\theta)}{2n-1}+\mathbf{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)\theta)}{2n-1}=-\frac{1}{2}\log\left(\tan\frac{|\theta|}{2}\right)+\mathbf{i}\frac{\theta}{|\theta|}\frac{\pi}{4}$.
特に $\theta=\frac{\pi}{4}$ として、

$$1-\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}\right)-\left(\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}\right)+\left(\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{17}\right)-....=-\tfrac{1}{2}\log(\tan\tfrac{\pi}{8})=\tfrac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}),$$
$$\left(1+\tfrac{1}{3}\right)-\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}\right)+\left(\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}\right)-\left(\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{15}\right)+....=\tfrac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

問 10.3.7 $(\star)$ 次を示せ：$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=\begin{cases}0, & 0\le r<1,\\ 2\log r, & r>1.\end{cases}$
ヒント：(10.7) の実部を項別積分して $0\le r<1$ の場合を得る。$r>1$ の場合は $0\le r<1$ の場合に帰着。

問 10.3.8 $(\star)$ 以下を示せ：(i) $\int_0^{\pi}\log\sin=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos=-\pi\log 2.$
(ii) $\int_0^1\frac{\mathrm{Arcsin}\,x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi}{\tan\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}\log 2.$
(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)^2}=\frac{\pi}{2}\log 2.$
(i) のヒント：(10.8) を $\theta\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ について項別積分し、$\varepsilon\to 0$ とする。

問 10.3.9 $(\star)$ (10.8) の虚部に対する部分和 $f_N(\theta)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(n\theta)}{n}$ $(\theta\in I\stackrel{\text{def.}}{=}(0,2\pi))$ について以下を示せ：(i) $f_N(\theta)=\frac{1}{2}\int_0^{\theta}\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\varphi\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi-\theta.$ (ii) $\sup_N\|f_N\|_I<\infty.$

問 10.3.10 $(\star)$ フーリエ級数の部分和

$$f_N(\theta)=\sum_{n=-N}^{N}a_ne^{\mathbf{i}n\theta},\quad g_N(\theta)=\sum_{n=-N}^{N}b_ne^{\mathbf{i}n\theta}$$

$(a_n,b_n\in\mathbb{C},\,\theta\in I\stackrel{\text{def.}}{=}(0,2\pi))$ および関数 $f(\theta)$, $g(\theta)$ について、$\lim_N f_N=f$, $\lim_N g_N=g$ (共に I 上局所一様) かつ $\sup_N(\|f_N\|_I+\|g_N\|_I)<\infty$ のとき、次を示せ[67]：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\overline{b_n}=\frac{1}{2\pi}\int_I f\overline{g}\quad \textbf{(パーセヴァルの等式)}$$

また、これと (10.8), 問 10.3.9 から $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を示せ。

問 10.3.11 $(\star)$ 以下を示せ:
(i) $\theta\in[0,2\pi]$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n^2}=\frac{(\theta-\pi)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$
ヒント：(i):問 10.3.9 の結果から (10.8) の虚部を項別積分できる。あるいは、問 10.3.9 を用いずに、$\theta\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ について一様収束することを利用し項別積分してから $\varepsilon\to 0$ としてもよい。(ii):パーセヴァルの等式 (問 10.3.10)。
注: 問 10.3.11 の方法を繰り返せば $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ $(k=4,6,...)$ を順次求めることができる。

問 10.3.12 $(\star)$ 例 10.2.2 の巾級数 f について次を示せ：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(c+re^{\mathbf{i}\theta})d\theta=f(c),\quad 0<r<\rho.$$

注：上式は**コーシーの積分公式**の特別な場合である。

問 10.3.13 $(\star)$ 例 10.2.2 の巾級数 f について次を示せ：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(c+re^{\mathbf{i}\theta})e^{-\mathbf{i}m\theta}d\theta=r^mf^{(m)}(c)/m!,$$

但し $0<r<\rho$, $m\in\mathbb{N}$, $f^{(m)}(x+\mathbf{i}y)=(\frac{\partial}{\partial x})^mf(x+\mathbf{i}y)$ とする。

[67]パーセヴァルの等式は 1799 年、Marc-A. Parseval (1755–1836) により示された。

定理 10.3.5 (**項別微分**) $I \subset \mathbb{R}$ を区間、$f_n \in C^m(I)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ とし、以下を仮定する：

(a) f_n は I 上、関数 f に各点収束する。

(b) $f_n^{(k)}$ $(1 \le k \le m)$ は I 上、局所一様収束する。

このとき、$f \in C^m(I)$ かつ

$$\text{全ての } x \in I,\ 1 \le k \le m \text{ に対し } f^{(k)}(x) = \lim_n f_n^{(k)}(x).$$

証明：仮定を A_m, 示すべき結論を P_m と呼び、「$A_m \Rightarrow P_m$」 を m についての帰納法で示す。$m = 1$ のとき：$g(x) = \lim_n f_n'(x)$ $(\in I)$ とする。局所一様収束で連続性は保たれる（定理 10.1.4）から $g \in C(I)$. 一方、$a, x \in I$ を任意とし、$a, x \in J \subset I$ となる有界閉区間 J をとる。微積分の基本公式より

(1) $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'$.

仮定より、$f_n' \to g$ (J 上一様収束). そこで (1) で $n \to \infty$ として項別積分 (定理 10.3.1) すると

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g.$$

上式と定理 8.2.2 より $f \in C^1(I)$, かつ I 上で $f' = g$. 即ち P_1 を得る。これで $m = 1$ の場合が出来た。残りは簡単なので問にしよう。 □

問 10.3.14 定理 10.3.5 の証明の残りを完成せよ。

例 10.3.6 $m \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{C}$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^m |c_n| < \infty$ とする。このとき、フーリエ級数

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{i} n\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

は一様に収束し、$f \in C^m(\mathbb{R})$. 更に

$$f^{(k)}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathbf{i} n)^k c_n e^{\mathbf{i} n\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, k = 1, 2, .., m.$$

証明：$f_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\mathbf{i} n\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ とすると、

$$f_N^{(k)}(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} (\mathbf{i} n)^k c_n e^{\mathbf{i} n\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots.$$

仮定及びワイエルシュトラスの M-テストから $k = 0, 1, .., m$ に対し $\lim_N f_N^{(k)}$ は $\theta \in \mathbb{R}$ について一様収束する。故に項別微分（定理 10.3.5）より結論を得る。 □

問 10.3.15 (a_n) を複素数列、$r \ge 0$, 更に、任意の $x \in (r, \infty)$ に対し $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ が絶対収束するとする。このとき、$f \in C^\infty((r, \infty))$ かつ $f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\log n)^k a_n}{n^x}$ $(x \in (r, \infty), k = 1, 2, \ldots)$ を示せ。

例 10.3.7 ($\star$) **熱方程式の境界値問題:** $(t,\theta) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ に対し

$$h_t(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t/2} \sin n\theta$$

とおく。このとき、偏導関数 $\partial t h_t(\theta)$, $\partial_\theta h_t(\theta)$, $\partial_\theta^2 h_t(\theta)$ が存在し、$(t,\theta) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ について連続。また、

$$\begin{cases} \partial_t h_t(\theta) = \frac{1}{2}\partial_\theta^2 h_t(\theta) & (\textbf{熱方程式}) \\ h_t(0) = h_t(\pi) = 0. \end{cases}$$

$[0,\pi]$ を「細い針金」と思ったとき、熱方程式の解 $h_t(\theta)$ は時刻 t における位置 θ の温度を表す。上の h_t は「針金の両端で温度 0」 という境界条件を満たすような熱方程式の解である。h_t はフーリエ級数（例 10.3.6）の例でもある。

証明: $e_{t,n}(\theta) = e^{-n^2 t/2} \sin n\theta$, $h_{t,N}(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} e_{t,n}(\theta)$ とおく。このとき、$\lim_N h_{t,N}(\theta) = h_t(\theta)$ $(\forall (t,\theta) \in (0,\infty) \times \mathbb{R})$.

(1)
$$\begin{aligned} &\partial_t e_{t,n}(\theta) = -\tfrac{1}{2} n^2 e_{t,n}(\theta), \\ &\partial_\theta e_{t,n}(\theta) = n e^{-n^2 t/2} \cos n\theta, \partial_\theta^2 e_{t,n}(\theta) = -n^2 e_{t,n}(\theta). \end{aligned}$$

従って、

(2)
$$\begin{aligned} &\partial_t h_{t,N}(\theta) = \tfrac{1}{2}\partial_\theta^2 h_{t,N}(\theta) = -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{n=-N}^{N} n^2 e_{t,n}(\theta), \\ &\partial_\theta h_{t,N}(\theta) = \textstyle\sum_{n=-N}^{N} n e^{-n^2 t/2} \cos n\theta. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ を任意、$D_\varepsilon = [\varepsilon, \infty) \times \mathbb{R}$ とし、$(t,\theta) \in D_\varepsilon$ に対し結論を言えばよい。そこで、以後 $(t,\theta) \in D_\varepsilon$ を仮定する。今 (1) で計算した各導関数の絶対値は D_ε 上 $n^2 e^{-n^2 \varepsilon/2}$ 以下。これと、ワイエルシュトラスの M-テスト から

$$\partial_t h_{t,N}(\theta), \ \ \partial_\theta h_{t,N}(\theta), \ \ \partial_\theta^2 h_{t,N}(\theta)$$

は $N \longrightarrow \infty$ で D_ε 上一様収束。従って、項別微分 (定理 10.3.5) が出来て、(1) の各導関数の存在と連続性が判る。また、

$$\partial_t h_t(\theta) \stackrel{\text{項別微分}}{=} \lim_N \partial_t h_{t,N}(\theta) \stackrel{(2)}{=} \tfrac{1}{2} \lim_N \partial_\theta^2 h_{t,N}(\theta) \stackrel{\text{項別微分}}{=} \tfrac{1}{2}\partial_\theta^2 h_t(\theta).$$

□

問 10.3.16 ($\star$) 例 10.3.7 の h_t に対し、$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t = 1$ を示せ。

定理 10.3.8 (**径数付き積分**[68]) $I \subset \mathbb{R}^d$ を有界閉区間、$J \subset \mathbb{R}^k$, 関数 $(x,t) \mapsto f_t(x)$ $(I \times J \longrightarrow \mathbb{C})$ は連続とする。このとき、

(a) (**連続性**) $F(t) = \displaystyle\int_I f_t(x)\, dx$ は $t \in J$ について連続である。

(b) (**微分**) 更に $J \subset \mathbb{R}$ が区間で、全ての $(x,t) \in I \times J$ で $\partial_t^\ell f_t(x)$ $(\ell = 1, ..., m)$ が存在し $(x,t) \in I \times J$ について連続なら $F \in C^m(J)$ かつ

$$F^{(\ell)}(t) = \int_I \partial_t^\ell f_t(x) dx, \quad \ell = 1, ..., m.$$

[68] 11/12 の講義の命題 10.3.8 と定理 10.3.10 をひとまとめにした。

証明：(a): $t_n, t \in J$, $t_n \longrightarrow t$ とする。このとき $K = \{t_n\}_{n\geq 1} \cup \{t\}$ はコンパクト。故に $f_t(x)$ は $(x,t) \in I \times K$ について一様連続。従って補題 10.3.9（後述）より

$$f_{t_n}(x) \longrightarrow f_t(x) \ \ (x \in I \text{ について一様})$$

ゆえに項別積分（定理 10.3.1）より

$$\int_I f_{t_n}(x)\, dx \longrightarrow \int_I f_t(x)\, dx.$$

よって、F は連続。

(b): 仮定を A_m, 示すべき結論を P_m と呼び、「$A_m \Rightarrow P_m$」 を m についての帰納法で示す。

まず $m = 1$：J の替わりに、任意の有界閉区間 $K \subset J$ をとって結論が言えれば J 自身に対しても言える。そこで初めから J は有界閉区間とする。次を示す：

$$(*) \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f_{t+h}(x) - f_t(x)}{h} = \partial_t f_t(x) \qquad (x \in I \text{ について一様収束})$$

仮定より $\partial_t f_t(x)$ は $I \times J$ 上一様連続. 故に 補題 10.3.9 より任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次のような $\delta > 0$ が存在：

$$t, t' \in J,\ |t - t'| \leq \delta \implies \sup_{x\in I} |\partial_t f_t(x) - \partial_t f_{t'}(x)| \leq \varepsilon.$$

すると、$|h| \leq \delta$ なら、

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{t+h}(x) - f_t(x)}{h} - \partial_t f_t(x) \right| &= \left| \int_0^1 (\partial_t f_{t+\theta h}(x) - \partial_t f_t(x))\, d\theta \right| \\ &\leq \int_0^1 |\partial_t f_{t+\theta h}(x) - \partial_t f_t(x)|\, d\theta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

上式で $x \in I$ は任意なので $(*)$ が言えた。

$h \neq 0$ に対し

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \int_I \frac{f_{t+h}(x) - f_t(x)}{h} dx.$$

従って $h \longrightarrow 0$ で $(*)$ に注意すれば、項別積分（定理 10.3.1）より

$$F'(t) = \int_I \partial_t f_t(x) dx$$

上式と径数を含む積分の連続性（定理 10.3.8） より $F' \in C(J)$. 以上から P_1 を得る。これで $m = 1$ の場合が出来た。残りは簡単なので問にしよう。 □

問 10.3.17 定理 10.3.8(b) の証明の残りを完成せよ。

定理 10.3.8 の証明に用いた補題を述べる：

補題 10.3.9 $A_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ $(i = 1, 2)$, $f \in C_{\mathrm{u}}(A_1 \times A_2)$ とする。このとき、

$$x, x_n \in A_1,\ x_n \longrightarrow x \implies \lim_n \sup_{y\in A_2} |f(x_n, y) - f(x, y)| = 0.$$

証明：任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次のような $\delta > 0$ が存在することを言えばよい：

$$x, x' \in A_1,\ |x - x'| \le \delta \implies \sup_{y \in A_2} |f(x,y) - f(x',y)| \le \varepsilon.$$

仮定より、$\forall \varepsilon > 0$ に対し次のような $\delta > 0$ が存在：

$$(x,y), (x',y') \in A_1 \times A_2,\ |(x,y) - (x',y')| \le \delta \implies |f(x,y) - f(x',y')| \le \varepsilon.$$

特に、$y = y'$ の場合

$$x, x' \in A_1, y \in A_2,\ |x - x'| \le \delta \implies |f(x,y) - f(x',y)| \le \varepsilon.$$

$y \in A_2$ は任意なので結論を得る。 □

例 10.3.10 $t \in [0,\infty)$ に対し $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t.$

証明： $b \in (0,\infty)$ に対し

$$f_t(x) \stackrel{\text{def.}}{=} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}, \quad \partial_t f_t(x) = -e^{-tx}\sin x$$

は $(x,t) \in [0,b] \times [0,\infty)$ について連続。従って、定理 10.3.8 より $F_b(t) = \int_0^b f_t(x)\, dx$ は $t \in [0,\infty)$ について C^1 かつ

$$F_b'(t) = -\int_0^b e^{-tx} \sin x\, dx = -\mathrm{Im}\left(\int_0^b e^{-(t-\mathbf{i})x}\, dx\right) = -\frac{1 - e^{-tb}(\cos b - t \sin b)}{1+t^2}.$$

よって

$$\begin{aligned} F_b(t) &= \int_t^\infty \frac{1 - e^{-sb}(\cos b - s\sin b)}{1+s^2} + C, \quad (C \text{ は定数}) \\ &= \underbrace{\int_t^\infty \frac{ds}{1+s^2}}_{=\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t} - r_b(t) + C, \end{aligned}$$

但し $r_b(t) = \displaystyle\int_t^\infty \frac{e^{-sb}(\cos b - s\sin b)}{1+s^2}$. ところが、

$$|F_b(t)| \le \int_0^b |f_t| \le \int_0^b e^{-tx}\, dx \le \frac{1}{t} \longrightarrow 0 \ \ (t \longrightarrow \infty)$$

だから $C = 0$. また、$\frac{|\cos b - s\sin b|}{1+s^2} \le 2$ より

$$|r_b(t)| \le 2\int_t^\infty e^{-sb} ds \le \frac{2}{b} \longrightarrow 0 \ \ (b \longrightarrow \infty).$$

以上より、$\displaystyle\lim_{b\to\infty} F_b(t) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t.$ □

問 10.3.18 $q(\theta) = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$ $(a, b > 0)$ に対し以下を示せ：(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{q} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$. (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2}{q^2} = -\partial_a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{q} = \frac{\pi}{4a\sqrt{ab}}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2}{q^2} = -\partial_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{q} = \frac{\pi}{4b\sqrt{ab}}$. (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

問 10.3.19 全ての $t \ge 0$ に対し $\left(\int_0^t \exp(-x^2)\, dx\right)^2 + \int_0^1 \frac{\exp\left(-(1+x^2)t^2\right)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$ を示し、そこから $\int_0^\infty \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}/2$ を導け。

問 10.3.20 ($\star$) $q(\theta) = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$ $(a, b > 0)$ に対し以下を示せ：
(i) $\partial_a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log q = \frac{\pi}{2\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$. (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log q = \pi \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$.

問 10.3.21 ($\star$) 以下を示せ（(ii),(iii) では 例 10.3.10 の証明を参考にせよ）：
(i) $x \in (0, \infty)$ に対し $0 \le 1 - \cos x \le 2 \wedge x \wedge \frac{x^2}{2}$.

(ii)
$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x} e^{-tx} dx = \begin{cases} \log\sqrt{1+(1/t)^2}, & t > 0, \\ \infty & t = 0. \end{cases}$$

(iii)
$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} e^{-tx} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t - t\log\sqrt{1+(1/t)^2}, & t > 0, \\ \frac{\pi}{2} & t = 0. \end{cases}$$

なお、$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ と積分変数の変換より、(iii) の左辺$= \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-2tx} dx$.

最後に定理 10.3.1 後の注 2 で述べたことを示す。まず、$f_n \in \mathscr{R}(I)$ $(n \in \mathbb{N})$ と仮定 (a) から $f_\infty \in \mathscr{R}(I)$ を導く。その為にダルブーの可積分条件を復習：$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ 及び $\Delta \in \mathscr{D}(I)$ (定義 7.1.2 参照) に対し

$$r_I(f, \Delta) = \sum_{D \in \Delta} |D| \operatorname*{ocs}_D f$$

と置く。ダルブーの可積分条件 (定理 7.2.3) によれば、$f \in \mathscr{R}(I)$ は次と同値：

(0) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \Delta \in \mathscr{D}(I),\ r_I(f, \Delta) \le \varepsilon$

以下 (0) を検証。仮定より、

(1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \|f_n - f\|_I \le \frac{\varepsilon}{4|I|}$.

上の n に対し、$f_n \in \mathscr{R}(I)$ より

(2) $\exists \Delta \in \mathscr{D}(I),\ r_I(f_n, \Delta) \le \varepsilon/2$.

また、容易に判るように、

$$\operatorname*{ocs}_D f \le \operatorname*{ocs}_D (f - f_n) + \operatorname*{ocs}_D f_n.$$

従って

$$r_I(f, \Delta) \le \underbrace{r_I(f - f_n, \Delta)}_{(1)} + r_I(f_n, \Delta) \le (1) + \varepsilon/2.$$

更に、

$$(1) = \sum_{D \in \Delta} |D| \operatorname*{ocs}_D (f - f_n) \le 2\|f - f_n\|_I \underbrace{\sum_{D \in \Delta} |D|}_{=|I|} \le \varepsilon/2.$$

以上で、(0) が検証された。
次に、$f_n \in \mathscr{R}(I)$ $(n \in \mathbb{N})$ と仮定 (a2) から $f_\infty \in \mathscr{R}(I)$ を導く。$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_I$ とおくと、仮定から $\|f_\infty\|_I \le M$ でもある。今、$\varepsilon > 0$ と任意とし、閉区間 $J \subset I$ を $|I \backslash J| < \frac{\varepsilon}{4M+1} \le \varepsilon$ なるようにとる。$f_n \longrightarrow f_\infty$ (J 上一様) と、先に示した事より $f_\infty \in \mathscr{R}(J)$. $\varepsilon > 0$ は任意だから $f_\infty \in \mathscr{R}(I)$ (補題 7.5.4). $\square$

10.4 関数列の広義積分

広義積分に対する項別積分（定理 10.4.3）と、その応用例を述べる。広義積分に対する項別積分は、狭義積分に対するもの（定理 10.3.1）に帰着させて証明する。その為に、「広義積分の一様収束」という概念を導入する。積分は級数の連続版と考えられるが、その観点からは、「広義積分の一様収束」は、関数項級数の一様収束の連続版に該当する。

定義 10.4.1 （**広義積分の一様収束**）$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, J を集合、 $f_t \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$ $(t \in J)$ とする。各 $t \in J$ で広義積分 $\int_a^b f_t$ が収束し、更に

$$\lim_{\substack{u \to a \\ u > a}} \sup_{t \in J} \left| \int_a^u f_t \right| = 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \sup_{t \in J} \left| \int_v^b f_t \right| = 0 \tag{10.9}$$

であるとき、広義積分 $\int_a^b f_t$ は $t \in J$ について**一様収束**すると言う。

多くの場合、広義積分の一様収束は次の例 10.4.2 で述べる十分条件を通じて検証される。関数項級数の一様収束との類似という観点からは、例 10.4.2(a) はワイエルシュトラスの M-テスト に該当、また、例 10.4.2(b) は 定理 10.2.4 に該当する。

例 10.4.2 (**広義積分が一様収束するための十分条件**) 記号は 定義 10.4.1 の通りとする。次のいずれかのとき、広義積分 $\int_a^b f_t$ は一様収束する。

(a) 次のような $g : I \longrightarrow [0, \infty)$ が存在：

$$(x, t) \in I \times J \implies |f_t(x)| \le g(x),$$
$$\int_a^b g \text{ は収束}$$

(b) $f_t = f g_t$, 但し $f, g_t : I \longrightarrow \mathbb{C}$ は次の通りとする：

$$\int_a^b f \text{ は収束},$$
$$g_t \in C^1(I) \ (t \in J), \ \sup_{t \in J} \|g_t\|_I < \infty, \ \sup_{t \in J} \int_a^b |g_t'| < \infty.$$

証明： (a):命題 9.2.1 より 各 $t \in J$ で広義積分 $\int_a^b f_t$ は収束する。(10.9) のうち、$\lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \sup_{t \in J} \left| \int_v^b f_t \right| = 0$ を示すが、他方も同様である。

$$\left| \int_v^b f_t \right| \le \int_v^b |f_t| \le \int_v^b g.$$

よって

$$\sup_{t \in J} \left| \int_v^b f_t \right| \le \int_v^b g \longrightarrow 0 \quad (v \longrightarrow b).$$

(b):

$$F(x) = \int_a^x f, \quad M = \sup_{t \in J} \left(\|g_t\|_I + \int_a^b |g_t'| \right)$$

とおく。$\int_a^b f$ の収束より

$$\lim_{v \to b} \sup_{x \in [v, b)} |F(x) - F(b)| = 0.$$

また、

$$\int_v^b |(F(x)-F(b))g_t'(x)|\,dx \le \sup_{x\in[v,b)} |F(x)-F(v)|M < \infty.$$

よって $f_t(x) = (F(x)-F(b))'g_t(x)$ の部分積分（命題 9.3.4）より、$\int_v^b f_t$ の収束及び、次式を得る：

$$\int_v^b f_t \overset{\text{部分積分}}{=} -\underbrace{(F(v)-F(b))g_t(v)}_{(1)} - \underbrace{\int_v^b (F(x)-F(b))g_t'(x)\,dx}_{(2)}$$

更に $v \to b$ のとき、

$$|(1)| \le M|F(b)-F(v)| \longrightarrow 0, \quad |(2)| \le \sup_{x\in[v,b)} |F(x)-F(v)|M \longrightarrow 0.$$

以上より $\lim_{\substack{v\to b\\ v<b}} \sup_{t\in J} \left|\int_v^b f_t\right| = 0$ を得る。$\int_a^u f_t$ $(u \in I)$ の収束及び (10.9) の他方も全く同様に示せる。 □

項別積分（定理 10.3.1）は次のような形で広義積分に一般化される：

定理 10.4.3 (**項別の広義積分**) $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $f_n \in \mathscr{R}_{\rm loc}(I)$ $(n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\})$ とし、以下を仮定する：

(a) $\lim_n f_n = f_\infty$ （I 局所一様）,

(b) 広義積分 $\int_a^b f_n$ は $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ について一様収束する。

このとき、

$$\lim_n \int_a^b |f_n - f_\infty| = 0, \ \text{特に、} \ \lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f_\infty.$$

証明： 以下のようにして狭義積分の場合（定理 10.3.1）に帰着させる。$a < u < v < b$ とする。

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_n - f_\infty| &\le \int_v^b |f_n - f_\infty| + \int_u^v |f_n - f_\infty| + \int_a^u |f_n - f_\infty| \\ &\le \underbrace{2\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \int_v^b |f_n|}_{(1)} + \underbrace{\int_u^v |f_n - f_\infty|}_{(2)} + \underbrace{2\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \int_a^u |f_n|}_{(3)}\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ を任意とすると、仮定 (b) より u, v を

$$(1) \le \varepsilon/6, \ (3) \le \varepsilon/6$$

となるようにとれる。更に $[u,v]$ は有界閉区間だから、仮定 (a) より $f_n \to f_\infty$ ($[u,v]$ 上一様). 従って、狭義の積分に対する項別積分（定理 10.3.1）より、次のような $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在：

$$n \ge n_0 \implies (2) \le \varepsilon/3.$$

以上から、$n \ge n_0$ なら

$$\int_a^b |f_n - f_\infty| \le \varepsilon.$$

これで、定理が示された。 □

例 10.4.4 $f \in C((0,\infty))$ かつ $\int_0^\infty \frac{|f(x)|}{e^x-1}\,dx < \infty$ なら

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx,$$

(上式の、より具体的な例は 問 10.4.1 参照).

証明：

$$g(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{f(x)}{e^x-1} = \frac{f(x)e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^\infty f(x)e^{-nx}, \quad g_N(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=1}^N f(x)e^{-nx} = f(x)e^{-x}\frac{1-e^{-Nx}}{1-e^{-x}}$$

に対し、以下を検証する：

(a) $\lim_N g_N = g$ ($(0,\infty)$ 上局所一様)。

(b) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty g_N$ は N について一様収束する。

これらが分れば、項別積分（定理 10.4.3）を次のように用いて結論を得る：

$$\int_0^\infty g = \lim_N \int_0^\infty g_N = \lim_N \sum_{n=1}^N f(x)e^{-nx} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx$$

(a) の検証：$\varepsilon > 0$ を任意、$I = [\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]$ とし、I 上の一様収束を言えばよい。f は有界閉区間 I 上で連続だから $\|f\|_I < \infty$. よって $N \to \infty$ で、

$$\|g - g_N\|_I = \sup_{x\in I}\left(|f(x)|e^{-x}\frac{e^{-Nx}}{1-e^{-x}}\right) \le \|f\|_I \frac{e^{-N\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}} \longrightarrow 0.$$

(b) の検証：$|g_N| \le |g|$ かつ $\int_0^\infty |g| < \infty$. よって 例 10.4.2(a) より、(b) が言える。 $\square$

問 10.4.1 例 10.4.4 の結果から以下の等式を導け：
(i) $y \in \mathbb{R}$ に対し $\sum_{n=1}^\infty \frac{y}{y^2+n^2} = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{e^x-1}\,dx$.
(ii) $p > 1$ に対し $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x-1}\,dx$.

問 10.4.2 ($\star$) 等式：$\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{(n+a)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^\infty \frac{e^{-as}s^{b-1}}{1-xe^{-s}}\,dt = \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^1 \frac{t^{a-1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{b-1}}{1-xt}\,dt$ を以下の場合について示せ：(i) $a > 0$, $b > 1$, $x = 1$. (ii) $a, b > 0$, $x \in [-1, 1)$.

問 10.4.3 ($\star$) 問 10.4.2 の結果から次を示せ：$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-x)^n}{an+b} = x^{-b/a}\int_0^{x^{1/a}} \frac{u^{b-1}}{1+u^a}$, ($a, b > 0$, $x \in (0,1]$) また、これを用い以下の級数の値を求めよ：$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$（ライプニッツの級数), $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{3n+1}$, $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{3n+2}$.

径数付き積分の微分 (定理 10.3.8) を広義積分に一般化する：

定理 10.4.5 (**径数付き広義積分**) $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}^k$, 関数 $(x,t) \mapsto f_t(x)$ ($I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$) は連続とする。広義積分

$$F(t) = \int_a^b f_t(x)dx$$

$t \in J$ について局所一様収束する（つまり、任意のコンパクト集合 $K \subset J$ に対し上の広義積分が、$t \in K$ について一様収束する）とする。このとき、

(a) (**連続性**) $F \in C(J)$.

(b) (**微分**) 更に、$J \subset \mathbb{R}$ が区間かつ $\ell = 1, ..., m$ に対し以下を仮定する：

$$\begin{array}{l} \text{全ての } (x,t) \in I \times J \text{ で } \partial_t^\ell f_t(x) \text{ が存在し } I \times J \text{ 上連続} \\ \text{広義積分} \displaystyle\int_a^b \partial_t^\ell f_t(x)dx \text{ が } t \in J \text{ について局所一様収束する} \end{array}$$

このとき、$F \in C^m(J)$ かつ、$t \in J$ に対し

$$F^{(\ell)}(t) = \int_a^b \partial_t^\ell f_t(x)dx, \quad \ell = 1, ..., m.$$

証明：(a):$t_n, t \in J$, $t_n \longrightarrow t$ とする。定理 10.3.8 の証明と同様に

$$\lim_n f_{t_n}(x) = f_t(x), \ \ (x \in I \text{ について局所一様})$$

また、仮定から、広義積分 $\int_a^b f_{t_n}$ の収束は n について一様。従って項別の広義積分（定理 10.4.3）より

$$\lim_n \int_a^b f_{t_n}(x)\, dx = \int_a^b f_t(x)\, dx.$$

よって F は連続である。

(b):項別微分（定理 10.3.5）を用いて狭義積分の場合 (定理 10.3.8) に帰着させる。$u, v \in I \cup \{a, b\}$ に対し $F_{u,v}(t) = \int_u^v f_t$ と書く。このとき、 $F = F_{a,c} + F_{c,b}$ なので、F の替わりに $F_{a,c}$, $F_{c,b}$ に対し結果を示せば十分。そこで $F_{c,b}$ を考える。$v \in I$ なら仮定と径数付き狭義積分の微分 (定理 10.3.8) より、$F_{c,v} \in C^m(J)$ かつ

$$F_{c,v}^{(\ell)}(t) = \int_c^v \partial_t^\ell f_t, \quad \ell = 1, .., m.$$

また、全ての $t \in J$ に対し

$$\lim_{v \to b} F_{c,v}(t) = F_{c,b}(t)$$

かつ $\ell = 1, .., m$ に対し

$$\lim_{v \to b} F_{c,v}^{(\ell)}(t) = \int_c^b \partial_t^\ell f_t \quad (t \in J \text{ について局所一様}).$$

従って、項別微分（定理 10.3.5）より $F_{c,b} \in C^m(J)$,

$$F_{c,b}^{(\ell)}(t) = \int_c^b \partial_t^\ell f_t$$

□

例 10.4.6 $f :\in C((0, \infty))$, $\int_0^\infty f$ が収束するとする。このとき、

(a) 広義積分 $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\, dx$ は $t \in [0, \infty)$ について一様収束し、$\displaystyle\lim_{t \to 0} F(t) = \int_0^\infty f$, $\displaystyle\lim_{t \to \infty} F(t) = 0$.

(b) $F \in C^\infty((0, \infty))$, $F^{(\ell)}(t) = \displaystyle\int_0^\infty (-x)^\ell e^{-tx} f(x)\, dx$.

証明：(a): $g_t(x)=e^{-tx}$, $f_t=fg_t$ とすれば 例 10.4.2(b) の仮定が満たされ、広義積分 $\int_0^\infty f_t$ は $t\in[0,\infty)$ について一様収束する。また、

$$\lim_{t\to 0} f_t=f,\quad \lim_{t\to\infty} f_t=0.\text{（}(0,\infty)\text{ 上、局所一様）}$$

実際、任意のコンパクト集合 $K\subset(0,\infty)$ に対し、$K\subset[\varepsilon,1/\varepsilon]$ となる $\varepsilon>0$ が存在するから $I\stackrel{\text{def.}}{=}[\varepsilon,1/\varepsilon]$ 上一様収束すればよい。ところが

$$\begin{aligned}\|f_t-f\|_I &\le (1-e^{-t/\varepsilon})\|f\|_I\longrightarrow 0\quad(t\longrightarrow 0).\\ \|f_t\|_I &\le e^{-t\varepsilon}\|f\|_I\longrightarrow 0\quad(t\longrightarrow\infty).\end{aligned}$$

以上と、項別の広義積分（定理 10.4.3） から結果を得る。
(b): $\partial_t^\ell f_t(x)=(-x)^\ell f_t(x)$ は $(x,t)\in(-\infty,\infty)^2$ について連続だから、$\int_0^\infty \partial_t^\ell f_t$ が $t\in(0,\infty)$ について局所一様収束することを言えば、定理 10.4.5 より結論を得る。(a) と同様に考えて、$t\in J\stackrel{\text{def.}}{=}[\varepsilon,1/\varepsilon]$ について一様収束すればよい。ところが $t\in J$ なら

$$|\partial_t^\ell f_t(x)|=|(x)^\ell e^{-tx}f(x)|\le\varepsilon^{-\ell}e^{-\varepsilon x}\|f\|_I.$$

右辺は $t\in J$ に無関係かつ $x\in(0,\infty)$ について広義可積分だから例 10.4.2(a) より $\int_0^\infty \partial_t^\ell f_t$ は $t\in J$ について局所一様収束する。 □

問 10.4.4 ガンマ関数について、 $\Gamma\in C^\infty((0,\infty))$ かつ任意の $q\ge 1$ に対し $\Gamma^{(q)}(t)=\int_0^\infty x^{t-1}(\log x)^q e^{-x}\,dx$ を示せ。

例 10.4.7 $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}+\mathbf{i}tx}\,dx=e^{\mathbf{i}mt-\frac{vt^2}{2}}$, $m\in\mathbb{R}$, $v>0,t\in\mathbb{R}$.

注：$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}$ は**正規分布**と呼ばれる確率分布の密度であり、m は平均、$v>0$ は分散（平均からの「ばらつき具合い」: 問 10.4.6 参照）を表す[69]。例 10.4.7 は正規分布のフーリエ変換である。

証明： まず $m=0$ の場合を考える。$m=0$ なら $e^{-\frac{x^2}{2v}}$ が偶関数だから

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2v}+\mathbf{i}tx}\,dx=\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2v}}\cos(tx)\,dx.$$

そこで $v>0$ を固定し、$f_t(x)=e^{-\frac{x^2}{2v}}\cos(tx)$ とする。$f_t(x)$, $\partial_t f_t(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2v}}\sin(tx)$ は共に $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ について連続。また、

$$|f_t(x)|\le e^{-\frac{x^2}{2v}},\quad |\partial_t f_t(x)|\le|x|e^{-\frac{x^2}{2v}}$$

より、$F(t)\stackrel{\text{def.}}{=}\int_{-\infty}^\infty f_t$, $\int_{-\infty}^\infty\partial_t f_t$ は共に $t\in\mathbb{R}$ について一様収束する。以上と定理 10.4.5 より $F\in C^1(\mathbb{R})$ かつ

$$F'(t)=-\int_{-\infty}^\infty xe^{-\frac{x^2}{2v}}\sin(tx)\,dx\stackrel{\text{部分積分}}{=}\underbrace{\left[ve^{-\frac{x^2}{2v}}\sin(tx)\right]_{-\infty}^\infty}_{=0}-vt\underbrace{\int_{-\infty}^\infty xe^{-\frac{x^2}{2v}}\cos(tx)\,dx}_{=F(t)}.$$

[69]例えば、知能指数の分布は $m=100$, $\sqrt{v}=15$ の正規分布である。

また、$F(0)=\sqrt{2\pi v}$ (系 9.4.4). よって 問 10.4.5 より $m=0$ に対する結論を得る。$m\neq 0$ の場合、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}+\mathbf{i}tx}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2v}+\mathbf{i}t(x+m)}\,dx=e^{\mathbf{i}tm}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2v}+\mathbf{i}tx}\,dx.$$

よって、$m=0$ の場合を $e^{\mathbf{i}tm}$ 倍すれば、$m\neq 0$ の場合を得る。 □

問 10.4.5 $F\in C^1(\mathbb{R})$, $h\in C(\mathbb{R})$ に対し「$F'=hF \iff F(t)=F(0)\exp\left(\int_0^t h\right)$」を示せ。⇒ のヒント： $G(t)=\exp\left(\int_0^t h\right)$ として、$(F/G)'\equiv 0$ を言えばよい。あるいは 問 8.2.8 に帰着させてもよい。

問 10.4.6 例 10.4.7 について以下を示せ：
$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}\,dx=m$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}\,dx=v$.

問 10.4.7 例 10.3.10 で示した等式：$\int_0^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,t$ $(t\in[0,\infty))$ を定理 10.4.5 の応用として再証明せよ。

問 10.4.8 $(\star)$ 問 10.3.21 で示した等式を定理 10.4.5 の応用として再証明せよ。

問 10.4.9 $(\star)$ $t,u\geq 0$ に対し以下を示せ：
(i) $\int_0^{\infty}\exp\left(-\left(x-\frac{t}{x}\right)^2\right)dx=t\int_0^{\infty}\exp\left(-\left(y-\frac{t}{y}\right)^2\right)\frac{dy}{y^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
(ii) $\int_0^{\infty}\exp\left(-x^2-\frac{t^2}{4x^2}\right)\,dx=\sqrt{\pi}e^{-t}$.
(iii)：$\int_0^{\infty}\frac{\cos(tx)e^{-u(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_u^{\infty}\exp\left(-x^2-\frac{t^2}{4x^2}\right)\,dx$, 特に $\int_0^{\infty}\frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-t}$.
ヒント：(i)： 最初の等式の左辺、右辺を I_1,I_2 とする。まず $I_1=I_2$ を示し、次に $(I_2+I_2)/2$ を考える。(iii)：左辺を u について微分。

11　多変数関数の微分

11.1　全微分と偏微分

第 11 章では多変数関数の微分について述べる。一変数関数 f を点 a で微分するとは、

$$a \text{ の近傍で } f \text{ を } \underline{\text{一次関数で近似}} \text{ する}$$

ことでもある。つまり、微分係数 $f'(a)$ は、x が a に近いとき、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \text{誤差}, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{1}{|x-a|}\text{誤差} = 0 \tag{11.1}$$

となるようなものである。この考え方を多変数ベクトル値関数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ まで広げるにはどうするか？ まず $\mathbb{R}^d$ から $\mathbb{R}^m$ への一次関数は

$$x \mapsto Cx + b \quad (C \text{ は } m \times d \text{ 実行列、} b \in \mathbb{R}^m)$$

である。ついでに、

> C の (i, j) 成分は、x が x_j 方向に変位するときの $Cx + b$ の i 座標の変化率を表す

ことにも注意しておこう。$\mathbb{R}^d$ から $\mathbb{R}^m$ への一次関数が何か分れば、$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ に対しては (11.1) を

> $f'(a)(x-a)$ は $x - a \in \mathbb{R}^d$ に $m \times d$ 行列 $f'(a)$ を施して得られる m 次元ベクトル、誤差も m 次元ベクトル

と拡大解釈すればよさそうだ。また、拡大解釈した (11.1) から

> $f'(a)$ の (i, j) 成分は、x が a から、x_j 方向に微小変位するときの $f_i(x)$（$f(x)$ の i 座標）の微小変化率を表す

ことも読み取れるから、$f'(a)$ の (i, j) 成分 $= \partial_j f_i(a)$, すなわち

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_d f_1(a) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \dots & \partial_d f_m(a) \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

となることも想像がつく (命題 11.1.4 で厳密に論じる)。

上の考え方に沿って多変数ベクトル値関数関数 f の微分を定義するが、f の定義域が $\mathbb{R}^d$ 全体ではなく部分集合 $D \subset \mathbb{R}^d$ の場合、$a \in D$ での微分を考えるには、

$$a \text{ から少しだけずれた点 } x \text{ も } D \text{ に入る}$$

という性質が欲しい（(11.1) で $f(x)$ が定義できるように)。そのために「開集合」という概念を導入する。実は「開集合」は「閉集合」（定義 5.5.1）の相対概念でもある（問 11.1.1）：

定義 11.1.1 $D \subset \mathbb{R}^d$ とする。

- 次の性質をもつ点 $x \in \mathbb{R}^d$ を D の**内点** (interior point) と呼ぶ:

$$B(x, \varepsilon) \subset D \text{ を満たす } \varepsilon > 0 \text{ が存在する},$$

但し、$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d \,;\, |y - x| < \varepsilon\}$. また、$D$ の内点全体の集合を $\overset{\circ}{D}$ と記す。

- $D = \overset{\circ}{D}$, 即ち D の全ての点が D の内点なら、D は **開** (open) であると言う。

問 11.1.1 定義 11.1.1 について以下を示せ：(i) $\overset{\circ}{D}$ は開集合。(ii) $D \subset \mathbb{R}^d$ が開 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^d \backslash D$ は閉

定義 11.1.2 $D \subset \mathbb{R}^d$ を集合, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $a \in \overset{\circ}{D}$ とする。$m \times d$ 行列全体の集合を $\mathbb{R}^{m,d}$ と記す。

- 次のような $C \in \mathbb{R}^{m,d}$ が存在するとき、f は a で**可微分**であるという：

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{1}{|x - a|} \left(f(x) - f(a) - C(x - a) \right) = 0. \tag{11.3}$$

上式で、$C(x - a)$ は行列 C を、ベクトル $x - a$ に施して得られるベクトルを表す。このとき、C を f の a における**微分係数**といい、$f'(a)$ と記す。

- 全ての $x \in D$ で f が可微分なとき、関数 $f' : x \mapsto f'(x)$ を f の**導関数**という。
- f の微分係数、あるいは導関数を求めることを**微分**するという。

注 1：(11.3) は (11.1) の「$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{1}{|x-a|}$誤差 $= 0$」 にあたる。
注 2：定義 11.1.2 の意味での微分を、（偏微分と区別するために）**全微分**ともいう。
注 3：$m = 1$ のとき、f のグラフ上の点 $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ で f の「接空間」($d = 1$ の場合の接線を拡張した概念）により、微分の幾何学的解釈が与えられる（問 11.1.5 参照)。

例 11.1.3 一次関数 $f(x) = Cx + b$ ($C \in \mathbb{R}^{m,d}$, $b \in \mathbb{R}^m$) に対し $f'(a) = C$ ($\forall a \in \mathbb{R}^d$). これは、$f(x) - f(a) = C(x - a)$ と (11.3) を見比べれば分る。

問 11.1.2 記号は定義 11.1.2 通りとする。$\alpha > 1$ かつ $|f(x) - f(a)| \leq C|x - a|^\alpha$ ($\forall x \in D$) なら f は a で可微分かつ $f'(a)$ は零行列であることを示せ。

次に (11.2) について考える。

命題 11.1.4 (**全微分と偏微分の関係**) 記号は定義 11.1.2 通りとする。

(a) f が a で可微分なら、$\partial_j f_i(a)$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq d$) が存在し、(11.2) が成立する。

(b) D 上で偏導関数 $\partial_j f_i$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq d$) が存在し連続とする。このとき、f は全ての $a \in D$ で可微分である。従って (11.2) も成立する。

注：$\partial_j f_i(a)$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq d$) が存在するだけでは、f は a で連続とは（従って可微分とも）言えない。例えば 例 11.1.5（$p, q \geq 1$ かつ $p + q \leq r$ の場合）を参照せよ。

証明：(a): 行列 $f'(a)$ を (c_{ij}) と書くと、$c_{ij}=\delta_i\cdot f'(a)\delta_j$, 但し $\delta_i\in\mathbb{R}^d$ の第 i 座標は 1, 他の座標は 0 とする。従って、$0\neq h\to 0$ なら

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_i(a+h\delta_j)-f_i(a)}{h}-c_{ij}\right| &= \frac{1}{|h|}\left|\delta_i\cdot\big(f(a+h\delta_j)-f(a)-hf'(a)\delta_j\big)\right|\\ &\le \frac{1}{|h|}\left|f(a+h\delta_j)-f(a)-hf'(a)\delta_j\right|\stackrel{(11.3)}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

よって、$\partial_j f_i(a)$ が存在し c_{ij} に等しい。
(b):$f_1,...,f_m$ それぞれの可微分性を言えばよいから、$m=1$ の場合を示せば十分である。$a,x\in D$, $h=x-a\neq 0$ とし、$t\in[0,1]$ の関数 $\varphi_1,..,\varphi_d$ を次のように定める：

$$\varphi_j(t)=f(g_j(t)),\quad \text{但し } g_j(t)=(x_1,..,x_{j-1},a_j+th_j,a_{j+1},..,a_d).$$

(D は開だから x が a に十分近ければ $\forall t\in[0,1]$ に対し $g_j(t)\in D$). このとき、

$$\begin{aligned}\varphi_1(0) &= f(a),\ \ \varphi_d(1)=f(x),\\ \varphi_j(0) &= f(x_1,..,x_{j-1},a_j,a_{j+1},..,a_d)=\varphi_{j-1}(1).\end{aligned}$$

故に、

$$f(x)-f(a)=\varphi_d(1)-\varphi_1(0)=(\varphi_d(1)-\varphi_d(0))+(\varphi_{d-1}(1)-\varphi_1(0))$$

よって、帰納的に次を得る：

(1) $\qquad f(x)-f(a)=\sum_{j=1}^d(\varphi_j(1)-\varphi_j(0)).$

一方、$\partial_j f$ が存在して連続だから $\varphi_j\in C^1([0,1])$. よって平均値定理より $t_j\in(0,1)$ で

(2) $\qquad \varphi_j(1)-\varphi_j(0)=\varphi_j'(t_j)=(\partial_j f)(g_j(t_j))h_j$

となるものが存在する。また、 $\partial_j f$ の連続性よりだから $x\to a$ のとき、

$$(\partial_j f)(g_j(t_j))\longrightarrow\partial_j f(a).$$

これと、$|h_j|\le|h|$ より

(3) $\qquad \dfrac{|h_j|}{|h|}\left|(\partial_j f)(g_j(t_j))-\partial_j f(a)\right|\le\left|(\partial_j f)(g_j(t_j))-\partial_j f(a)\right|\longrightarrow 0.$

以上より、$C=(\partial_1 f(a),...,\partial_d f(a))$ とおくと、$x\to a$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{1}{|h|}(f(x)-f(a)-Ch) &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{|h|}\sum_{j=1}^d(\varphi_j(1)-\varphi_j(0)-\partial_j f(a)h_j)\\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{|h|}\sum_{j=1}^d\left((\partial_j f)(g_j(t_j))-\partial_j f(a)\right)h_j\stackrel{(3)}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

よって、$f'(a)$ が存在し C に等しい。 $\square$

例 11.1.5 $p,q\in\mathbb{N}$, $r>0$ とする。また、$\mathbb{R}^2$ の点を $z=(x,y)$ と表し、$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を $f(z)=x^py^q/|z|^r$ $(z\neq(0,0))$, $f(0,0)=0$ と定める。

(a) $z \neq (0,0)$ なら[70]、

$$\partial_1 f(z) = \frac{px^{p-1}y^q}{|z|^r} - \frac{rx^{p+1}y^q}{|z|^{r+2}}, \quad \partial_2 f(z) = \frac{qx^p y^{q-1}}{|z|^r} - \frac{rx^p y^{q+1}}{|z|^{r+2}}.$$

f は z で可微分かつ $f'(z) = (\partial_j f(z))_{j=1}^2$.

(b) $p+q > r+1$ なら f は全て $z \in \mathbb{R}^2$ で可微分かつ $f'(z) = (\partial_j f(z))_{j=1}^2$. 特に $f'(0,0) = (0,0)$.

(c) $p, q \geq 1$ なら f は $z = (0,0)$ で偏微分可能かつ $\partial_1 f(0) = \partial_2 f(0) = 0$.

(d) $p+q \leq r$ なら f は $z = (0,0)$ で不連続、従って可微分でない。

証明：(a): $\partial_j f(z)$ の計算結果から、これらは $z \neq (0,0)$ で連続。故に 命題 11.1.4 より f は x で可微分。
(b): 原点で可微分かつ $f'(0,0) = (0,0)$ ならよいが、それは 問 11.1.2 から分る。
(c):任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $f(t,0) = f(0,t) = 0$ による。
(d): 問 4.2.4 による。 □

問 11.1.3 以下の $f(x,y)$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) に対し $f'(x,y)$ を求めよ：(i) $x^3 + y^3 - 3xy$. (ii) $x^4 + y^4 - 10x^2 + 16xy - 10y^2$. (iii) $(x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$. (iv) $(2x^2 + y^2)e^{x^2+y^2}$. (v) $f(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} x\cos y \\ x\sin y \end{smallmatrix}\right)$. (vi) $f(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} x+y \\ xy \end{smallmatrix}\right)$.

問 11.1.4 以下の $f(x,y,z)$ ($(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$) に対し $f'(x,y,z)$ を求めよ：
(i) $\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) - xy - yz - zx$. (ii) $x^2+y^2+z^2+x-2z-xy$. (iii) $e^{xy}+e^{yz}+e^{zx}-e^{xyz}$.
(iv) $\left(\begin{smallmatrix} x+y+z \\ xy+yz+zx \end{smallmatrix}\right)$

問 11.1.5 ($\star$) $D \subset \mathbb{R}^d$, $f: D \to \mathbb{R}$, f は $a \in D$ で可微分とする。このとき、次を示せ：

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} \ ; \ y = f'(a)(x-a) + f(a) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^d t_j \begin{pmatrix} \delta_j \\ \partial_j f(a) \end{pmatrix} \ ; \ t_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

但し $\delta_i \in \mathbb{R}^d$ の第 i 座標は 1, 他の座標は 0 とする。上の集合（$\mathbb{R}^{d+1}$ 内の d 次元部分線形空間）を f の a における**接空間** ($d=2$ なら**接平面**) という。一変数関数の微分は、関数のグラフ上で「接線」を求めることであるのと同様に、多変数関数の微分は、関数のグラフ上で「接空間」を求めることにもなる。

一変数関数の微分と同様に以下の命題が成立する：

命題 11.1.6 (**微分可能性の言い替え**) 記号は定義 11.1.2 の通り、$C \in \mathbb{R}^{m,d}$ とする。次の三条件について (a) ⇔ (b) ⇒ (c) が成立する：

(a) f が a で可微分かつ $f'(a) = C$

(b) 次のような $\varphi: D \longrightarrow \mathbb{R}^{m,d}$ が存在する：

$$\text{全ての } x \in D \text{ に対し } f(x) - f(a) = C(x-a) + \varphi(x), \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\varphi(x)}{|x-a|} = 0.$$

[70] $\partial_1 f$,$\partial_2 f$ の替りに f_x,f_y と書くこともある。

(c) f は x で連続。

証明: $d=1$ の場合（命題 5.1.4, 命題 5.1.9）と全く同様である。 □

命題 11.1.7 (**連鎖律**) $E \subset \mathbb{R}^\ell$ は開集合、$x \in E$, $E \xrightarrow{g} D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ とする。このとき、

$$g \text{ が } x \text{ で可微分かつ } f \text{ が } g(x) \text{ で可微分}$$

なら、$f \circ g$ は x で可微分かつ

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

上式右辺は $f'(g(x)) \in \mathbb{R}^{m,d}$ と $g'(x) \in \mathbb{R}^{d,\ell}$ の積である。

証明: $d=\ell=1$ の場合（命題 5.1.10 ）と同様である（命題 5.1.9 の代りに 命題 11.1.6 を用いる)。 □

例 11.1.8 (**線形写像との合成**) $f \in C^1(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R})$, $A \in \mathbb{R}^{m,d}$,$g(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ とすると $g'(x) = A$ と連鎖律（命題 5.1.10）より

$$(f(Ax))' = f'(Ax)A.$$

成分で書くと、

$$\partial_j(f(Ax)) = \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(Ax) a_{ij}, \quad j = 1, ..., d.$$

例 11.1.9 (**平面極座標**)

$$g(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}$$

とすると、$g : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は全射である。これは、$\mathbb{R}^2$ の点を原点からの距離 r と、x 軸の正の向きとの角度 θ の組み (r,θ) で表せることを意味する。これを $\mathbb{R}^2$ の点の**極座標**表示と言う。京都やニューヨークのように幹線道路が格子状の街が直交座標系とすれば、パリの市街地（特に北西部）は凱旋門を中心に放射状に幹線道路が伸びているから、凱旋門を原点とした極座標系である。さて、

$$g'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & -r\mathrm{s} \\ \mathrm{s} & r\mathrm{c} \end{pmatrix}$$

($\cos\theta$, $\sin\theta$ を c, s と略記した). よって $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ に対し、連鎖律より

$$(f \circ g)'(r,\theta) = f'(g(r,\theta))g'(r,\theta),$$

即ち、

(1) $$((f \circ g)_r, (f \circ g)_\theta) = (f_x \circ g, f_y \circ g) \begin{pmatrix} \mathrm{c} & -r\mathrm{s} \\ \mathrm{s} & r\mathrm{c} \end{pmatrix}.$$

今、$A=(0,\infty)\times[-\pi,\pi)$ とおくと $g:A\to\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ は全単射である。その立場から、$f:\mathbb{R}^2\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ と $f\circ g:A\to\mathbb{R}$ を区別せず（厳密には別物だが）、$(f\circ g)_r$, $(f\circ g)_\theta$ もそれぞれ f_r, f_θ と略す習慣がある。その習慣に従って (1) を書き直すと、A 上で

$$(f_r,f_\theta)=(f_x,f_y)\begin{pmatrix}\mathrm{c} & -r\mathrm{s}\\ \mathrm{s} & r\mathrm{c}\end{pmatrix},\quad \text{即ち}\quad \begin{array}{l} f_r=\mathrm{c}f_x+\mathrm{s}f_y,\\ f_\theta=-r\mathrm{s}f_x+r\mathrm{c}f_y.\end{array} \tag{11.4}$$

なお、上式の意味は次のように直感的にも理解できる：原点から遠ざかる方向の単位速度ベクトルは $\binom{\mathrm{c}}{\mathrm{s}}$（従って $\partial_r=\mathrm{c}\partial_x+\mathrm{s}\partial_y$）. また、原点からの距離 r の点が角速度 1 で回転するときの速度ベクトルは $r\binom{-\mathrm{s}}{\mathrm{c}}$（従って $\partial_\theta=-r\mathrm{s}\partial_x+r\mathrm{c}\partial_y$）.

さて、

$$\widetilde{g}(r,\theta,z)=\begin{pmatrix} r\cos\theta\\ r\sin\theta\\ z\end{pmatrix},\quad r\geq 0,\ \theta,z\in\mathbb{R}$$

とすると、$\widetilde{g}:[0,\infty)\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ は全射である。$\mathbb{R}^3$ の点を $\widetilde{g}(r,\theta,z)$ と表示することを**円柱座標**表示と言う（パリの街での位置を、地図上の住所に加え建物の何階かまで指定すると思えばよい）。定義からも分かるように、円柱座標は本質的には平面極座標である。例えば $f\in C^1(\mathbb{R}^3)$ に対して (11.4) にあたる式は次の通り：

$$(f_r,f_\theta,f_z)=(f_x,f_y,f_z)\begin{pmatrix}\mathrm{c} & -r\mathrm{s} & 0\\ \mathrm{s} & r\mathrm{c} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

□

問 11.1.6 (**楕円座標**) $(r,\theta)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi]$ に対し $g(r,\theta)=\binom{\mathrm{ch}\,r\cos\theta}{\mathrm{sh}\,r\sin\theta}$ とする。$g:(0,\infty)\times(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ は全単射であることを示し、(11.4) にあたる式を求めよ。

例 11.1.10 ($\star$)(**空間極座標**)

$$g(r,\theta_1,\theta_2)=\begin{pmatrix} r\cos\theta_1\\ r\sin\theta_1\cos\theta_2\\ r\sin\theta_1\sin\theta_2\end{pmatrix},\quad (r,\theta_1,\theta_2)\in[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi)$$

とする。$g:[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ は全射である（問 11.1.7）。従って $\mathbb{R}^3$ の点は $g(r,\theta_1,\theta_2)$ と表せ、これを $\mathbb{R}^3$ の点の**極座標**表示と言う。

$$g'(r,\theta_1,\theta_2)=\begin{pmatrix}\mathrm{c}_1 & -r\mathrm{s}_1 & 0\\ \mathrm{s}_1\mathrm{c}_2 & r\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2 & -r\mathrm{s}_1\mathrm{s}_2\\ \mathrm{s}_1\mathrm{s}_2 & r\mathrm{c}_1\mathrm{s}_2 & r\mathrm{s}_1\mathrm{c}_2\end{pmatrix}$$

($\cos\theta_j$, $\sin\theta_j$ を c_j, s_j と略記した). また、$f\in C^1(\mathbb{R}^3)$ に対し連鎖律より

(1) $(f\circ g)'(r,\theta_1,\theta_2)=f'(g(r,\theta_1,\theta_2))g'(r,\theta_1,\theta_2)$

g は $A=(0,\infty)\times(0,\pi)\times[0,2\pi)$ から $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ (y,z)\neq(0,0)\}$ への全単射である (問 11.1.7)。その立場から、$f:B\to\mathbb{R}$ と $f\circ g:A\to\mathbb{R}$ を区別せず（厳密には

別物だが)、$(f\circ g)_r$, $(f\circ g)_{\theta_1}$, $(f\circ g)_{\theta_2}$ もそれぞれ f_r, f_{θ_1}, f_{θ_2} と略す習慣がある。その習慣に従って (1) を書き直すと、A 上で

$$(f_r, f_{\theta_1}, f_{\theta_2}) = (f_x, f_y, f_z)\begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 & -r\mathrm{s}_1 & 0 \\ \mathrm{s}_1\mathrm{c}_2 & r\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2 & -r\mathrm{s}_1\mathrm{s}_2 \\ \mathrm{s}_1\mathrm{s}_2 & r\mathrm{c}_1\mathrm{s}_2 & r\mathrm{s}_1\mathrm{c}_2 \end{pmatrix}.$$

□

注：空間極座標を $g(r,\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix} r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ r\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ r\cos\theta_1 \end{pmatrix}$ と定義することも多い（例 11.1.10 の定義 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し $\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$）が、実際に色々計算してみると（例えば 例 11.4.3)、例 11.1.10 の定義の方が自然で見通しがよいことが分かる。いずれにしても、座標を入れ替えただけの違いなので、一方で得られた結果を他方に翻訳することは容易である。

問 11.1.7 $(\star)$ 例 11.1.10 の g は $[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi)$ から $\mathbb{R}^3$ へは全射、 A から B へは全単射であることを示せ。

問 11.1.8 $(\star)$ $d\geq 2$, $(r,\theta_1,...,\theta_{d-1})\in[0,\infty)\times[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi)$ に対し d **次元極座標**を

$$g_d(r,\theta_1,...,\theta_{d-1}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad 但し \quad \begin{array}{l} x_1 = r\cos\theta_1, \\ x_j = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{j-1}\cos\theta_j \ (2\leq j\leq d-1) \\ x_d = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1} \end{array}.$$

で定める。以下を示せ：(i) $g_d(r,\theta_1,...,\theta_{d-1}) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta_1 \\ g_{d-1}(r\sin\theta_1,\theta_2,...,\theta_{d-1})\end{smallmatrix}\right)$.
(ii) g_d は $[0,\infty)\times[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi)$ から $\mathbb{R}^d$ へ全射、$A=(0,\infty)\times(0,\pi)^{d-2}\times[0,2\pi)$ から $B=\{x\in\mathbb{R}^3\ ;\ (x_{d-1},x_d)\neq(0,0)\}$ へ全単射。(iii) $d\geq 3$ に対し

$$g_d'(r,\theta_1,...,\theta_{d-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{d-1}'(r\sin\theta_1,\theta_2,...,\theta_{d-1}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_2'(\theta_1) & 0 \\ 0 & (\delta_{ij})_{i,j=3}^d \end{pmatrix}.$$

(iv) $\det g'(r,\theta_1,...,\theta_{d-1}) = r^{d-1}\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin^2\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}$.

問 11.1.9 $f\in C^1(\mathbb{R}^2\to\mathbb{R})$ とする。次の g にたいし $(f\circ g)'$ を計算せよ：(i) $g(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} x\cos y \\ x\sin y \end{smallmatrix}\right)$, (ii) $g(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} x+y \\ xy \end{smallmatrix}\right)$.

11.2 高階の偏微分

定義 11.2.1 $D\subset\mathbb{R}^d$ は開集合、$f: D\to\mathbb{R}$ とする。
• 偏導関数 $g=\partial_i f$ が定義されるとき (定義 5.1.6 参照)、これにたいし更なる偏微分 $\partial_j g(x)$ を考えることができるが、これを

$$\partial_j\partial_i f(x),\ \ \partial_{x_j}\partial_{x_i} f(x),\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x),\ \ \frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i} f(x),\ \ f_{x_j\,x_i}(x)$$

等の記号で表す (特に $i=j$ の場合 $\partial_i^2 f(x)$, $\partial_{x_i}^2 f(x)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x)$, $f_{x_i\,x_i}(x)$)。これらを **二階の偏微分係数**と言う。また、これらが全ての $x\in D$ で存在し、x の関数とみなすときは**二階の偏導関数**と言う。

• $k=1,2,..$ とする。$k-1$ 階の偏導関数 g が定義されるとき、これにたいし更なる偏微分 $\partial_j g(x)$ をを考えることができる。これにより、帰納的に k **階の偏微分係数**、k **階の偏導関数**が定義される（k 階の偏微分係数は、偏微分を施す座標の順序を考慮して、全部で d^k 個ある)。
• $f: D \to \mathbb{R}$ であり、k 階までの全ての偏導関数が存在して連続であるもの全体を $C^k(D)$ で表す。

例 11.2.2 $\partial_j\partial_i f(a), \partial_i\partial_j f(a)$ が共に存在しても等しくないことがある。実際、$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(z) = x^3y^1/|z|^2$ $(z=(x,y) \neq (0,0))$, $f(0)=0$ と定める。例 11.1.5 の計算から、任意の $t \neq 0$ に対し $\partial_1 f(0,t) = 0$, $\partial_2 f(t,0) = t$. よって、$\partial_2\partial_1 f(0,0) = 0$, $\partial_1\partial_2 f(0,0) = 1$.

例 11.2.2 の一方で、次の命題が成立する：

命題 11.2.3 記号は定義 11.2.1 通りとする。$\partial_j\partial_i f$, $\partial_i\partial_j f$ が共に D 上定義されかつ $a \in D$ で連続なら $\partial_j\partial_i f(a) = \partial_i\partial_j f(a)$.

証明： x_i, x_j 以外の変数は固定して、x_i, x_j 二変数のみ考えればよい。従って $d=2$ の場合を示せば十分である。そこで、

$$\Delta(h) = f(a_1+h, a_2+h) - f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2+h) + f(a_1, a_2), \quad h > 0$$

とし、$\partial_2\partial_1 f(a)$, $\partial_1\partial_2 f(a)$ が共に $\lim_{h\to 0} \Delta(h)/h^2$ に等しいことを示す。
まず、$\partial_2\partial_1 f(a)$ を考える。$\varphi_1(t) = f(t, a_2+h) - f(t, a_2)$ とすると、

(1) $\Delta(h) = \varphi_1(a_1+h) - \varphi_1(a_1)$.

$\varphi_1'(t) = \partial_1 f(t, a_2+h) - \partial_1 f(t, a_2)$. 従って、(1) と φ_1 に対する平均値定理より

(2) $\Delta(h)/h = \varphi_1'(a_1+h_1) = \partial_1 f(a_1+h_1, a_2+h) - \partial_1 f(a_1+h_1, a_2)$

を満たす $h_1 \in (0,h)$ が存在する。さらに、$g_2(t) = \partial_1 f(a_1+h_1, t)$ とすると $g_2'(t) = \partial_2\partial_1 f(a_1+h_1, t)$ かつ

(3) (2) の右辺 $= g_2(a_2+h) - g_2(a_2)$.

従って、(3) と g_2 に対する平均値定理から、

(4) ((2) の右辺)$/h = g_2'(a_2+h_2) = \partial_2\partial_1 f(a_1+h_1, a_2+h_2)$

を満たす $h_2 \in (0,h)$ が存在する。$\partial_2\partial_1 f$ は a で連続だから (2),(4) より

$$\Delta(h)/h^2 = \partial_2\partial_1 f(a_1+h_1, a_2+h_2) \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} \partial_2\partial_1 f(a_1, a_2).$$

また、座標を入れ替えて同じ議論をすれば[71] $\Delta(h)/h^2 \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} \partial_1\partial_2 f(a_1, a_2)$. を得る。故に $\partial_2\partial_1 f(a_1, a_2) = \partial_1\partial_2 f(a_1, a_2)$. □

[71] $\Delta(h) = \varphi_2(a_2+h) - \varphi_2(a_2)$, 但し $\varphi_2(t) = f(a_1+h, t) - f(a_1, t)$. 次に φ_2 に平均値定理を用いる。

問 11.2.1 $u, v, f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ に対し $A(f) = uf_x - vf_y$, $B(f) = vf_x + uf_y$ とする。$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ なら $A^2(f) = A(Af)$, $B^2(f) = B(Bf)$ も定義できる。このとき、次を示せ：

$$\begin{aligned} A^2(f) + B^2(f) = (u^2+v^2)(f_{xx}+f_{yy}) \quad &+ \quad \left(\partial_x\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) + uv_y - u_y v\right) f_x \\ &+ \quad \left(\partial_y\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) + u_x v - uv_x\right) f_y. \end{aligned}$$

問 11.2.2 $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$ に対し、について次の (a),(b) は同値であることを示せ：(a):全ての $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ で $\partial_x \partial_y f(x,y) = 0$. (b): $f_j \in C^2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ $(j = 1, 2)$ が存在し、全ての $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ で $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$.

問 11.2.3 $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$ 及び $c > 0$ について次の (a),(b) は同値であることを示せ：(a) **波動方程式：**$\left(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\right) u(x,t) = 0$ を満たす。(b) 関数 $f_\pm \in C^2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ が存在して $u(x,t) = f_+(x+ct) + f_-(x-ct)$ と書ける。
(a) $\Leftarrow$ (b) のヒント：$y = x - ct$, $z = x + ct$ と変数変換し、u を (y,z) の関数と見ると、波動方程式から $\partial_y \partial_z u \equiv 0$ が分かり、問 11.2.2 の結果が使える。

問 11.2.4 $(\star)$ $f \in C^2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$, $g \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ とするとき次を示せ；関数；

(1) $$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct) + c^{-1}\textstyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy\right)$$

は、$C^2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$ に属し $\left(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\right) u(x,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ を満たす。またこれらの条件を全てみたす $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$ は (1) で与えられるものに限る。

問 11.2.5 $x \in \mathbb{R}^d$,$t > 0$ $h_t(x) = ct^{-d/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$ とする（$c > 0$ は定数：問 5.4.7 参照)。$h_t(x)$ にたいし **熱方程式**: $(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta)h_t(x) = 0$ を示せ。但し $\Delta = (\partial_1)^2 + ... + (\partial_d)^2$. この Δ を **ラプラシアン** という。

問 11.2.6 $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ に対し $Af(x) = \sum_{j=1}^d x_j \partial_j f(x)$ とおく。$f \in C^3(\mathbb{R}^d)$ に対し $\Delta Af - A\Delta f = 2\Delta f$ (従って、$\Delta f = 0$ なら $\Delta Af = 0$) を示せ。

問 11.2.7 $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ とする。以下を示せ：
(i) $f \in D^1((0,\infty))$ に対し $\partial_j f(|x|) = f'(|x|)x_j|x|^{-1}$.
(ii) $f \in D^2((0,\infty))$ に対し $\partial_i\partial_j f(|x|) = f''(|x|)x_i x_j|x|^{-1} + f'(|x|)\left(\delta_{ij}|x|^{-1} - x_i x_j|x|^{-3}\right)$,
$\Delta f(|x|) = f''(|x|) + (d-1)f'(|x|)|x|^{-1}$,

問 11.2.8 $(\star)$ 以下を示せ：(i) **グリーン核**[72] $g_0(x)$ $(x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ に対し $\Delta g_0 = 0$, 但し

$$g_0(x) = \begin{cases} -|x|, & d = 1 \\ -c_2 \log|x|, & d = 2 \qquad c_2, c_3, ... \text{ は定数} \\ c_d|x|^{2-d} & d \geq 3, \end{cases}$$

g_0 は原点におかれた質点（点電荷）によって生じるおける位置エネルギー（静電位）を表し、$(\partial_j g_0)_{j=1}^d$ は重力場（静電場）を表す。$\Delta g_0 = 0$ は重力場（静電場）が保存力場であることを表す。(ii) **ポアソン核** $p_y(x)$ に対し $(\Delta + \partial_y^2)p_y(x) = 0$, 但し

$$p_y(x) = c_d \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(d+1)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ y > 0 \ \ c_d \text{ は定数}$$

[72]George Green (1793—1841)

$\mathbb{R}^{d+1}$ の下半空間 $\mathbb{R}^d \times (-\infty, 0)$ に静電場は生じない（例えば金属、電解質溶液などの電気を逃がしやすい物質で満たされている）とする。このとき $0 \in \mathbb{R}^{d+1}$ に電荷をおくと $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ にのみ静電場が生じ、$(x, y) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ での電位は $p_y(x)$ で与えられる。

次に多変数関数に対するテイラーの定理を述べる。特に $n = 2$ の場合は、多変数関数の極値の判定にも用いられる。

定理 11.2.4 (テイラーの定理) $D \subset \mathbb{R}^d$ は開集合、$f \in C^n(D)$, $a, b \in D$, $h = b - a$, $\{a + th : t \in [0, 1]\} \subset D$ とする。このとき、

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,..,i_k=1}^{d} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(a) h_{i_1} \cdots h_{i_k} + R_n$$

但し、

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \sum_{i_1,..,i_n=1}^{d} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} f(a + th) h_{i_1} \cdots h_{i_n}.$$

更に、次のような $\theta \in (0, 1)$ が存在する：

$$R_n = \frac{1}{n!} \sum_{i_1,..,i_n=1}^{d} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} f(a + \theta h) h_{i_1} \cdots h_{i_n}.$$

証明：一変数関数 $\varphi(t) = f(a + th)$ $(t \in [0, 1])$ を考えて、一変数関数に対するテイラーの定理（定理 8.4.1）に帰着させる。$1 \le k \le n$ に対し

(1) $$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i_1,..,i_k=1}^{d} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(a + th) h_{i_1} \cdots h_{i_k}.$$

実際、$k = 1$ の場合は連鎖律（命題 11.1.7） より、

$$\varphi^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i f(a + th) h_i.$$

以下、t について繰り返し微分すれば、帰納的に (1) を得る。

次に (1) を用いて定理を示す。$\varphi \in C^n([0, 1])$ だから一変数関数に対するテイラーの定理（定理 8.4.1）より

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) + R_n, \quad \text{但し}, \ R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi^{(n)}(t) dt.$$

更に次のような $\theta \in (0, 1)$ が存在する：

$$R_n = \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(\theta).$$

これらに (1) を代入すれば示すべき式を得る。 □

11.3　極値の判定

$f \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ に対し、極値点の候補は $f'(a) = 0$ を満たす点だった（命題 5.4.3)。更に、$f \in C^2(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, $f'(a) = 0$ のとき、$f''(a) > 0$, $f''(a) < 0$ に応じて、a は極小点、極大点である。これら事実の多変数関数への拡張について述べる。

定義 11.3.1 （**臨界点**）$D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{D}$ とする。f が $a \in D$ で可微分かつ $f'(a) = 0$ なら、a は f の**臨界点**であると言う。

まず、可微分関数の臨界点であることは、極値点であることの必要条件であることを述べる (十分でないことについては 例 11.3.3 参照)。これは、可微分関数の極値点を求める際、まず候補として臨界点を求める手順の根拠となる。

命題 11.3.2 （**極値点での微分**）$D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{D}$ は f の極値点とする。ある $j = 1, .., d$ に対し $\partial_j f(a)$ が存在すれば $\partial_j f(a) = 0$. 特に f が a で可微分なら a は臨界点である。

証明： $a \in \overset{\circ}{D}$ だから $\varepsilon > 0$ が十分小さければ $\varphi_j(t) = f(a + t\delta_j)$ $(t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$ が定義され、$t = 0$ は φ_j の極値点である。一方、$\partial_j f(a)$ が存在するから、φ_j は $t = 0$ で可微分で $\varphi_j'(0) = \partial_j f(a)$. 以上と 命題 5.4.3 より $0 = \varphi_j'(0) = \partial_j f(a)$. 特に f が a で可微分なら $f'(a) = (\partial_j f(a))_{j=1}^d = 0$. □

例 11.3.3 $a, b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ を定数とする。$f(x, y) = ax^2 + by^2$ （$(x, y) \in \mathbb{R}^d$）について原点 $(0, 0)$ が唯一の臨界点である。また、

$$(0,0) \text{ は} \begin{cases} a, b > 0 \text{ なら 極小点、} \\ a, b < 0 \text{ なら 極大点、} \\ ab < 0 \text{ なら 極値でない。} \end{cases}$$

証明：臨界点は $f_x = 2ax = 0$, $f_y = 2by = 0$ の解だから唯一 $(0, 0)$ のみである。$a, b > 0$ なら任意の (x, y) に対し $f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$ より $(0, 0)$ は極小点。同様に、$a, b < 0$ なら $(0, 0)$ は極大点。一方、例えば $a > 0 > b$, $x, y \neq 0$ なら

$$\underbrace{f(0, y)}_{=by^2} < \underbrace{f(0, 0)}_{=0} < \underbrace{f(x, 0)}_{=ax^2}.$$

よって、$(0, 0)$ は極値でない。$a < 0 < b$ でも同様である。 □

問 11.3.1 $c_1, ..., c_d \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ を定数とする。$f(x) = c_1 x_1^2 + ... + c_d x_d^2$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ について、例 11.3.3 と同様の考察を行え。

例 11.3.3 が示すように、可微分関数の臨界点であることは、極値点であることの必要条件に過ぎない。しかし、次の例 11.3.4 のように、可微分関数 $f : D \to \mathbb{R}$ の極値点が $\overset{\circ}{D}$ 内に存在することが、あらかじめわかっていて、かつ臨界点が唯一ならその臨界点が極値点である。

例 11.3.4 $a, b, c > 0$ は定数、$x, y, z \geq 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ とし xyz の最大値を求める（与えられた楕円体に、辺が座標軸に平行な直方体を内接させつつ、直方体の体積を最大にする問題と解釈できる）。

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z) \in [0,\infty)^3 \ ; \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}, \\ D &= \{(s,t) \in [0,\infty)^2 \ ; \ s+t \leq 1\} \end{aligned}$$

とすると、$(x,y,z) \in E$ に $(s,t) = (\frac{x^2}{a^2}, \frac{y^2}{b^2}) \in D$ を対応させる写像は全単射かつ、

$$xyz = abc\sqrt{st(1-s-t)}.$$

よって

$$f(s,t) = st(1-s-t), \quad (s,t) \in D$$

を最大にすればよい。D はコンパクト、f は連続だから f は最大値を持つが、D の境界では $st(1-s-t) = 0$ だから、最大点は $\overset{\circ}{D}$ 内にある。また、最大点は極大点、f は可微分だから最大点は臨界点 (命題 11.3.2)。一方、

$$f_s = t(1-2s-t), \ \ f_t = s(1-2t-s).$$

よって、$\overset{\circ}{D}$ 内の臨界点 ($f_s = f_t = 0$ の解) は $(1/3, 1/3)$ のみである。従って $f(1/3,1/3) = 1/27$ が f の最大値。以上から、求める最大値は $\frac{abc}{3\sqrt{3}}$. □

問 11.3.2 $a_1, ..., a_d > 0$ は定数、$x_1, ..., x_d \geq 0$, $\frac{x_1^2}{a_1^2} + ... + \frac{x_d^2}{a_d^2} = 1$ とし積 $x_1 \cdots x_d$ の最大値を求めよ。

次に多変数関数の臨界点が、極値点であるための十分条件を 2 階の微分を用いて与える。そのためにまず次の定義をおく：

定義 11.3.5 （**ヘッシアン**）$D \subset \mathbb{R}^d$, $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$, $x \in \overset{\circ}{D}$ とする。次の行列 $H(x)$ を f の x における**ヘッシアン** (Hessian) と言う：

$$H(x) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) & \dots & \partial_1\partial_d f(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_d\partial_1 f(x) & \dots & \partial_d\partial_d f(x) \end{pmatrix},$$

また、ヘッシアン $H(x)$ の小行列式を次のように記す：

$$\Delta_k(x) = \det \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) & \dots & \partial_1\partial_k f(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_k\partial_1 f(x) & \dots & \partial_k\partial_k f(x) \end{pmatrix}, \quad k = 1, ..., d.$$

多変数関数の臨界点近傍の挙動を調べる上で、ヘッシアンが重要な理由は次のように説明できる。$D \subset \mathbb{R}^d$, $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$, $a \in \overset{\circ}{D}$, $f'(a) = 0$ とする。このとき、テイラーの定理 (定理 11.2.4) より、

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{f'(a)h}_{=0} + \tfrac{1}{2} h \cdot H(a)h + R_2.$$

$|h|$ が小さいとき、誤差 R_2 は $h \cdot H(a)h$ に比べてはるかに小さい。従って、$|h|$ が小さいとき、

$$f(a+h) \overset{\text{ほぼ}}{=} f(a) + \tfrac{1}{2} h \cdot H(a)h \tag{11.5}$$

と考えてよい。つまり、

f は臨界点 a の近傍で、係数行列 $\frac{1}{2}H(a)$ の 2 次関数で近似される。

多変数関数の臨界点が、極値点であるための十分条件をヘッシアンを用いて与える。

命題 11.3.6 (**極値の判定**) 記号は 定義 11.3.5 の通り、$a \in \overset{\circ}{D}$, $f'(a) = 0$ として、以下の条件を考える：

(a1) 全ての $k = 1, ..., d$ に対し $\Delta_k(a) > 0$.

(a2) 全ての $k = 1, ..., d$ に対し $\Delta_k(a) \geq 0$.

(b1) 全ての $k = 1, ..., d$ に対し $(-1)^k \Delta_k(a) > 0$.

(b2) 全ての $k = 1, ..., d$ に対し $(-1)^k \Delta_k(a) \geq 0$.

このとき、

(i) (a1) なら a は f の**狭義極小点**である、即ち、ある $\varepsilon > 0$ に対し $x \in B(a, \varepsilon) \backslash \{a\}$ なら $f(x) > f(a)$.

(ii) (b1) なら a は f の**狭義極大点**である、即ち、ある $\varepsilon > 0$ に対し $x \in B(a, \varepsilon) \backslash \{a\}$ なら $f(x) < f(a)$.

(iii) (a2),(b2) 共に不成立なら、a は f の極値点でない。

厳密な証明は 11.3 節末尾に与えることとし、ここでは証明の概略だけを述べよう。(11.5) を認めて f を (11.5) の右辺におきかえて考えると、行列 $H(a)$ が正定値、負定値であるかに応じ a は極小、極大。線形代数によれば、そのための条件が (a1), (b1) で与えられる (補題 11.3.9 参照)。また、(a2),(b2) 共に不成立なら、$H(a)$ は不定符合、従って a は極値でない。

注 1：k が偶数かつ $\Delta_k(a) < 0$ なら (a2),(b2) 共に不成立。

注 2： 命題 11.3.6 の (a2) から a が f の極小点とは言えない。例えば、$f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$,$a = 0$ に対し $f'(0) = f''(0) = 0$ なので条件 (a2) は満たされるが、$a = 0$ は f の極値点でない。同様に 命題 11.3.6 の条件 (b2) から a が f の極大点とは言えない。

例 11.3.7 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の関数 $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ の極値点を調べる。

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ なので極値点は臨界点 (命題 11.3.2)。そこでまず臨界点を求める。

$$f_x = y(1 - x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad f_y = x(1 - y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

従って、臨界点は $(0, 0)$, $\pm(1, 1)$, $\pm(1, -1)$. また、

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} xy(x^2 - 3) & (1 - x^2)(1 - y^2) \\ (1 - x^2)(1 - y^2) & xy(y^2 - 3) \end{pmatrix}$$

よって、

$$\Delta_1 = -3xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad \Delta_2 = \{x^2y^2(x^2 - 3)(y^2 - 3) - (1 - x^2)^2(1 - y^2)^2\}e^{-x^2-y^2}.$$

これらより、
$\Delta_1(0,0)=0$, $\Delta_2(0,0)<0$. よって $(0,0)$ は f の極値点でない (命題 11.3.6 後の注参照)。
$\Delta_1(\pm(1,1))<0$, $\Delta_2(\pm(1,1))>0$. よって $\pm(1,1)$ は f の狭義極大点である。
$\Delta_1(\pm(1,-1))>0$, $\Delta_2(\pm(1,-1))>0$. よって $\pm(1,-1)$ は f の狭義極小点である。 □

問 11.3.3 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ の関数が以下のように与えられるとき、臨界点、極小点、極大点をそれぞれ求めよ：(i) x^3+y^3-3xy. (ii) $x^4+y^4-10x^2+16xy-10y^2$. (iii) $(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$. (iv) $(2x^2+y^2)e^{x^2+y^2}$.

３変数以上の関数に対して、命題 11.3.6 を適用して極値点を調べる方法は原理的には２変数の場合（例 11.3.7）と同様だが、実際の計算は面倒になることが多い。ここでは、比較的簡単に計算できる例を挙げる：

例 11.3.8 関数 $\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-xy-yz-zx$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ の極値点を調べる。

与えられた関数を f とおく。$f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ より、極値点は臨界点 ($f_x=f_y=f_z=0$ の解) である。そこでまず臨界点を求める。

$$f_x=x^2-y-z,\quad f_y=y^2-z-x,\quad f_z=z^2-x-y.$$

従って臨界点は $(0,0,0)$, $(2,2,2)$. 更に、

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & -1 & -1 \\ -1 & 2y & -1 \\ -1 & -1 & 2z \end{pmatrix}.$$

よって、

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2x,\quad \Delta_2=4xy-1, \\ \Delta_3 &= 2x(4yz-1)+(-2z-1)-(1+2y)=8xyz-2(x+y+z). \end{aligned}$$

(Δ_3 は第１行について余因子展開して求めた。) これらより、
$\Delta_2(0,0,0)<0$. よって $(0,0,0)$ は f の極値点でない。
$\Delta_k((2,2,2))>0$ $(k=1,2,3)$. よって $(2,2,2)$ は f の狭義極小点である。 □

問 11.3.4 関数 $x^2+y^2+z^2+x-2z-xy$ $((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$ の極値点を調べよ。

命題 11.3.6 の証明に、次の補題を用いる：

補題 11.3.9 行列 $S=(s_{ij})_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le d}}$, $s_{ij}=s_{ji}$ に対しその **主小行列式**を

$$\Delta_k=\det\begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ s_{k1} & \dots & s_{kk} \end{pmatrix},\quad k=1,...,d$$

と定め、以下の条件を考える：

(a1) 全ての $k=1,...,d$ に対し $\Delta_k>0$.

(a2) S は**正定値**、即ち、任意の $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ に対し $x \cdot Sx > 0$.

(a3) 全ての $k = 1, ..., d$ に対し $\Delta_k \geq 0$.

(a4) S は**半正定値**、即ち、任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $x \cdot Sx \geq 0$.

(b1) 全ての $k = 1, ..., d$ に対し $(-1)^k \Delta_k > 0$.

(b2) S は**負定値**、即ち、任意の $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ に対し $x \cdot Sx < 0$.

(b3) 全ての $k = 1, ..., d$ に対し $(-1)^k \Delta_k \geq 0$.

(b4) S は**半負定値**、即ち、任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $x \cdot Sx \leq 0$.

(c) S は**不定符合**である、即ち、ある $x, y \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ に対し $x \cdot Sx < 0 < y \cdot Sy$.

このとき、

$$\begin{aligned} &\text{(a1)} \iff \text{(a2)} \implies \text{(a3)} \iff \text{(a4)}, \\ &\text{(b1)} \iff \text{(b2)} \implies \text{(b3)} \iff \text{(b4)}, \\ &\text{(c)} \iff \text{(a3),(a4) 共に不成立}. \end{aligned}$$

証明： 線形代数の教科書を参照せよ。 □

命題 11.3.6 の証明：(i): (a1) と 補題 11.3.9 より、$H(a)$ は正定値である。$a \in \overset{\circ}{D}$ より $B(a, \varepsilon) \subset D$ を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する。全ての $k = 1, ..., d$ に対し $\Delta_k \in C(D \to \mathbb{R})$ かつ $\Delta_k(a) > 0$. よって、必要なら $\varepsilon > 0$ を更に小さくとりかえることで $B(a, \varepsilon)$ 上で全ての $k = 1, ..., d$ に対し $\Delta_k > 0$ としてよい。今、$x \in B(a, \varepsilon) \backslash \{a\}$ を任意、$h = x - a$ とする。このとき、テイラーの定理 (定理 11.2.4) と $f'(a) = 0$ より、次のような $\theta \in (0, 1)$ が存在する：

(1) $$f(x) - f(a) = \tfrac{1}{2} h \cdot H(a + \theta h) h$$

全ての $k = 1, ..., d$ に対し $\Delta_k(a + \theta h) > 0$ だから補題 11.3.9 より $H(a + \theta h)$ は正定値、従って (1) 右辺は正である。以上より a は極小点である。
(ii):$-f$ を考えれば (i) に帰着する。
(iii): (a2),(b2) 共に不成立なら $H(a)$ は正定値である（補題 11.3.9)。仮定より次のような $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ が存在する：

(2) $$h_1 \cdot H(a) h_1 < 0 < h_2 \cdot H(a) h_2.$$

h_j を ch_j $(c > 0)$ で置き換えても、同じ不等式が成り立つから、$|h_j| < \varepsilon$ と仮定してよい。そこで $t \in (0, 1)$ に対しテイラーの定理 (定理 11.2.4) と $f'(a) = 0$ より、次のような $\theta_j \in (0, 1)$ が存在する：

(3) $$f(a + th_j) - f(a) = \tfrac{t^2}{2} h_j \cdot H(a + \theta_j t h_j) h_j.$$

$|\theta_j t h_j| \leq t\varepsilon$ と (2) より t が十分小さければ、(3) の右辺は $j = 1$ のとき負、$j = 2$ のとき正である。従って a は f の極値点でない。 □

11.4 逆関数・陰関数

滑らかな関数について（局所的な）逆関数の存在、およびその逆関数の滑らかさについて考える。まず、$g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ が次のような一次関数としよう。

$$g(x) = b + C(x-a) \quad (C \text{ は } d \times d \text{ 行列、} b \in \mathbb{R}^d).$$

もし、$\det C \neq 0$ なら逆行列 C^{-1} が存在するから、g の逆関数を

$$h(y) = a + C^{-1}(y-b)$$

により与えることができる。一般に、$g \in C^1(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$ で x が a に近ければ

$$g(x) \overset{\text{ほぼ}}{=} g(a) + g'(a)(x-a)$$

だから、もし、$\det g'(a) \neq 0$ なら x が a に近い範囲では g の逆関数が存在するのでは？と期待できる。この期待には次の定理が答えてくれる：

定理 11.4.1 (**逆関数定理**) $D \subset \mathbb{R}^d$ を開集合、$g \in C^r(D \to \mathbb{R}^d)$ $(r \geq 1)$ とする。

(a) $a \in D$, $\det g'(a) \neq 0$ なら、$\mathbb{R}^d$ の開集合 A,B で次をみたすものが存在する:

$$a \in A \subset D, \tag{11.6}$$

$$g : A \to B \text{ は全単射、} \tag{11.7}$$

$$A \text{ 上 } \det g' \neq 0. \tag{11.8}$$

従って、$g : A \to B$ の逆関数 $h : B \to A$ が存在する。

(b) 開集合 $A, B \subset \mathbb{R}^d$ が $A \subset D$, (11.7),(11.8) を満たすとき、$h \in C^r(B \to A)$. 更に任意の $a \in A$, $f \in C^1(A \to \mathbb{R}^k)$ に対し

$$\begin{array}{l} (f \circ h)'(b) = f'(a)g'(a)^{-1}, \ \text{但し } b = g(a) \\ \text{特に } f(x) \equiv x \text{ として、} h'(b) = g'(a)^{-1}. \end{array} \tag{11.9}$$

定理 11.4.1 の証明は 11.5 節で述べる。

注１：g が線形写像の場合、あるいは A が一次元の区間の場合からの類推から、開集合 $A \subset D$ が (11.8) を満たしさえすれば、自動的に g は A 上単射と早合点してしまうかもしれないが、それは正しくない。例えば、

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos y \\ x \sin y \end{pmatrix}, \quad A = (0,\infty) \times \mathbb{R}$$

とすると、(11.8) は満たされるが、g は A 上単射でない。(11.7), (11.8) 共に確保するには、更に A を小さくとりかえる必要がある。上の例では、例えば $A = (0,\infty) \times (-\pi, \pi)$. その意味でも、定理 11.4.1(a) は <u>局所的な</u> 逆関数存在定理である。

注2：(11.9) は $h \in C^1(B \to A)$ さえ認めれば簡単に示せる。実際、$b = g(a)$, $f \in C^1(A \to \mathbb{R}^k)$ とするとき

$$f'(a) = (f \circ h \circ g)'(a) \overset{\text{連鎖律}}{=} (f \circ h)'(b) g'(a).$$

両辺の左側から $g'(a)^{-1}$ を乗じて (11.9) を得る。

例 11.4.2 (**平面極座標**) 極座標変換 $g(r,\theta)=\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$ を考える。$\theta_0\in[0,2\pi)$ を任意に固定し、$D=(0,\infty)\times(\theta_0,\theta_0+2\pi)$, $F=\{r(\cos\theta_0,\sin\theta_0)\ ;\ r\geq 0\}$ とすると $g:D\to\mathbb{R}^2\backslash F$ は全単射である。

$$g'(r,\theta)=\begin{pmatrix}\mathrm{c} & -r\mathrm{s}\\ \mathrm{s} & r\mathrm{c}\end{pmatrix},\ \ \det g'(r,\theta)=r\neq 0.$$

よって、逆関数定理から g の逆写像 $h:\mathbb{R}^2\backslash F\to D$ は C^∞. また、(r,θ) についての C^1 関数 f を (x,y) について微分すると、(11.9) より[73]、

(1) $$(f_x,f_y)=(f_r,f_\theta)\begin{pmatrix}\mathrm{c} & -r\mathrm{s}\\ \mathrm{s} & r\mathrm{c}\end{pmatrix}^{-1}=(f_r,f_\theta)\begin{pmatrix}\mathrm{c} & \mathrm{s}\\ -\mathrm{s}/r & \mathrm{c}/r\end{pmatrix}.$$

なお、(1) を導くには、上のように (11.9) を直接用いてもよいが、次のようにしてもよい。(r,θ) についての微分を (x,y) についての微分で表す式：

$$(f_r,f_\theta)=(f_x,f_y)\begin{pmatrix}\mathrm{c} & -r\mathrm{s}\\ \mathrm{s} & r\mathrm{c}\end{pmatrix}$$

が連鎖律で得られる（例 11.1.9)。この両辺に $\begin{pmatrix}\mathrm{c} & -r\mathrm{s}\\ \mathrm{s} & r\mathrm{c}\end{pmatrix}^{-1}$ を乗じて (1) を得る。後者の方法は (11.9) の証明の繰り返しになるが、「公式」に頼らない安心感がある。(1) より、 f を微分する際、

$$\partial_x=\mathrm{c}\partial_r-\frac{\mathrm{s}}{r}\partial_\theta,\ \ \partial_y=\mathrm{s}\partial_r+\frac{\mathrm{c}}{r}\partial_\theta \tag{11.10}$$

となる（力学的には、水平方向の単位速度ベクトルを、原点から遠ざかる方向の速さ c と角速度 $-\frac{\mathrm{s}}{r}$ に、また、垂直方向の単位速度ベクトルを、原点から遠ざかる方向の速さ s と角速度 $\frac{\mathrm{c}}{r}$ に分解する式。角速度を r で割ることにより、原点から距離 r の点で単位速度ベクトルが生じる。)。そこで、f を C^2 として f_{xx} を極座標による微分で表すと、

$$\begin{aligned}f_{xx}&=\mathrm{c}\partial_r\left(\mathrm{c}f_r-\frac{\mathrm{s}}{r}f_\theta\right)-\frac{\mathrm{s}}{r}\partial_\theta\left(\mathrm{c}f_r-\frac{\mathrm{s}}{r}f_\theta\right)\\&=\mathrm{c}^2f_{rr}-2\frac{\mathrm{cs}}{r}f_{r\theta}+\frac{\mathrm{s}^2}{r^2}f_{\theta\theta}+\frac{\mathrm{s}^2}{r}f_r+2\frac{\mathrm{cs}}{r^2}f_\theta.\end{aligned}$$

同様に、

$$f_{yy}=\mathrm{s}^2f_{rr}+2\frac{\mathrm{cs}}{r}f_{r\theta}+\frac{\mathrm{c}^2}{r^2}f_{\theta\theta}+\frac{\mathrm{c}^2}{r}f_r-2\frac{\mathrm{cs}}{r^2}f_\theta.$$

よって、

$$f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}.$$

（上の 2 階微分の計算では、r についてちょうど $m=0,1,2$ 回微分した項は必ず r^{2-m} で割られる。これを知っていると、計算間違いが減るので便利。）また、円柱座標：

$$\widetilde{g}(r,\theta,z)=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\\ z\end{pmatrix},\quad r\geq 0,\ \theta,z\in\mathbb{R}$$

（例 11.1.9 参照）は本質的に平面極座標なので、上と全く同じ計算結果を得る。 □

[73]「f を (x,y) について微分する」とは、厳密には $f\circ h$ を微分することであり、(f_x,f_y) も本来 $((f\circ h)_x,(f\circ h)_y)$ と書くべきものであるが、習慣に従って略記した。

問 11.4.1 例 11.4.2 の f_{xy} を極座標による微分で表せ。

問 11.4.2 $(r,\theta) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi]$ に対し $g(r,\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, r \cos\theta \\ \mathrm{sh}\, r \sin\theta \end{pmatrix}$ とする (楕円座標: 問 11.1.6 参照)。例 11.4.2 の (11.10) にあたる式を求めよ。更に問 11.2.1 を用い、$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ に対し次を示せ：$f_{xx} + f_{yy} = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 r + \sin^2\theta}(f_{rr} + f_{\theta\theta})$.

例 11.4.3 ($\star$)(**空間極座標**) $D = (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (0,\pi)$, $g : D \to \mathbb{R}^3$ を極座標変換:

$$g(r,\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ r\sin\theta_1\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

とする。g は D から $\mathbb{R}^3 \backslash F$ （$F = \{(x,y,0) \ \ y \le 0\}$ ）への全単射である (問 11.1.7)。また、例 11.1.10 より

$$(f_r, f_{\theta_1}, f_{\theta_2}) = (f_x, f_y, f_z) g'(r,\theta_1,\theta_2) = (f_x, f_y, f_z) \begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 & -r\mathrm{s}_1 & 0 \\ \mathrm{s}_1\mathrm{c}_2 & r\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2 & -r\mathrm{s}_1\mathrm{s}_2 \\ \mathrm{s}_1\mathrm{s}_2 & r\mathrm{c}_1\mathrm{s}_2 & r\mathrm{s}_1\mathrm{c}_2 \end{pmatrix}.$$

$g'(r,\theta_1,\theta_2)$ は

$$T = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 & -\mathrm{s}_1 & 0 \\ \mathrm{s}_1\mathrm{c}_2 & \mathrm{c}_1\mathrm{c}_2 & -\mathrm{s}_2 \\ \mathrm{s}_1\mathrm{s}_2 & \mathrm{c}_1\mathrm{s}_2 & \mathrm{c}_2 \end{pmatrix}$$

の第二列、第三列をそれぞれ r 倍、$\rho(\stackrel{\text{def.}}{=} r\mathrm{s}_1)$ 倍したものだから、

(1) $$\left(f_r, \frac{f_{\theta_1}}{r}, \frac{f_{\theta_2}}{\rho}\right) = (f_x, f_y, f_z)T$$

また、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}_2 & -\mathrm{s}_2 \\ 0 & \mathrm{s}_2 & \mathrm{c}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 & -\mathrm{s}_1 & 0 \\ \mathrm{s}_1 & \mathrm{c}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より、T は直交行列かつ $\det T = 1$. 従って

$$\det g'(r,\theta_1,\theta_2) = r\rho \det T = r^2\mathrm{s}_1 \neq 0.$$

従って逆関数定理より $g : D \to \mathbb{R}^3 \backslash F$ の逆関数 h も C^∞ である。また、T は直交行列だから、転置行列 T^* は T^{-1} に等しい。よって (1) より

(2) $$(f_x, f_y, f_z) = \left(f_r, \frac{f_{\theta_1}}{r}, \frac{f_{\theta_2}}{\rho}\right) T^* = \left(f_r, \frac{f_{\theta_1}}{r}, \frac{f_{\theta_2}}{\rho}\right) \begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 & \mathrm{s}_1\mathrm{c}_2 & \mathrm{s}_1\mathrm{s}_2 \\ -\mathrm{s}_1 & \mathrm{c}_1\mathrm{c}_2 & \mathrm{c}_1\mathrm{s}_2 \\ 0 & -\mathrm{s}_2 & \mathrm{c}_2 \end{pmatrix}.$$

(2) より f を微分する際、

$$\partial_x = \mathrm{c}_1\partial_r - \frac{\mathrm{s}_1}{r}\partial_{\theta_1}, \ \ \partial_y = \mathrm{s}_1\mathrm{c}_2\partial_r + \frac{\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2}{r}\partial_{\theta_1} - \frac{\mathrm{s}_2}{\rho}\partial_{\theta_2}, \ \ \partial_z = \mathrm{s}_1\mathrm{s}_2\partial_r + \frac{\mathrm{c}_1\mathrm{s}_2}{r}\partial_{\theta_1} + \frac{\mathrm{c}_2}{\rho}\partial_{\theta_2}$$

である。これを繰り返し用いれば x,y,z による二階以上の微分も極座標による微分で表すことが出来る（多少面倒だが)。ここでは、$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ の簡単な計算法を紹介する。r,θ_1,θ_2 から x,y,z を得る手順を

$$(r,\theta_1,\theta_2) \xrightarrow{\substack{x=r\mathrm{c}_1, \\ \rho=r\mathrm{s}_1}} (x,\rho,\theta_2) \xrightarrow{\substack{y=\rho\mathrm{c}_2, \\ z=\rho\mathrm{s}_2}} (x,y,z)$$

と二段階に分けると、それぞれは二次元極座標変換だから 例 11.4.2 の結果より

$$f_{yy}+f_{zz}=f_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}f_\rho+\frac{1}{\rho^2}f_{\theta_2\theta_2},\quad f_{xx}+f_{\rho\rho}=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta_1\theta_1}.$$

また、例 11.4.2 で y についての微分を r,θ についての微分書き換える式を用いると、この例で ρ についての微分を r,θ_1 についての微分書き換えることが出来る：

$$f_\rho=\mathrm{s}_1f_r+\frac{\mathrm{c}_1}{r}f_{\theta_1}.$$

以上より

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=f_{rr}+\frac{2}{r}f_r+\frac{\mathrm{c}_1}{r\mathrm{s}_1}f_{\theta_1}+\frac{1}{r^2}f_{\theta_1\theta_1}+\frac{1}{r^2\mathrm{s}_1^2}f_{\theta_2\theta_2}.$$

□

以下、11.4 節を通じ、$\mathbb{R}^{d+m}$ の点を (x,y) $(x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^m)$ と表す。また、開集合 $D\subset\mathbb{R}^{d+m}$、$f\in C^1(D\to\mathbb{R}^m)$ に対し次の記号を用いる。

$$\begin{aligned}\partial_xf(x,y)&=\begin{pmatrix}\partial_{x_1}f_1(x,y)&\dots&\partial_{x_d}f_1(x,y)\\ \vdots&\dots&\vdots\\ \partial_{x_1}f_m(x,y)&\dots&\partial_{x_d}f_m(x,y)\end{pmatrix},\\ \partial_yf(x,y)&=\begin{pmatrix}\partial_{y_1}f_1(x,y)&\dots&\partial_{y_m}f_1(x,y)\\ \vdots&\dots&\vdots\\ \partial_{y_1}f_m(x,y)&\dots&\partial_{y_m}f_m(x,y)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{11.11}$$

以下で述べる「陰関数定理」とは、大体、

> 滑らかな関数 $f(x,y)$ で記述された方程式 $f(x,y)=0$ を y について局所的に解くには、$\partial_yf(x,y)\neq0$ を確かめればよい。また、そのとき、解 $y=g(x)$ は x について滑らかである

というものである。まず、「$f(x,y)=0$ を y について局所的に解く」の意味を明らかにしよう。それが、「陰関数」の概念である。

定義 11.4.4 (**陰関数**) $D\subset\mathbb{R}^{d+m}$, $f:D\to\mathbb{R}^m$ に対し、$A\subset\mathbb{R}^d$, $B\subset\mathbb{R}^m$, $g:A\to B$ が次の条件を満たすとする：

$$\begin{aligned}&\text{(i) } A\times B\subset D\\ &\text{(ii) } (x,y)\in A\times B \text{ に対し、} y=g(x)\iff f(x,y)=0.\end{aligned}\tag{11.12}$$

このとき、$g:A\to B$ を $f(x,y)=0$ を y について解いた**陰関数**と言う。特に $m=1$ と $m\geq2$ の場合を区別するときは、前者を**単独陰関数**、後者を**連立陰関数**と言う。

注：(11.12) で $\Rightarrow$ だけでなく $\Leftarrow$ も成り立つことが重要である。つまり、$y=g(x)$ は $f(x,y)=0$ を y についての方程式とみたときの 唯一の 解でないといけない。「唯一の解」になるように、うまく A, B を選ぶところが「局所的」と言われる由縁である。

例 11.4.5 $D=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=x^2+y^2-1$ とする。$|x|>1$ なら $f(x,y)>0$ だから、$f(x,y)=0$ を y について解いた陰関数 $g:A\to B$ が存在する為には $A\subset[-1,1]$ が必要。更に、

(a) $A=[-1,1]$, $B=[0,\infty)$, $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ とすると、(11.12) が成りたつから、この $g:A\to B$ は $f(x,y)=0$ を y について解いた陰関数である。$A=[-1,1]$, $B=(-\infty,0]$, $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$ としても、(11.12) が成りたつから、この $g:A\to B$ も $f(x,y)=0$ を y について解いた陰関数である。

(b) $A=[-1,1]$, $B=\mathbb{R}$ とする。$f(x,y)=0$ の為には $y=\sigma(x)\sqrt{1-x^2}$ ($\sigma(x)\in\{-1,+1\}$) となることが必要だが、σ をどう選んでも、$g(x)=\sigma(x)\sqrt{1-x^2}$ に対し (11.12) (ii) の $\Leftarrow$ が不成立（$y=-g(x)$ でも $f(x,y)=0$）。よって、この A,B に対し、 $f(x,y)=0$ を y について解いた陰関数 $g:A\to B$ は存在しない。

この例からも、$f(x,y)=0$ を y について解いた陰関数 $g:A\to B$ が存在するためには A, B の大きさに制限が生じることが分かる。

問 11.4.3 $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ (x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)\}$ を**レムニスケイト** (lemniscate) と言う。(i) $(x,y)\in L$ に対し $|y|\le|x|\le\sqrt{2}$ を示せ。(ii) $A=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, $B_+=[0,\infty)$, $B_-=(-\infty,0]$ とするとき、$(x,y)\in L$ を y について解いた陰関数 $y_\pm:A\to B_\pm$ の具体形を求めよ。また、それにより L の概形を描け。

問 11.4.4 ($\star$) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ (x^2+y^2-x)^2=x^2+y^2\}$ を**カーディオイド** (cardioid) と言う。(i) $(x,y)\in C$ に対し $x\in[-1/4,2]$ を示せ。(ii) $(x,y)\in C$ を y について解いた陰関数 $y:A\to B$ は各場合に応じて次のように与えられることを示せ：

$$y=\begin{cases}\sqrt{s_-(x)} & A=[-1/4,0],\ B=[0,\sqrt{3}/4]\ \text{のとき},\\ \sqrt{s_+(x)} & A=[-1/4,0],\ B=[\sqrt{3}/4,\infty)\ \text{または}\ A=[0,2],\ B=[0,\infty)\ \text{のとき},\\ -\sqrt{s_-(x)} & A=[-1/4,0],\ B=[-\sqrt{3}/4,0]\ \text{のとき},\\ -\sqrt{s_+(x)} & A=[-1/4,0],\ B=(-\infty,-\sqrt{3}/4]\ \text{または}\ A=[0,2],\ B=(-\infty,0]\ \text{のとき}.\end{cases}$$

但し $s_\pm(x)=-x^2+x+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}$. (iii) C の概形を描け。

次に陰関数定理を述べる。そのうち単独陰関数定理を最初に述べる。それに先ち、定理が自然であることを裏付ける簡単な例を紹介する。

例 11.4.6 $c\in\mathbb{R}$ は定数、$h\in C^r(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R})$ $(r\ge1)$, $f(x,y)=h(x)y-c$ とする ($x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}$) 。$f(x,y)=0$ が y について解けるためには $h(x)\ne0$ が必要十分。従って、もし $a\in\mathbb{R}^d$ で、$h(a)\ne0$ ならば、開集合 $A\ni a$ が存在し $x\in A$ に対し $h(x)\ne0$. よって $x\in A$ に対し $f(x,y)=0$ を解ける。ここで次に注意する：

(1) $\partial_x f(x,y)=h'(x)y$, $\partial_y f(x,y)=h(x)$ （記法は $m=1$ の (11.11) に従う）.

また、$h(x)\ne0$ (特に $x\in A$) なら $y=g(x)\stackrel{\text{def.}}{=}c/h(x)$ を微分し、

$$g'(x)=-c\frac{h'(x)}{h(x)^2}=-\frac{h'(x)g(x)}{h(x)}\stackrel{(1)}{=}-\frac{\partial_x f(x,g(x))}{\partial_y f(x,g(x))}.$$

実は、上の簡単な例の一般化として次の定理が成立する（記法は $m=1$ の (11.11) に従う）：

定理 11.4.7 (**単独陰関数定理**) $D\subset\mathbb{R}^{d+1}$ を開集合、$f\in C^r(D\to\mathbb{R})$ $(r\ge1)$ とする。

(a) $(a,b) \in D$, $f(a,b)=0$, $\partial_y f(a,b) \neq 0$ なら、開集合 $A \ni a$, 開区間 $B \ni b$, 及び $f(x,y)=0$ を y について解いた陰関数 $g: A \to B$ で、次をみたすものが存在する:

$$x \in A \text{ なら } \partial_y f(x,g(x)) \neq 0. \tag{11.13}$$

(b) $f(x,y)=0$ を y について解いた陰関数 $g: A \to B$ （$A \subset \mathbb{R}^d$ は開集合、$B \subset \mathbb{R}$ は区間 ）が (11.13) を満たすなら、$g \in C^r(A \to B)$ かつ

$$g'(x) = -\frac{1}{\partial_y f(x,g(x))}\partial_x f(x,g(x)), \quad x \in A. \tag{11.14}$$

定理 11.4.7 の証明は少し長いので後回し（11.5 節）にするが、(11.14) は、$g \in C^r(A \to B)$ を認めれば簡単に得られる。実際、$0 = f(x,g(x))$ の両辺を微分すると、

$$0 = \partial_x \left(f(x,g(x))\right) \stackrel{\text{連鎖律}}{=} \partial_x f(x,g(x)) + \partial_y f(x,g(x))g'(x).$$

上式両辺を $\partial_y f(x,g(x)) (\neq 0)$ で割り (11.14) を得る。

以下、例と問で定理 11.4.7 の使い方を練習する。

例 11.4.8 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対し $f(x,y) = y^5 - 4xy + 2$ とすると、$\partial_y f(x,y) = 5y^4 - 4x$. 今、$f(1,y) = y^5 - 4y + 2$ は奇数次の多項式だから実数解を持つ。その一つを s とすると、

$$f(1,s) = 0, \quad \partial_y f(1,s) = 5s^4 - 4 \neq 0.$$

（第 2 式は $f(1, \pm(4/5)^{1/4}) \neq 0$ と第 1 式の比較による。）故に、単独陰関数定理（定理 11.4.7）より、$f(x,y)=0$ を y について解いた陰関数 $g \in C^\infty(A \to B)$ (A,B はそれぞれ 1,s を含む開区間) で次のようなものが存在する：

$$x \in A \text{ なら } \partial_y f(x,g(x)) = 5g(x)^4 - 4x \neq 0,$$

$$g'(x) \stackrel{(11.14)}{=} -\frac{\partial_x f(x,g(x))}{\partial_y f(x,g(x))} = -\frac{4g(x)}{5g(x)^4 - 4x}, \quad x \in A.$$

以上より、$f(x,y)=0$ を $x=1$ の近傍で y について解けて、解は x について C^∞ である。一方、ガロア理論によれば、方程式 $f(1,y)=0$ は代数的に、即ち四則演算と巾根によっては解けない[74]。

問 11.4.5 レムニスケイト (問 11.4.3 参照) 上の点 (x,y) $(y \neq 0)$ で y を x の陰関数として表すとき、$y' = -\frac{x(x^2+y^2-1)}{y(x^2+y^2-1)}$ となることを (11.14) を用いて示せ。

問 11.4.6 ($\star$) カーディオイド (問 11.4.4 参照) 上の点 (x,y)（$y \neq 0, (x,y) \neq (-1/4, \pm\sqrt{3}/4)$）について以下を示せ：(i) $y(2x^2+2y^2-2x-1) \neq 0$. (ii)y を x の陰関数として表すとき、$y' = -\frac{(x^2+y^2-x)(2x-1)-x}{y(2x^2+2y^2-2x-1)}$.

問 11.4.7 以下の $f(x,y,z)$ に対し、$f(a,b,c)=0$ なら、$f(x,y,z)=0$ を z について解いた陰関数 $z: V \to W$ （V は (a,b) の開近傍, W は c を含む開区間）が存在することを示せ。また、z_x, z_y を求めよ：(i) $f(x,y,z) = e^{xy} + e^{yz} + e^{zx} - e^{xyz}$, $(x,y,z \in \mathbb{R}$, $be^{bc} + ae^{ca} \neq abe^{abc})$. (ii) $f(x,y,z) = x^y - y^z$, $(x,y > 0)$.

[74] $f(1,y)$ の増減を調べることにより、$f(1,y)=0$ がちょうど三つの実根、従って二つの虚根を持つことが分かる。これと、方程式の既約性から $f(1,y)=0$ のガロア群が 5 次対称群と同型になる (従って可解でない) ことが分かる。

単独陰関数定理を更に一般化して次の定理が成立する（記法は (11.11) に従う）:

定理 11.4.9 (**連立陰関数定理**) $D \subset \mathbb{R}^{d+m}$ を開集合、$f \in C^r(D \to \mathbb{R}^m)$ $(r \geq 1)$ とする。

(a) $c = (a,b) \in D$, $f(a,b) = 0$, $\det \partial_y f(a,b) \neq 0$ なら、$\mathbb{R}^d$ の開集合 $A \ni a$, $\mathbb{R}^m$ の開集合 $B \ni b$, 及び $f(x,y) = 0$ を y について解いた陰関数 $g : A \to B$ で、次をみたすものが存在する:

$$x \in A \text{ なら } \det \partial_y f(x, g(x)) \neq 0 \tag{11.15}$$

(b) $f(x,y) = 0$ を y について解いた陰関数 $g : A \to B$ （$A \subset \mathbb{R}^d$ は開集合、$B \subset \mathbb{R}^m$）が (11.15) を満たすなら、$g \in C^r(A \to B)$ かつ[75]

$$g'(x) = -\partial_y f(x, g(x))^{-1} \partial_x f(x, g(x)), \;\; x \in A. \tag{11.16}$$

定理 11.4.9 の証明も 11.5 節で与えるが、(11.16) が、$g \in C^r(A \to B)$ を認めさえすれば簡単に得られることは、(11.14) の場合と同様である。

問 11.4.8 定理 11.4.7 後に述べた (11.14) の導出方法にならい、$g \in C^r(A \to B)$ を認めて (11.16) を示せ。

次に定理 11.4.9 の使い方を練習する。

例 11.4.10 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ に対し $f(x,y,z) = \binom{x+y+z}{xy+yz+zx}$ とする。

$$\partial_{(y,z)} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x+z & x+y \end{pmatrix} \quad \det \partial_{(y,z)} f = y - z.$$

よって、$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $f(a,b,c) = 0$ かつ $b \neq c$ なら連立陰関数定理（定理 11.4.9）より、$f(x,y,z) = 0$ を (y,z) について解いた陰関数 $g \in C^\infty(A \to B)$ （$A \subset \mathbb{R}$ は a を含む開集合、$B \subset \mathbb{R}^2$ は (b,c) を含む開集合）が存在する。また、$\partial_x f = \binom{1}{y+z}$ より $x \in A$, $(y,z) = g(x)$ に対し

$$\begin{aligned} g'(x) &\stackrel{(11.16)}{=} -\partial_{(y,z)} f(x,y,z)^{-1} \partial_x f(x,y,z) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x+z & x+y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ y+z \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{y-z} \begin{pmatrix} x+y & -1 \\ -x-z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y+z \end{pmatrix} = \frac{-1}{y-z} \begin{pmatrix} x-z \\ y-x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

問 11.4.9 $j = 1,..,d$ $(d \geq 3)$ に対し $f_j, g_j \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, $f_j(0) = g_j(0) = 0$, $f_1'(0)g_2'(0) \neq f_2'(0)g_1'(0)$ とする。このとき、$0 \in \mathbb{R}^{d-2}$ の開近傍 A 及び $h_1, h_2 \in C^1(A \to \mathbb{R})$ で、A 上で次を満たすものが存在することを示せ：

$$f_1 \circ h_1 + f_2 \circ h_2 + \sum_{j=3}^{d} f_j = g_1 \circ h_1 + g_2 \circ h_2 + \sum_{j=3}^{d} g_j = 0$$

[75](11.16) 右辺は $-\partial_y f(x, g(x))^{-1} \in \mathbb{R}^{m,m}$ と $\partial_x f(x, g(x)) \in \mathbb{R}^{m,d}$ の積。

11.5 (⋆) 逆関数定理・陰関数定理の証明

定理 11.4.7, 定理 11.4.9, 定理 11.4.1 の順に示す。

定理 11.4.7 の証明：(a): 必要なら $-f$ を考えることにより $f_y(a,b) > 0$ と仮定してよい。f_y は連続なので a の開近傍 A_0, b を含む開区間 B_0 であり、次のようなものが存在する:

(1) $A_0 \times B_0 \subset D$, $A_0 \times B_0$ 上 $f_y > 0$

今、$B \ni y \mapsto f(a,y)$ は狭義 $\nearrow$ かつ $f(a,b) = 0$. 従って次のような $b_\pm \in B_0$ が存在する：

$$b_- < b < b_+, \quad f(a,b_-) < 0 < f(a,b_+).$$

すると、f の連続性から a の開近傍 $A \subset A_0$ を

(2) $x \in A$ なら $f(x,b_-) < 0 < f(x,b_+)$

となるようにとることができる。更に $B = (b_-, b_+)$ とすると、(1) より $A \times B \subset D$ かつ

(3) $x \in A$ なら $B \ni y \mapsto f(x,y)$ は狭義 $\nearrow$.

また、(2),(3) と、中間値定理（定理 2.3.4）より

$$\forall x \in A, \ \exists 1 y \in B, \ f(x,y) = 0.$$

この y を $g(x)$ とおけば、(11.12) が成立する。更に (1) より (11.13) も成立する。
(b): まず、$g \in C(A \to B)$ を示す。そのため $x_0 \in A$ と $\varepsilon > 0$ を任意に固定して、次のような $\delta > 0$ の存在を言えばよい:

(4) $x \in B(x_0,\delta)$ なら $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

以後、簡単の為 $y_0 = g(x_0)$ とおく。 $f_y(x_0,y_0) \neq 0$ だが、以下、$f_y(x_0,y_0) > 0$ の場合を考える（$f_y(x_0,y_0) < 0$ でも同様）。このとき、次のような $\delta_0 > 0$, $\varepsilon_0 \in (0,\varepsilon)$ が存在する：

$$y_0 \pm \varepsilon_0 \in B$$
$$x \in B(x_0,\delta_0),\ y \in [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0] \text{ なら } f_y(x,y) > 0$$

このとき、$[y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0] \ni y \mapsto f(x_0,y)$ の単調性から、

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0 < f(x_0, y_0 + \varepsilon_0).$$

これと、f の連続性から、次のような $\delta \in (0,\delta_0)$ が存在する：

$$x \in B(x_0,\delta) \text{ なら } f(x, y_0 - \varepsilon_0) < 0 < f(x, y_0 + \varepsilon_0)$$

これと、$f(x,g(x)) = 0$, 及び $[y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0] \ni y \mapsto f(x,y)$ の単調性から、

$$y_0 - \varepsilon_0 < g(x) < y_0 + \varepsilon_0, \text{ 従って (4) が成立する。}$$

次に $g \in C^r(A \to B)$ と (11.16) を示す。$x \in A$ を任意、$h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ の絶対値は十分小とする。また、$\delta_j = (\delta_{ij})_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$, $k_j = g(x + h\delta_j) - g(x)$ とする。このとき、$\varphi(t) = f(x + th\delta_j, g(x) + tk_j)$ とおくと、$\varphi \in C^1([0,1])$, $\varphi(0) = f(x, g(x)) = 0$, $\varphi(1) = f(x + \delta_j, g(x + \delta_j)) = 0$. したがって平均値定理（定理 5.4.1）より、次のような $t \in (0,1)$ が存在する：

$$0 = \varphi'(t) = h\partial_{x_j} f(x + th\delta_j, g(x) + tk_j) + k_j \partial_y f(x + th\delta_j, g(x) + tk_j).$$

よって、

(5)
$$\frac{g(x + h\delta_j) - g(x)}{h} = \frac{k_j}{h} = -\frac{\partial_{x_j} f(x + th\delta_j, g(x) + tk_j)}{\partial_y f(x + th\delta_j, g(x) + tk_j)}.$$

$h \to 0$ とするとき、g の連続性（既に示した）から $k_j \to 0$. これと $\partial_x f$, $\partial_y f$ の連続性から

(6)
$$\text{(5) の右辺} \longrightarrow -\frac{\partial_{x_j} f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}, \quad \text{即ち} \quad \partial_{x_j} g(x) = -\frac{\partial_{x_j} f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}.$$

以上から、$\partial_{x_j} g$ $(j = 1, ..d)$ が全て存在し $C^{r-1}(A \to B)$ に属する、従って $g \in C^r(A \to B)$. また、(6) より (11.14) も分かる。 □

定理 11.4.9 の証明: (a): 定理 11.4.7 より $m = 1$ の場合は正しい。そこで $m > 1$ とし、$m - 1$ まで正しいとする。$\det \partial_y f(a, b) \neq 0$ だから、$\partial_y f(a, b)$ の第 m 行の成分 $\partial_{y_j} f_m(a, b)$ $(j = 1, .., m)$ のどれかは $\neq 0$. どの成分が $\neq 0$ でも以下の議論は同じだが、記号を見やすくするため

(1) $\partial_{y_m} f_m(a, b) \neq 0$

と仮定する。また、$y = (y_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ に対し $\widehat{y} = (y_j)_{j=1}^{m-1}$ とする。同様に $\mathbb{R}^m$-値の関数 f に対し $\widehat{f} = (f_j)_{j=1}^{m-1}$ ($\mathbb{R}^{m-1}$-値関数) とする。定理 11.4.7 と (1) より、$f(x, y) = 0$ を y_m について解いた陰関数 $h \in C^r(W \to B_m)$ （W は $(a, \widehat{b})$ の開近傍, B_m は b_m を含む開区間）が存在する。そこで関数 $F : W \to \mathbb{R}^{m-1}$ を

$$F(x, \widehat{y}) = \widehat{f}(x, \widehat{y}, h(x, \widehat{y}))$$

と定めると、

$$F(a, \widehat{b}) = 0, \quad \det \partial_{\widehat{y}} F(a, \widehat{b}) \neq 0.$$

(第 1 式は明らか、第 2 式はの証明は後回しにする：補題 11.5.1 参照) 帰納法の仮定より、$F(x, \widehat{y}) = 0$ を $\widehat{y}$ について解いた陰関数 $G \in C^r(A \to \widehat{B})$ （A は a の開近傍, $\widehat{B}$ は $\widehat{b}$ の開近傍）が存在する。そこで、$B = \widehat{B} \times B_m$, $g \in C^r(A \to B)$ を

$$g(x) = (G(x), h(x, G(x)))$$

と定める。このとき、

$$A \times B = A \times \widehat{B} \times B_m \subset W \times B_m \subset D.$$

また、$(x,y)\in A\times B$, 即ち $(x,\widehat{y},y_m)\in A\times\widehat{B}\times B_m$ に対し

$$\begin{array}{l} \widehat{f}(x,y)=0, \\ f_m(x,y)=0 \end{array} \overset{h\text{ の定義}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} \widehat{f}(x,y)=0, \\ y_m=h(x,\widehat{y}) \end{array} \overset{F\text{ の定義}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} F(x,\widehat{y})=0, \\ y_m=h(x,\widehat{y}) \end{array} \overset{G\text{ の定義}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} \widehat{y}=G(x), \\ y_m=h(x,\widehat{y}) \end{array}.$$

従って、$f(x,y)=0 \iff y=g(x)$. 以上より、g は $f(x,y)=0$ を y について解いた陰関数である。また $\det\partial_y f(a,g(a))\neq 0$ より、A を十分小さくとれば (11.15) が成立する。

(b): 任意の $a_0\in A$ に対し、$f(a_0,g(a_0))=0$ かつ $\det\partial_y f(a_0,g(a_0))=0$. よって (a) より $f(x,y)=0$ を y について解いた陰関数 $g_0\in C^r(A_0\to B_0)$ (A_0 は a_0 の開近傍、B_0 は $g(a_0)$ の開近傍) が存在する。ところが、陰関数は (11.12) の意味で一意的だから $x\in A\cap A_0$ に対し $g(x)=g_0(x)$. a_0 は任意だったから $g\in C^r(A\to B)$ である。また、$0=f(x,g(x))$ を微分して

$$0=(f(x,g(x)))'=\partial_x f(x,g(x))+\partial_y f(x,g(x))g(x)'.$$

両辺の左側から $\partial_y f(x,g(x))'$ を乗じて (11.16) を得る。 □

補題 11.5.1 記号は定理 11.4.9 の証明の通りとするとき、

$$\det\partial_y f(a,b)=\partial_{y_m}f_m(a,b)\det\partial_{\widehat{y}}F(a,\widehat{b}),\quad \text{特に、}\det\partial_{\widehat{y}}F(a,\widehat{b})\neq 0.$$

証明： 以下、$\partial_y f,\partial_y f_m$ は (a,b) での値, $\partial_{\widehat{y}}F$, $\partial_{\widehat{y}}h$ は $(a,\widehat{b})$ での値を考えるものとし、それらを省略して記す。$\partial_{\widehat{y}}F\in\mathbb{R}^{m-1,m-1}$ の第 j 列ベクトルは、連鎖律（命題 11.1.7）より

$$\partial_{y_j}F=v_j+\lambda_j v_m,\quad \text{但し } v_j=\partial_{y_j}\widehat{f},\ \lambda_j=\partial_{y_j}h.$$

故に、行列式の多重線形性より

(1) $\displaystyle \det\partial_{\widehat{y}}F=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le m-1}\det V_{j_1,\ldots,j_k},$

但し、$V_{j_1,\ldots,j_k}$ は行列 $V=(v_1,\ldots,v_{m-1})$ の $v_{j_1},..,v_{j_k}$ をそれぞれ $\lambda_{j_1}v_m,..,\lambda_{j_k}v_m$ におきかえて得られる行列である。$k\ge 2$ なら、$V_{j_1,\ldots,j_k}$ の二つ以上の列ベクトルが平行だから、その行列式は 0. 従って、

$$\begin{aligned}\det\partial_{\widehat{y}}F &= \det V+\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j\det(v_1,\ldots,\overbrace{v_m}^{j\text{ 列}},\ldots,v_{m-1}) \\ &= \det V+\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j(-1)^{m+j-1}\det(v_1,\ldots v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_m)\end{aligned}$$

λ_j の定義と (11.14) から $\lambda_j\partial_{y_m}f_m=-\partial_{y_j}f_m$. よって

$$\partial_{y_m}f_m\det\partial_{\widehat{y}}F=\partial_{y_m}f_m\det V+\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{m+j}\partial_{y_j}f_m\det(v_1,\ldots v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_m).$$

上式右辺は $\det\partial_y f$ を第 m 行について余因子展開した式である。 □

定理 11.4.1 の証明： $F \in C^r(\mathbb{R}^d \times D \to \mathbb{R}^d)$ を $F(y,x) = -y + g(x)$ と定める。
(a):$\partial_x F(y,x) = g'(x)$ より、

$$F(b,a) = 0, \ \ \det \partial_x F(b,a) = \det g'(a) \neq 0.$$

従って、連立陰関数定理（定理 11.4.9）より $F(y,x) = 0$ を x について解いた陰関数 $h \in C^r(B \to A)$ （B は b の開近傍、A は a の開近傍、$A \subset D$）であり、

$$y \in B \text{ なら } \det \partial_x F(y, h(y)) = \det g'(h(y)) \neq 0$$

（即ち (11.8)）を満たすものが存在する。$h : B \to A$ が $F(y,x) = 0$ を x について解いた陰関数であることから、

$$(y,x) \in B \times A \text{ に対し } y = g(x) \ \Leftrightarrow \ h(y) = x.$$

（即ち (11.7)）が成立する。
(b): (a) の証明と同じように考えると、$h : B \to A$ が (11.7),(11.8) を満たすことは、h が $F(y,x) = 0$ を x について解いた陰関数 $h : B \to A$ で、連立陰関数定理（定理 11.4.9）の (11.15) に相当する条件を満たす事である。従って、連立陰関数定理（定理 11.4.9）(b) より $h \in C^r(B \to A)$. また、$y \in B$, $x = h(y)$, $f \in C^1(A \to \mathbb{R}^k)$ とするとき

$$f'(x) = (f \circ h \circ g)'(x) \overset{\text{連鎖律}}{=} (f \circ h)'(y) g'(x).$$

両辺の左側から $g'(x)^{-1}$ を乗じて (11.9) を得る。 $\square$

12　多変数関数の積分計算

7 章で、有界区間 $I \subset \mathbb{R}^d$ 上の有界な関数 f の積分 $\int_I f$ を定義したが、ここでは $d \geq 2$ の場合の具体的計算法について述べる。特に重要なのが、逐次積分と積分の変数変換である。また、諸科学への応用の面からも区間上の積分だけでなく、より一般な集合上の積分や、広義積分の多変数版も必要なのでそれらについても述べる。

12.1　体積確定集合

7 章で、有界区間 $I \subset \mathbb{R}^d$ 上の有界な関数 f の積分 $\int_I f$ の定義と一般的性質を述べた。ここではそれらを、より一般的な有界集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ 上での積分 $\int_A f$ にまで拡張する。

定義 12.1.1 (**有界集合上の積分**) $A \subset \mathbb{R}^d$, $f : A \to \mathbb{R}$ とする。

- $f_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $x \in A$, $x \notin A$ に応じ $f_A(x) = f(x), 0$ と定める。特に、$1_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $x \in A$, $x \notin A$ に応じ $1_A(x) = 1, 0$ と定める。

- A は有界かつ、有界区間 $I \subset \mathbb{R}^d$ が

$$A \subset I \text{ かつ } f_A \in \mathscr{R}(I) \tag{12.1}$$

を満たすとき、f は A **上可積分**であるといい、積分 $\int_A f$ を次のように定める：

$$\int_A f = \int_I f_A \tag{12.2}$$

A, $f : A \to \mathbb{R}$, が与えられたとき、積分 (12.2) が、(12.1) を満たす有界区間 I の選び方に依らず定まることは、次に述べる 補題 12.1.2 が保証する。

- A は有界かつ、$f \equiv 1$ が A 上可積分なとき、A は d 次元**体積確定**であるといい、

$$\mathrm{vol}(A) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_A 1$$

を A の d 次元**体積**と言う。1 次元体積は**長さ**、2 次元体積は**面積**と呼ぶこともある。

補題 12.1.2 $I, J \subset \mathbb{R}^d$ は有界区間、$f : I \cup J \to \mathbb{R}$, $x \notin I \cap J$ なら $f(x) = 0$ とする。このとき、

$$f \in \mathscr{R}(I) \text{ なら } f \in \mathscr{R}(J) \text{ かつ } \textstyle\int_I f = \int_J f.$$

次の命題はやや高度な内容だが、集合 A が体積確定か否かの判定条件を与え、リーマン積分の理論上は基本的である。

命題 12.1.3 (**有界体積確定集合の特徴づけ**) $A \subset \mathbb{R}^d$ が有界とする。このとき、以下の命題について (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) が成立する：

(a) A は体積確定である。

(b) A の境界 $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ は体積零である。

(c) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し有限個の開区間の非交差和として表せる集合 A_0,A_1 で次を満たすものが存在する：

$$A_0 \subset A \subset A_1, \quad \mathrm{vol}(A_1 \setminus A_0) < \varepsilon.$$

具体的な応用に現れる体積確定集合は次の形をしていることが多い：

例 12.1.4 (**縦線集合**) $I \subset \mathbb{R}^d$, $J \subset \mathbb{R}$ を有界区間、$h_1, h_2 \in C_{\mathrm{b}}(I \to J)$, I 上、$h_1 \le h_2$ とする。このとき、集合

$$A = \{(x,y) \in I \times J \; ; \; h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$$

は体積確定である（上のように書ける集合を **縦線集合**という)。

証明：一般に有界集合 A の境界が体積 0 なら A は体積確定である（命題 12.1.3)。今の場合 A の境界は区間 $I \times J$ の境界と $\cup_{j=1,2}\{(x, h_j(x)) \; ; \; x \in I\}$ の和に含まれるから、A の境界が体積が 0 であることは（直感的には）明らかである。厳密な議論は [杉浦, I, 271 頁] を参照せよ。 $\square$

次の命題は積分の「区間加法性」（命題 7.3.5）を一般化したものである：

命題 12.1.5 (**積分範囲についての加法性**) $A, B \subset \mathbb{R}^d$ は有界かつ体積確定とする。

(a) $A \cup B$, $A \cap B$ は体積確定かつ

$$\mathrm{vol}(A \cup B) + \mathrm{vol}(A \cap B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B).$$

(b) 有界関数 $f : A \subset B \to \mathbb{R}$ が A, B それぞれの上で可積分なら、$A \cup B$, $A \cap B$ 上でも可積分かつ、

$$\int_{A\cup B} f + \int_{A\cap B} f = \int_A f + \int_B f. \tag{12.3}$$

特に、$\mathrm{vol}(A \cap B) = 0$ なら

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f. \tag{12.4}$$

(c) A が体積 0 なら任意の有界関数 $f : A \to \mathbb{R}$ は A 上可積分かつ $\int_A f = 0$.

以下、12.1 節で述べた命題・補題を証明する。

補題 12.1.2 の証明：I, J それぞれの区間分割 Δ_1, Δ_2 を $I \cap J$ を含むようにとる。まず Δ_1 について考える。区間加法性（命題 7.3.5）より $\forall D \in \Delta_1$ に対し $f \in \mathscr{R}(D)$. また、$D \in \Delta_1 \backslash \{I \cap J\}$ なら D 上 $f \equiv 0$ だから $\int_D f = 0$. よって

$$\int_I f = \sum_{D\in\Delta_1} \int_D f = \int_{I\cap J} f.$$

一方、$D \in \Delta_2$ に対し $D = I \cap J$ なら $D \in \Delta_1$ より $f \in \mathscr{R}(D)$. また、$D \neq I \cap J$ なら D 上 $f \equiv 0$ だから $f \in \mathscr{R}(D)$ かつ $\int_D f = 0$. よって区間加法性（命題 7.3.5）より $f \in \mathscr{R}(J)$ かつ

$$\int_J f = \sum_{D\in\Delta_2} \int_D f = \int_{I\cap J} f.$$

以上より補題が示された。 $\square$

命題 12.1.3 の証明：(a) $\Leftrightarrow$ (b): 7 章の記号を用いる。$\overline{A} \subset I$ を満たす有界な開区間 I, および I の区間分割 Δ を、すべての $D \in \Delta$ が空でない開区間となるようにとる。このとき、

(1) $\partial A \cap D = \emptyset \iff D \subset A^\circ$ または $D \cap \overline{A} = \emptyset$.

(D が連結であることを用いた) 従って、

$$\underset{D}{\mathrm{ocs}}\,(1_A) = \sup_D(1_{\partial A}) = \begin{cases} 0, & \partial A \cap D = \emptyset, \\ 1, & \partial A \cap D \neq \emptyset. \end{cases}$$

故に

(2) $$r_I(1_A, \Delta) = \overline{s}_I(1_{\partial A}, \Delta) = \sum_{\substack{D \in \Delta \\ \partial A \cap D \neq \emptyset}} |D|.$$

A が体積確定なら $\mathrm{m}(\Delta) \to 0$ で、(2) の左辺が（従って右辺も）0 に収束する。よってダルブーの可積分条件 (定理 7.2.3）より ∂A は体積零である。一方、∂A は体積零なら、$\mathrm{m}(\Delta) \to 0$ で、(2) の右辺が（従って左辺も）0 に収束する。よってダルブーの可積分条件 (定理 7.2.3）より A は体積確定である。
(b) $\Leftrightarrow$ (c):記号は上の通りとし、更に

$$A_0 = \bigcup_{\substack{D \in \Delta \\ D \subset A^\circ}} D, \quad A_1 = \bigcup_{\substack{D \in \Delta \\ \overline{A} \cap D \neq \emptyset}} D$$

とする。明らかに $A_0 \subset A \subset A_1$. また、

$$v(A_1 \backslash A_0) \stackrel{(1)}{=} \sum_{\substack{D \in \Delta \\ \partial A \cap D \neq \emptyset}} |D|.$$

「(a) $\Leftrightarrow$ (b)」の証明から分かるように、(b) を仮定し、$\mathrm{m}(\Delta)$ を十分小さくすれば、上式右辺 $< \varepsilon$ とできる。 □

命題 12.1.5 の証明：I を $A \cup B \subset I$ を満たす区間、Δ をその分割とする。(c),(b),(a) の順に示す。
(c): 仮定より $-C1_A \leq f_A \leq C1_A$ を満たす定数 C が存在する。従って、分割 Δ に関する不足和・過剰和について

$$-C\underline{s}_I(1_A, \Delta) \leq \underline{s}_I(f_A, \Delta) \leq \overline{s}_I(f_A, \Delta) \leq C\overline{s}_I(1_A, \Delta).$$

$\mathrm{m}(\Delta) \to 0$ のとき、上式両端が共に 0 に収束。従って、$\underline{s}_I(f_A, \Delta) \to 0$, $\overline{s}_I(f_A, \Delta) \to 0$.
(b): 仮定より $f_A, 1_B \in \mathscr{R}(I)$. よって $f_{A\cap B} = f_A 1_B \in \mathscr{R}(I)$（命題 7.3.3)、すなわち f は $A \cap B$ 上可積分。また、

$$f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_{A\cap B}$$

より、f は $A \cup B$ 上可積分。上式を I 上積分し積分の線形性（命題 7.1.7）を用いれば (12.3) を得る。また、$\mathrm{vol}(A \cap B) = 0$ なら (c) より $\int_{A\cap B} f = 0$. よってこのとき、(12.3) から (12.4) を得る。
(a):(b) の特別な場合（$f \equiv 1$） □

12.2　逐次積分

$I_1, I_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ をそれぞれ有界区間、$I = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$ とする。このとき、積分 $\int_I f$ はこのままでは、計算のしようがない。だが、実は適当な条件のもとで、$\int_I f$ を

$$\int_{I_1} dx \int_{I_2} f(x,y)dy \quad \text{または} \quad \int_{I_2} dy \int_{I_1} f(x,y)dx$$

と書き直すことができる（これを**逐次積分**と言う）。ここで、前者は $f(x,y)$ を先に $y \in I_2$ について積分して得られた関数 $x \mapsto \int_{I_2} f(x,y)dy$ を、今度は $x \in I_1$ について積分したものである。また、後者は $f(x,y)$ を先に $x \in I_1$ について積分して得られた関数 $y \mapsto \int_{I_1} f(x,y)dx$ を、今度は $y \in I_2$ について積分したものである。こうすると、$\int_I f$ を一変数についての積分の繰り返しで表せ、それぞれの段階で一変数についての積分が計算できれば $\int_I f$ 自体も求まることになる。

逐次積分をもう少し一般的に述べよう。

定理 12.2.1 （**逐次積分**）$I_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $I_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ を共に有界区間、$I = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^d$ とする ($d = d_1 + d_2$)。$f \in \mathscr{R}(I)$ について以下の条件を考える（その際、I の点は (x,y) ($x \in I_1$, $y \in I_2$) と書けるので、$f : I \to \mathbb{R}$ も $f(x,y)$ と表示する）：

(a1) 全ての $x \in I_1$ に対し $I_2 \ni y \mapsto f(x,y)$ が $\mathscr{R}(I_2)$ に属し、従って

$$F_1(x) = \int_{I_2} f(x,y)dy$$

が定義される。

(a2) 全ての $y \in I_2$ に対し $I_1 \ni x \mapsto f(x,y)$ が $\mathscr{R}(I_1)$ に属し、従って

$$F_2(y) = \int_{I_1} f(x,y)dx$$

が定義される。

仮定 (a1) のもとで $F_1 \in \mathscr{R}(I_1)$ かつ

$$\int_I f = \int_{I_1} dx \int_{I_2} f(x,y)dy. \tag{12.5}$$

また、仮定 (a1),(a2) のもとで $F_1 \in \mathscr{R}(I_1)$, $F_2 \in \mathscr{R}(I_2)$ かつ

$$\int_I f = \int_{I_1} dx \int_{I_2} f(x,y)dy = \int_{I_2} dy \int_{I_1} f(x,y)dx. \tag{12.6}$$

注 1： 例えば $f \in C_{\mathrm{b}}(I)$ なら 定理 12.2.1 の条件は全て満たされ (12.6) が成立する。

注 2： ルベーグ積分論のフビニの定理（[吉田 1, 101 頁]）によれば、$f \in \mathscr{R}(I)$ でありさえすれば F_1, F_2 が（ルベーグ可積分関数として）定義され、(12.6) が成立する。その意味で、定理 12.2.1 において (a1),(a2) は本来不必要な仮定である。一方、全く無条件では多変数関数の積分順序を交換できない（問 12.2.4 参照）。

系 12.2.2 記号は 定理 12.2.1 の通り、$f_1 \in \mathscr{R}(I_1)$, $f_2 \in \mathscr{R}(I_2)$, $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ とする。このとき、$f \in \mathscr{R}(I)$ かつ

$$\int_I f = \int_{I_1} f_1 \int_{I_2} f_2.$$

例 12.2.3 次の (やや人工的な？) 積分を求めよう：

$$\int_{(0,1]^2} f(x,y)dxdy, \quad 但し\ f(x,y) = \begin{cases} y\cos\left(\frac{\pi y^2}{2x^2}\right) & y \le x\ のとき, \\ 0 & y > x\ のとき. \end{cases}$$

$f : (0,1]^2 \to \mathbb{R}$ は有界かつ連続だから 定理 12.2.1 の条件を満たす。また、

$$\int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^x y\cos\left(\frac{\pi y^2}{2x^2}\right)dy = \frac{x^2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi y^2}{2x^2}\right)\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^2}{\pi}.$$

よって逐次積分より

$$\int_{(0,1]^2} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy = \frac{1}{\pi}\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3\pi}.$$

□

問 12.2.1 $I = [0,a]\times[0,b]$ とする。次の各場合に $\int_I f$ を求めよ：(i) $f(x,y) = x^2e^{xy}$. (ii) $f(x,y) = x^2ye^{xy^2}$.

問 12.2.2 $0 \le a < b < \infty$, $p > 0$ とする。以下の各場合に $\int_{[a,b]^2}(x+y+1)^{-p}dxdy$ を求めよ：(i) $p=1$. (ii) $p=2$. (iii) $p \ne 1,2$. (問 12.2.3 を使ってもできるが、逐次積分で直接計算する方が計算する楽しみが味わえる。)

問 12.2.3 $I = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(I)$ に対し次を示せ：
$\int_I \partial_1\partial_2 f = f(b_1,b_2) - f(b_1,a_2) - f(a_1,b_2) + f(a_1,a_2)$

問 12.2.4 ($\star$) $x,y \in (0,1]$ に対し $f(x,y) = \begin{cases} y^{-2}, & x \le y, \\ -x^{-2}, & y < x \end{cases}$ とするとき、次を示せ: $\int_0^1 f(x,y)dx = 1$, $\int_0^1 f(x,y)dy = -1$, 従って $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx = 1$, $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy = -1$.

命題 12.2.4 (**断面による逐次積分**) $I_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $I_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ を共に有界区間、$A \subset I \stackrel{\text{def}}{=} I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^d$ $(d = d_1+d_2)$ とする。更に $A \subset \mathbb{R}^d$ は d 次元体積確定かつ全ての $x \in I_1$ に対し

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^{d_2}\ ;\ (x,y) \in A\}$$

が d_2 次元体積確定（A_x を A の x による**断面**という）、$f \in C_{\mathrm{b}}(I \to \mathbb{R})$ とする。このとき、

(a) $x \in I_1$ に対し $I_2 \ni y \mapsto f(x,y)$ は A_x 上可積分であり、従って

$$F_1(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{A_x} f(x,y)dy$$

が定義される。

(b) 更に $F_1 \in \mathscr{R}(I_1)$ かつ

$$\int_A f = \int_{I_1} dx\int_{A_x} f(x,y)dy. \tag{12.7}$$

注： 命題 12.2.4 で $d_2 = 1$ かつ

$$A = \{(x, y) \in I\ ;\ h_1(x) \le y \le h_2(y)\}$$

（但し $h_1, h_2 \in C(I_1 \to I_2)$, $h_1 \le h_2$）の場合、A は縦線集合（例 12.1.4）だから体積確定、また $A_x = [h_1(x), h_2(x)]$ より (12.7) は次のように書ける：

$$\int_A f = \int_{I_1} dx \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy. \tag{12.8}$$

例 12.2.5 $a, b, p > 0$ に対し $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \left|\frac{x}{a}\right|^p + \left|\frac{y}{b}\right|^p \le 1\right\}$ の面積を求める。$p = 2$ のとき A は楕円、$p = 2/3$, $a = b$ のときの A を**アステロイド** (asteriod) という。

$h(x) = b\left(1 - \left|\frac{x}{a}\right|^p\right)^{1/p}$ とすると $A = \{(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]\ ;\ |y| \le h(x)\}$. よって 例 12.1.4 より A は面積確定で面積は

$$\begin{aligned}\int_A dxdy &\overset{(12.8)}{=} \int_{-a}^{a} dx \int_{-h(x)}^{h(x)} dy = 2\int_{-a}^{a} h(x)dx = 2ab\int_0^1 (1 - x^p)^{1/p}\, dx \\ &\overset{\text{変数変換}}{=} \frac{4ab}{p} \underbrace{\int_0^1 (1 - x)^{1/p}\, x^{\frac{1}{p}-1} dx}_{B\left(\frac{1}{p}+1, \frac{1}{p}\right)} \overset{(9.17)}{=} \frac{2ab}{p} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right).\end{aligned}$$

但し $B(u, v)$ はベータ関数である（命題 9.4.2)。特に $p = 2$ なら $B(1/2, 1/2) = \pi$ より、上の積分は $ab\pi$. □

例 12.2.6 $a, b, c, p > 0$ に対し $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ \left|\frac{x}{a}\right|^p + \left|\frac{y}{b}\right|^p + \left|\frac{z}{c}\right|^p \le 1\right\}$ の体積を求める ($p = 2$ のとき A は楕円体を表す)。

$A = \left\{(x, y, z) \in [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]\ ;\ |z| \le c(1 - \left|\frac{x}{a}\right|^p - \left|\frac{y}{b}\right|^p)^{1/p}\right\}$. よって 例 12.1.4 より A は体積確定。また、$h(z) = \left(1 - \left|\frac{z}{c}\right|^p\right)^{1/p}$ ($|z| \le c$) とおくと、A の z による断面 A_z は

$$A_z = \begin{cases} \{(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]\ ;\ \left|\frac{x}{ah(z)}\right|^p + \left|\frac{y}{bh(z)}\right|^p \le 1\}, & |z| < c, \\ \emptyset, & z = \pm c \end{cases}.$$

これと例 12.2.5 より A_z は面積確定で、

$$\int_{A_z} dxdy = \frac{2abh(z)^2}{p} B\left(1/p, 1/p\right).$$

よって断面による逐次積分（命題 12.2.4）より A の体積は

$$\int_A dxdydz = \int_{-c}^{c} dz \int_{A_z} dxdy = \frac{2ab}{p} B\left(1/p, 1/p\right) \int_{-c}^{c} h(z)^2 dz.$$

例 12.2.5 と同様の計算より

$$\int_{-c}^{c} h(z)^2 dz = \frac{4c}{3p} B\left(1/p, 2/p\right).$$

以上と $B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$(命題 9.4.3) より

$$\int_A dxdydz = \frac{8abc}{p^3} B\left(1/p, 1/p\right) B\left(1/p, 2/p\right) = \frac{8abc}{3p^2} \frac{\Gamma\left(1/p\right)^3}{\Gamma\left(3/p\right)}.$$

特に $p = 2$ なら上の積分は $\frac{4abc\pi}{3}$. □

問 12.2.5 $a, b, p, q > 0$ に対し $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \left|\frac{x}{a}\right|^p + \left|\frac{y}{b}\right|^q \le 1\right\}$ の面積を求めよ。

問 12.2.6 $A = \left\{(x,y) \in [0,\infty)^2 \,;\, \left|\frac{x}{a}\right|^2 + \left|\frac{y}{b}\right|^2 \le 1\right\}$ $(a, b > 0)$ に対し以下の積分を求めよ：(i) $\int_A x^{p-1}y^{q-1}dxdy$ $(p, q \ge 1)$. (ii) $\int_A xy(x^2+y^2+k^2)^{p-1}dxdy$ $(k \in \mathbb{R},\, p > 0)$. (iii) $\int_A xy(x^2+y^2+k^2)^{-1}dxdy$ $(k \in \mathbb{R})$.

問 12.2.7 $a, b, c, p, q, r > 0$ に対し $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \left|\frac{x}{a}\right|^p + \left|\frac{y}{b}\right|^q + \left|\frac{z}{c}\right|^r \le 1\right\}$ の体積を求めよ。

問 12.2.8 $A = \left\{(x,y,z) \in [0,\infty)^3 \,;\, \left|\frac{x}{a}\right|^2 + \left|\frac{y}{b}\right|^2 + \left|\frac{z}{c}\right|^2 \le 1\right\}$ $(a, b, c > 0)$ に対し以下の積分を求めよ：
(i) $\int_A x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}dxdydz$ $(p, q, r \ge 1)$.
(ii) $\int_A xyz(x^2+y^2+k^2)^{p-1}dxdydz$ $(p > 0,\, k \in \mathbb{R},\, a > b > c)$.
(iii) $\int_A xyz(x^2+y^2+k^2)^{-1}dxdydz$ $(k \in \mathbb{R},\, a > b > c)$.
ヒント：断面上の積分に 問 12.2.6 の結果が使える。

問 12.2.9 $a_1, ..., a_d, p > 0$ に対し $A = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,;\, \left|\frac{x_1}{a_1}\right|^p + ... + \left|\frac{x_d}{a_d}\right|^p \le 1\right\}$ の体積は

$$\frac{2^d a_1 \cdots a_d}{dp^{d-1}} \frac{\Gamma(1/p)^d}{\Gamma(d/p)}, \quad \text{特に } p = 2 \text{ なら } \quad \frac{\pi^{d/2} a_1 \cdots a_d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}$$

であることを示せ。$p = 2$ なら A は d 次元楕円体、更に $p = 2,\, a_1 = ... = a_d$ なら d 次元の球である。

以下で、本節で述べた定理・命題・系を証明する。

定理 12.2.1 の証明：Δ_1, Δ_2 をそれぞれ I_1, I_2 の区間分割とする。このとき、

$$\Delta = \{D \stackrel{\text{def.}}{=} D_1 \times D_2 \,;\, D_1 \in \Delta_1, D_2 \in \Delta_2\}$$

は I の区間分割を与える。このとき、f と F_1 の過剰和・不足和について次が成立する：

(1) $$\underline{s}_I(f,\Delta) \le \underline{s}_{I_1}(F_1,\Delta_1) \le \overline{s}_{I_1}(F_1,\Delta_1) \le \overline{s}_I(f,\Delta).$$

まず (1) を認めて定理を示す。$\mathrm{m}(\Delta_j) \to 0$ $(j = 1, 2)$ なら $\mathrm{m}(\Delta) \to 0$. ところが仮定 (a) とダルブーの可積分条件より

$$\lim_{\mathrm{m}(\Delta)\to 0} \underline{s}_I(f,\Delta) = \lim_{\mathrm{m}(\Delta)\to 0} \overline{s}_I(f,\Delta) = \int_I f.$$

これと (1) から

(2) $$\lim_{\mathrm{m}(\Delta_1)\to 0} \underline{s}_{I_1}(F_1,\Delta_1) = \lim_{\mathrm{m}(\Delta_1)\to 0} \overline{s}_{I_1}(F_1,\Delta_1) = \int_I F_1.$$

(2) とダルブーの可積分条件より $F_1 \in \mathscr{R}(I_1)$ かつ $\int_I f = \int_{I_1} F_1$, 即ち定理の結論を得る。
次に (1) を示す。$x \in D_1$ なら

$$\int_{I_2} f(x,y)dy = \sum_{D_2 \in \Delta_2} \int_{D_2} f(x,y)dy \le \sum_{D_2 \in \Delta_2} |D_2| \sup_D f.$$

よって、$\sup_{D_1} F_1 \le \sum_{D_2\in\Delta_2} |D_2| \sup_D f$. 両辺に $|D_1|$ を掛けて、$D_1 \in \Delta_1$ について加えると

$$\sum_{D_1\in\Delta_1} |D_1| \sup_{D_1} F_1 \le \sum_{D\in\Delta} |D| \sup_D f, \text{ 即ち } \overline{s}_{I_1}(F_1, \Delta_1) \le \overline{s}_I(f, \Delta).$$

全く同様に $\underline{s}_I(f, \Delta) \le \underline{s}_{I_1}(F_1, \Delta_1)$ も分かり、(1) が示せる。 □

系 12.2.2 の証明：$f \in \mathscr{R}(I)$ であることは、定理 12.2.1 の証明と同様の分割 Δ を考え、ダルブーの可積分条件を確かめれば容易に分る。すると、f は定理 12.2.1 の条件を全て満たし、(12.5) が成立。更に

$$\int_{I_2} f(x,y)dy = f_1(x) \int_{I_2} f_2.$$

よって、

$$\int_{I_1} dx \int_{I_2} f(x,y)dy = \int_{I_1} f_1 \int_{I_2} f_2.$$

以上より、所期等式を得る。 □

命題 12.2.4 の証明：$f, 1_A \in \mathscr{R}(I)$ より

(1) $f_A = f1_A \in \mathscr{R}(I)$.

また、任意の $f \in C_{\mathrm{b}}(I \to \mathbb{R})$ と $x \in I_1$ に対し $I_2 \ni y \mapsto f(x,y)$ は有界かつ連続だから I_2 上可積分。また、A_x は d_2 次元体積確定かつ $A_x \subset I_2$ だから $I_2 \ni y \mapsto 1_{A_x}(y) = 1_A(x,y)$ も I_2 上可積分。よって

(2) 任意の $x \in I_1$ に対し $I_2 \ni y \mapsto f_A(x,y) = (f1_A)(x,y)$ は $\mathscr{R}(I_2)$ に属する。

(1),(2) と逐次積分（定理 12.2.1）より

(3) $$\int_I f_A = \int_{I_1} dx \int_{I_2} f_A(x,y)dy.$$

ところが、体積確定集合上での積分の定義より

$$\int_I f_A = \int_A f, \quad \int_{I_2} f_A(x,y)dy = \int_{A_x} f(x,y)dy.$$

よって (3) より (12.7) を得る。 □

12.3 多変数関数の広義積分

多変数関数の広義積分を、まずは積分範囲が区間の場合に限って定義する（定義 12.3.1）。これは、後で述べる 定義 12.3.7 の特別な場合である。論理的にはここでいきなり 定義 12.3.7 を述べることも可能だが、定義 12.3.1 は定義 12.3.7 に比べて平易でありながら重要な例を多く含むので、教育的配慮から定義 12.3.1 を置くことにした。

定義 12.3.1 (**区間上の多変数関数に対する広義積分**) $I \subset \mathbb{R}^d$ を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ とする。

- I に含まれる任意の有界閉区間 J に対し f が J 上可積分であるとき、f は I 上**局所可積分**であると言う。

• $f \geq 0$ が I 上局所可積分とする。このとき、f の I 上での**広義積分** $\int_I f$ を次のように定める：

$$\int_I f = \sup\left\{\int_J f\ ;\ J \text{ は } I \text{ に含まれる有界閉区間}\right\} \in [0,\infty]. \tag{12.9}$$

• f が I 上局所可積分なら $f^\pm : I \to [0,\infty)$ もそうであり、従って $\int_I f^\pm$ が定義される。$\int_I f^\pm$ のどちらかが有限なら、f は I 上で**広義積分確定**であるといい、f の I 上での**広義積分** $\int_I f$ を次のように定める：

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^- \in [-\infty,\infty]. \tag{12.10}$$

特に $\int_I f^\pm$ が共に有限なら、f は I 上で**広義可積分**であると言う。

広義積分の計算を狭義積分に帰着させる上で次の命題は有用である：

命題 12.3.2 $I \subset \mathbb{R}^d$ は区間、また I に含まれるコンパクトな体積確定集合の列 $K_1 \subset K_2 \subset ...$ は次の条件を満たすとする：

(K) 任意の有界閉区間 $J \subset I$ に対し、ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、$n \geq n_0$ なら $J \subset K_n$.

このとき、局所可積分関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対し

(a) $\displaystyle\int_I |f| = \lim_n \int_{K_n} |f|$ (両辺が ∞ となる場合も含む).

(b) また、(a) の等式両辺が有限なら、$\displaystyle\int_I f = \lim_n \int_{K_n} f$.

問 12.3.1 $I \subset \mathbb{R}^d$ は区間、また有界区間 K_n $(n \in \mathbb{N})$ は $K_1 \subset K_2 \subset ...$, $I = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ なるものとする。このとき、この K_n は命題 12.3.2 の条件 (K) を満たすことを示せ。

例 12.3.3 $c_1, ..., c_d > 0$ に対し次の積分を求める：

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \exp\left(-\tfrac{1}{2}c_j x_j^2\right) dx.$$

$K_n = [-n,n]^d$ に 命題 12.3.2 を適用し、

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \exp\left(-\tfrac{1}{2}c_j x_j^2\right) dx = \lim_n \int_{K_n} \prod_{j=1}^d \exp\left(-\tfrac{1}{2}c_j x_j^2\right) dx.$

系 12.2.2 を繰り返し用い、

$$\int_{K_n} \prod_{j=1}^d \exp\left(-\tfrac{1}{2}c_j x_j^2\right) dx = \prod_{j=1}^d \int_{-n}^n \exp\left(-\tfrac{1}{2}c_j x_j^2\right) dx_j.$$

よって、

$$(1) \text{ の右辺} = \prod_{j=1}^d \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\tfrac{1}{2}c_j x_j^2\right) dx_j \overset{\text{系 } 9.4.4}{=} \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{c_1 \cdots c_d}}.$$

以上より、上式右辺が求める値である。 □

次に逐次積分（定理 12.2.1）を広義積分の場合に拡張する：

定理 12.3.4 (**逐次の広義積分**) $I_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $I_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ を共に区間 (非有界でもよい)、$I = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^d$ とする。局所可積分関数 $f : I \to \mathbb{R}$ について以下の条件を考える（その際、I の点は (x, y) ($x \in I_1$, $y \in I_2$) と書けるので、$f : I \to \mathbb{R}$ も $f(x, y)$ と表示する）:

(a1) 任意の $x \in I_1$, 任意の有界閉区間 $J \subset I_2$ に対し $J \ni y \mapsto f(x, y)$ が $\mathscr{R}(J)$ に属しかつ広義積分

$$G_1(x) = \int_{I_2} |f(x, y)| dy$$

が $x \in I_1$ について局所一様収束（即ち任意の有界閉区間 $J_1 \subset I_1$ に対し $x \in J_1$ について局所一様収束) する。

(a2) 任意の $y \in I_2$, 任意の有界閉区間 $J \subset I_1$ に対し $J \ni x \mapsto f(x, y)$ が $\mathscr{R}(J)$ に属しかつ広義積分

$$G_2(y) = \int_{I_1} |f(x, y)| dx$$

が $y \in I_2$ について局所一様収束（即ち任意の有界閉区間 $J_2 \subset I_2$ に対し $y \in J_2$ について局所一様収束) する。

仮定 (a1) のもとで、

$$f \text{ が } I \text{ 上広義可積分} \iff G_1 \text{ が } I_1 \text{ 上広義可積分} \tag{12.11}$$

(但し「広義可積分」とは定義 12.3.1 の意味でのもの)。また、(12.11) の一方（従って両方）が成り立てば、

$$\int_I f = \int_{I_1} dx \int_{I_2} f(x, y) dy. \tag{12.12}$$

更に仮定 (a1),(a2) のもとで、

$$f \text{ が } I \text{ 上広義可積分} \iff G_1 \text{ が } I_1 \text{ 上広義可積分} \iff G_2 \text{ が } I_2 \text{ 上広義可積分}$$

であり、上のどれか（従って全て）が成り立てば、

$$\int_I f = \int_{I_1} dx \int_{I_2} f(x, y) dy = \int_{I_2} dy \int_{I_1} f(x, y) dx. \tag{12.13}$$

例 12.3.5 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ (系 9.4.4) を再証明する。

証明: $I \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi/2}$ を言えばよい。そこで、

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_0^\infty e^{-\frac{x^2 y^2}{2}} x dy \\ &= \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-\frac{(1+y^2)x^2}{2}} x dx = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \pi/2. \end{aligned}$$

□

例 12.3.6 $u, v > 0$ に対し $B(u, v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ (命題 9.4.3) を再証明する。

証明：

$$\begin{aligned}
B(u,v) &\overset{(9.16),(9.17)}{=} \frac{(u+v)(u+v+1)}{uv}B(u+1,v+1),\\
\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} &\overset{(9.6)}{=} \frac{(u+v)(u+v+1)}{uv}\frac{\Gamma(u+1)\Gamma(v+1)}{\Gamma(u+v+2)}.
\end{aligned}$$

よって u,v を $u+1,v+1$ におきかえて所期等式を示せばよい。ということは、$u,v>1$ に対し所期等式を示せばよい。そこで以後 $u,v>1$ とする。$x\geq 0$, $x<0$ に応じて $g_u(x)=x^{u-1}e^{-x}$, $g_u(x)=0$ とおくと、$u>1$ により $g_u\in C_{\rm b}(\mathbb{R})$. g_v も同様である。更に $f(x,y)=g_u(x-y)g_v(y)$ とすると $f\in C_{\rm b}(\mathbb{R}^2)$ また、

$$\int_0^\infty f(x,y)dx = g_v(y)\int_y^\infty g_u(x-y)dx = g_v(y)\int_0^\infty g_u(x)dx = g_v(y)\Gamma(u).$$

よって

(1) $$\int_0^\infty dy\int_0^\infty f(x,y)dx = \Gamma(u)\Gamma(v).$$

一方、

$$\int_0^\infty f(x,y)dy = e^{-x}\int_0^x (x-y)^{u-1}y^{v-1}dy = x^{u+v-1}e^{-x}B(u,v).$$

よって、

(2) $$\int_0^\infty dx\int_0^\infty f(x,y)dy = \Gamma(u+v)B(u,v).$$

(1),(2) が分かったので、これに加え

$$\int_0^\infty dy\int_0^\infty f(x,y)dx = \int_0^\infty dx\int_0^\infty f(x,y)dy$$

を言えば、証明が完了する。そのためには f が定理 12.3.4 の条件を満たすことを言えばよい。$f\in C_{\rm b}(\mathbb{R}^2)$ より f は局所可積分。また、g_u は有界なので、

$$0\leq f(x,y)\leq Cg_v(y),\quad (C \text{ は定数}).$$

故に $\int_0^\infty f(x,y)dy$ は $x\in(0,\infty)$ について一様収束し、条件 (a1) が満たされる。また、$f(x,y)>0$ なら $0\leq y\leq x$ なので

$$0\leq f(x,y)=(x-y)^{u-1}y^{v-1}e^{-x-y}\leq x^{u+v-2}e^{-x}.$$

故に $\int_0^\infty f(x,y)dx$ は $y\in(0,\infty)$ について一様収束し、条件 (a2) が満たされる。 □

問 12.3.2 $t\geq 0$ に対し $\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-t}$ （問 10.4.9 参照）. これを、左辺の積分に $\frac{1}{1+x^2}=\int_0^\infty e^{-(1+x^2)y}dy$ を代入し、積分順序を交換することにより別証明せよ。

問 12.3.3 (**フレネル積分**[76]) 次を示せ：$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$
ヒント：$t\geq 0$ とする。$\int_0^\infty e^{-xy^2}\,dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ より

$$I_t \overset{\rm def.}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \frac{e^{\mathbf{i}x-tx}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty\,dx\int_0^\infty e^{-(y^2+t-\mathbf{i})x}\,dy.$$

まず、$t>0$ とし、関数 $f(x,y)=e^{-(y^2+t-\mathbf{i})x}$ に 定理 12.3.4 を適用する。

[76]Augustin Jean Fresnel (1788–1827) フランスの物理学者。フレネル積分を用いて光の回折を論じた。

定義 12.3.7 (**一般集合上の多変数関数に対する広義積分**) $A \subset \mathbb{R}^d$, $f : A \to \mathbb{R}$ とする。

• 任意の有界閉区間 I に対し $A \cap I$ が 定義 12.1.1 の意味で体積確定（すなわち $1_{A\cap I} \in \mathscr{R}(I)$）なら A は**体積確定**であるという。

• $\mathscr{K}(A)$ を次のように定める：

$$\mathscr{K}(A) = \{K \;;\; K \subset A,\, K \text{ は有界閉、体積確定}\}.$$

任意の $K \in \mathscr{K}(A)$ に対し f が K 上可積分なら f は A 上**局所可積分**であると言う。

• A が体積確定かつ $f : A \to [0,\infty)$ が A 上局所可積分とする。このとき、f の A 上での**広義積分** $\int_A f$ を次のように定める：

$$\int_A f = \sup\left\{\int_K f \;;\; K \in \mathscr{K}(A)\right\} \in [0,\infty]. \tag{12.14}$$

f が A 上局所可積分なら $f^{\pm} : A \to [0,\infty)$ もそうである。従って $\int_A f^{\pm}$ が定義されるが、そのどちらかが有限であるとき、f は A 上で**広義積分確定**であるといい、f の A 上での**広義積分** $\int_A f$ を次のように定める：

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- \in [-\infty,\infty].$$

問 12.3.4 $A \subset \mathbb{R}^d$ を区間、$f : A \to \mathbb{R}$ とする。以下を示せ：(i) 定義 12.3.1, 定義 12.3.7 で定めた 「A 上での局所可積分性」は同値である。(ii) A に含まれる任意の有界閉区間 I に対し f は A 上での局所可積分なら定義 12.3.1, 定義 12.3.7 による $\int_A f$ の定義は一致する。

例 12.3.8 $a_1, ..., a_d > 0, p_1, ..., p_d > 0$ に対し[77]：

$$\int_A x_1^{p_1-1}\cdots x_d^{p_d-1}dx_1\cdots dx_d = a_1^{p_1}\cdots a_d^{p_d}\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_d)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_d+1)},$$

但し $A = \left\{x \in (0,\infty)^d \;;\; \frac{x_1}{a_1} + ... + \frac{x_d}{a_d} < 1\right\}$.

証明： d についての帰納法による。$d = 1$ のときに等式が正しいことは容易に分る。そこで $d-1$ 次元まで正しいと仮定する。以下、$x = (x_1, ..., x_{d-1})$, $y = x_d$, $g(x) = x_1^{p_1-1}\cdots x_{d-1}^{p_{d-1}-1}$, $f(x,y) = g(x)y^{p_d-1}$ と書く。A の y による断面 A_y は：

$$A_y = \left\{x \in (0,\infty)^{d-1} \;;\; \frac{x_1}{a_1} + ... + \frac{x_{d-1}}{a_{d-1}} < 1 - \frac{y}{a_d}\right\}.$$

今、帰納法の仮定から

$$\textbf{(1)}\quad \int_{A_y} g(x)dx = a_1^{p_1}\cdots a_d^{p_d}\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{d-1})}{\Gamma(p_1+\ldots+p_{d-1}+1)}\left(1-\frac{y}{a_d}\right)^{p_1+\ldots+p_{d-1}}.$$

一方、

$$\begin{aligned}\int_0^{a_d} y^{p_d-1}\left(1-\frac{y}{a_d}\right)^{p_1+\ldots+p_{d-1}} dy &= a_d^{p_d}B(p_d, p_1+\ldots+p_{d-1}+1)\\ &= a_d^{p_d}\frac{\Gamma(p_d)\Gamma(p_1+\ldots+p_{d-1}+1)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_d+1)}.\end{aligned}$$

[77] $a_1 = ... = a_d$, $p_1 = ... = p_d = 1/2$ とすると、右辺は単位球の体積（問 12.2.9）の 2^{-d} 倍だが、変数変換 $x \mapsto (\sqrt{x_j})_{j=1}^d$ を考えると、その理由が分かる。

上式と (1) より

$$\int_0^{a_d} dy \int_{A_y} f(x,y)dx = \underbrace{a_1^{p_1}\cdots a_d^{p_d}\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_d)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_d+1)}}_{\text{示すべき式の右辺}}.$$

したがって後は、次の逐次積分が正しいことを確認ばよい：

(2) $\underbrace{\int_A f(x,y)dxdy}_{\text{示すべき式の左辺}} = \int_0^{a_d} dy \int_{A_y} f(x,y)dx.$

$f(x,y)$ は局所可積分。また、$0<\varepsilon<y<a_d$ なら $y^{p_d-1} \le C \stackrel{\text{def.}}{=} (\varepsilon^{p_d-1} \vee a_d^{p_d-1})$. また、$A_y \subset B \stackrel{\text{def.}}{=} [0,a_1]\times\cdots\times[0,a_{d-1}]$. したがって、$0<\varepsilon<y<a_d$ なら

$$f(x,y)1_{A_y}(x) \le Cg(x)1_B(x).$$

故に、$\int_{A_y} f(x,y)dx$ は y について局所一様収束し、定理 12.3.4 により (2) が言える。□

以下、本節で述べた定理・命題を示す。

命題 12.3.2 の証明：(a): 等式左辺を ℓ, 右辺を r とおく。
$\underline{\ell \ge r}$：任意の n に対し K_n は I に含まれるコンパクトな集合だから $K_n \subset J \subset I$ を満たす有界閉区間 J が存在する。故に

$$\ell \stackrel{(12.9)}{\ge} \int_J |f| \ge \int_{K_n} |f|.$$

$n\to\infty$ として $\ell \ge r$ を得る。
$\underline{\ell \le r}$：任意の有界閉区間 $J \subset I$ に対し、n_0 を (K) のようにとると、$n \ge n_0$ に対し

$$\int_J |f| \le \int_{K_n} |f|.$$

$n\to\infty$ とした後、 J について上限をとり、$\ell \le r$ を得る。
(b): $\int_I f^\pm \le \int_I |f| < \infty$ と (a) より、

$$\int_I f^\pm = \lim_n \int_{K_n} f^\pm.$$

これと (12.10) より (b) を得る。 □

定理 12.3.4 の証明：$\underline{\text{第一段：}}$ $f \ge 0$ の場合を示す。(12.12) を示せば (12.11) も分る。(12.12) 左辺を ℓ, 右辺を r とおく。また、有界閉区間 J_m, K_n $(m,n\in\mathbb{N})$ は

$$J_1 \subset J_2 \subset ..., \quad I_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n, \quad K_1 \subset K_2 \subset ..., \quad I_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

なるもの、$L_{m,n} = K_m \times L_n$ とする。このとき、任意の n に対し

(1) $\int_{L_{n,n}} f \stackrel{\text{定理 12.2.1}}{=} \int_{J_n} dx \int_{K_n} f(x,y)dy \le r.$

また、$L_{1,1} \subset L_{2,2} \subset ...,\quad I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_{n,n}$ と 問 12.3.1 より

$$\ell \overset{\text{命題 }12.3.2}{=} \lim_n \int_{L_{n,n}} f \overset{(1)}{\leq} r.$$

一方、(a1) より任意の m に対し

$$\lim_n \int_{K_n} f(x,y)dy = G_1(x) = \int_{I_2} f(x,y)dy \quad (x \in J_m \text{ について一様収束}).$$

よって逐次積分（定理 12.2.1）と項別積分（定理 10.3.1）より

$$\lim_n \int_{L_{m,n}} f = \lim_n \int_{J_m} dx \int_{K_n} f(x,y)dy = \int_{J_m} G_1(x)dx.$$

更に $m \to \infty$ として

(2) $\displaystyle \lim_m \lim_n \int_{L_{m,n}} f = \lim_m \int_{J_m} G_1(x)dx \overset{\text{命題 }12.3.2}{=} \int_{I_1} G_1(x)dx.$

(2) の左辺 $\leq \ell$ かつ (2) の右辺 $= r$ より $\ell \geq r$. 以上より $\ell = r$, 更に次も分った：

(3) $\displaystyle \lim_m \lim_n \int_{L_{m,n}} f = \int_I f.$

第二段：$f \geq 0$ と限らない場合を示す。定義 12.3.1 の意味で、f と $|f|$ の広義可積分性は同値。故に $|f|$ に対し第一段を適用し (12.11) を得る。以下、(12.11) の両方が成立すると仮定し (12.12) を示す。まず、$f \geq 0$ と限らなくても (3) が成立することを示す 。そのため $k \geq n \geq m$ とし、

$$\left| \int_{L_{k,k}} f - \int_{L_{m,n}} f \right| \leq \int_{L_{k,k} \setminus L_{m,n}} |f| = \int_{L_{k,k}} |f| - \int_{L_{m,n}} |f|.$$

$k \to \infty$ として

$$\left| \int_I f - \int_{L_{m,n}} f \right| \leq \int_I |f| - \int_{L_{m,n}} |f|.$$

更に、$n \to \infty, m \to \infty$ の順に極限をとると、第一段から上式右辺は 0 に収束する。従って (3) が言えた。一方、(a1) より任意の m に対し

$$\lim_n \int_{K_n} f(x,y)dy = F_1(x) \overset{\text{def.}}{=} \int_{I_2} f(x,y)dy \quad (x \in J_m \text{ について一様収束}).$$

よって逐次積分（定理 12.2.1）と項別積分（定理 10.3.1）より

$$\lim_n \int_{L_{m,n}} f = \lim_n \int_{J_m} dx \int_{K_n} f(x,y)dy = \int_{J_m} F_1(x)dx.$$

更に $m \to \infty$ として

(4) $\displaystyle \lim_m \lim_n \int_{L_{m,n}} f = \lim_m \int_{J_m} F_1(x)dx \overset{\text{命題 }12.3.2}{=} \int_{I_1} F_1(x)dx.$

(3),(4) より (12.12) を得る。 □

12.4 変数変換公式とその応用

定理 12.4.1 (**積分の変数変換**) $A, B \subset \mathbb{R}^d$ は共に有界かつ体積確定、$g \in C^1(U \to \mathbb{R}^d)$, $g(A) = B$ とする (U は A を含む開集合)。また、ある $N \subset A$ が次を満たすとする：

(a) N は体積零。

(b) g は $A \backslash N$ 上単射。

(c) 全ての $x \in A \backslash N$ に対し $J_g(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \det g'(x) \neq 0.$

このとき、任意の $f \in C_{\text{b}}(B)$ に対し

$$\int_B f = \int_A (f \circ g)|J_g|. \tag{12.15}$$

例 12.4.2 平面極座標：

$$g(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}$$

は $A = [0, a) \times [0, 2\pi)$ から $B(0, a) = \{x \in \mathbb{R}^2\ ; |x| < a\}$ への全射、面積 0 の集合 $N = \{0\} \times [0, 2\pi)$ に対し g は $A \backslash N$ 上全単射かつ $J_g = r > 0$. よって 定理 12.4.1 より任意の $f \in C(\mathbb{R}^2)$ に対し

$$\int_{B(0,a)} f(x)dx = \int_{[0,a]\times[0,2\pi)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

特に $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ とおくと、

(1) $$\int_{B(0,a)} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = \int_{[0,a)\times[0,2\pi)} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \stackrel{\text{逐次積分}}{=} 2\pi \int_0^a e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = 2\pi(1 - e^{-\frac{a^2}{2}}).$$

一方、

(2) $$\int_{(-a,a)^2} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx \stackrel{\text{逐次積分}}{=} \left(\int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2.$$

また、$B(0, a) \subset (-a, a)^2 \subset B(0, \sqrt{2}a)$ と (1) より

(3) $$2\pi(1 - e^{-\frac{a^2}{2}}) \leq \int_{(-a,a)^2} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx \leq 2\pi(1 - e^{-2a^2}).$$

(2),(3) より

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \lim_{a\to\infty} \left(\int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = 2\pi,\ \text{即ち} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

を得る。 □

問 12.4.1 問 12.2.6 の各積分を極座標変換を用いて計算せよ。

問 12.4.2 (i) レムニスケイト (問 11.4.3) は極座標により、$r^2 = 2\cos 2\theta$ ($|\theta| \leq \pi/4$) と表されることを示せ。(ii) レムニスケイトが囲む集合 $\{(r, \theta)\ ;\ |\theta| \leq \pi/4, r^2 \leq 2\cos 2\theta\}$ の面積を求めよ。

問 12.4.3 (i) カーディオイド (問 11.4.4) は極座標により、$r=1+\cos\theta$ ($\theta\in[0,2\pi)$) と表されることを示せ。(ii) カーディオイドが囲む集合 $\{(r,\theta)\ ;\ \theta\in[0,2\pi), r\le 1+\cos\theta\}$ の面積を求めよ。

例 12.4.3 ($\star$) $d\ge 2$, $(r,\theta_1,...,\theta_{d-1})\in[0,\infty)\times[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi)$ に対し d 次元極座標を

$$g(r,\theta_1,...,\theta_{d-1})=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix},\ \text{但し}\ \begin{array}{l}x_1=r\cos\theta_1,\\ x_j=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{j-1}\cos\theta_j\ (2\le j\le d-1)\\ x_d=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1}\end{array}.$$

を考える。問 11.1.8 より、g は $A=[0,a)\times[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi)$ から $B=\{x\in\mathbb{R}^d\ ;|x|<a\}$ への全射である。また、

$$N=\{(r,\theta_1,...,\theta_{d-1})\in A\ ;\ r=0,\ \text{または}\ (\theta_j)_{j=1}^{d-2}\not\subset(0,\pi)^{d-2}\}$$

とすると、N は体積 0 かつ g は $A\backslash N$ 上全単射で、

$$J_g(r,\theta_1,...,\theta_{d-1})=r^{d-1}\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin^2\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}>0.$$

よって 定理 12.4.1 より任意の $f\in C_{\rm b}(B)$ に対し

$$\int_B f(x)dx=\int_A(f\circ g)J_g$$

$f\equiv 1$ に対し上式右辺

$$\begin{aligned}&\int_A J_g\\ =&\int_0^a r^{d-1}dr\int_{[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi)}\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin^2\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}d\theta_1\cdots d\theta_{d-1}.\end{aligned}$$

を計算して B の体積を求めよう。

$$\int_0^\pi\sin^n=2\int_0^{\pi/2}\sin^n\overset{\text{問 9.4.10}}{=}B(\tfrac{n+1}{2},\tfrac12)\overset{\text{命題 9.4.3}}{=}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

だから、逐次積分より

$$\begin{aligned}S\ &\overset{\rm def.}{=}\int_{[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi)}\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin^2\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}d\theta_1\cdots d\theta_{d-1}\\ &=\ \pi^{\frac{d-2}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot 2\pi=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}.\end{aligned}$$

更に r について積分することにより、B の体積は

$$\int_A J_g=S\int_0^a r^{d-1}dr=\frac{a^dS}{d}=\frac{\pi^{d/2}a^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}.$$

上の計算途中に現れた $S=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$ は実は単位球面の表面積を表す（「表面積」の定義はしていないが、S を積分で表す式の意味から、その妥当性は直感できるだろう）。 $\Box$

定理 12.4.4 (**広義積分に対する変数変換**) $A,B\subset\mathbb{R}^d$ は共に体積確定、$g\in C^1(U\to\mathbb{R}^d)$, $g(A)=B$ とする (U は A を含む開集合)。また、ある $N\subset A$ が次を満たすとする：

(a) N は体積零。

(b) g は $A\backslash N$ 上単射。

(c) 全ての $x \in A\backslash N$ に対し $J_g(x) \stackrel{\rm def.}{=} \det g'(x) \neq 0.$

このとき、任意の $f \in C(B)$ に対し

$$f \text{ が } B \text{ 上広義可積分} \iff (f \circ g)|J_g| \text{ が } A \text{ 上広義可積分}$$

であり、上の一方（従って両方）が成り立てば、

$$\int_B f = \int_A (f \circ g)|J_g|. \tag{12.16}$$

例 12.4.5 S を d 次の正定値対称行列（補題 11.3.9）とし、次の積分を求める：

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\tfrac{1}{2}x \cdot Sx\right) dx.$$

C は対角行列で、S の固有値 $0 < c_1 \leq c_2 \leq .... \leq c_d$ がその対角成分とする。また、U は実直交行列で $S = U^*CU$ となるものとする（U^* は U の転置行列を表す）。なお、このような U の存在については線形代数の教科書を参照せよ。$g(x) = Ux$ とおくと $J_g = \det U = 1.$ よって

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\tfrac{1}{2}x \cdot Sx\right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\tfrac{1}{2}Ux \cdot CUx\right) dx \stackrel{\text{定理 } 12.4.4}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\tfrac{1}{2}x \cdot Cx\right) dx.$$

ところが、$x \cdot Cx = c_1 x_1^2 + ... + c_d x_d^2$ より

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\tfrac{1}{2}x \cdot Cx\right) dx \stackrel{\text{例 } 12.3.3}{=} \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{c_1 \cdots c_d}} = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{\det S}}.$$

従って、上式右辺が求める値である。 □

問 12.4.4 $(\star)$ d 次の正定値対称行列 S_1, S_2 に対し次を示せ：
$\det(\frac{1}{p}S_1 + \frac{1}{q}S_2) \geq (\det S_1)^{1/p}(\det S_2)^{1/q}$, 但し、$p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする。

例 12.4.6 $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \,;\, |x| \leq R\}$ $(R > 0)$, $p > 0$ とし、次の積分を求める：

$$I = \int_{B\backslash\{0\}} \frac{dx}{|x|^p}, \quad J = \int_{\mathbb{R}^d\backslash B} \frac{dx}{|x|^p}.$$

極座標変換により、

$$I = 2\pi \int_0^R \frac{rdr}{r^p} = 2\pi \int_0^R r^{1-p} dr = \begin{cases} \frac{2\pi R^{2-p}}{2-p}, & p < 2 \text{ のとき}, \\ \infty, & p \geq 2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

$$J = 2\pi \int_R^\infty \frac{rdr}{r^p} = 2\pi \int_R^\infty r^{1-p} dr = \begin{cases} \frac{2\pi R^{2-p}}{p-2}, & p > 2 \text{ のとき}, \\ \infty, & p \leq 2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

□

問 12.4.5 $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx}{(1+|x|^p)^q}$ $(p, q > 0)$ を求めよ。

問 12.4.6 ($\star$) $B = \{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ |x| \le R\}$ $(R > 0)$, $p, q > 0$ とし、以下の積分を求めよ：
(i) $\int_{B\backslash\{0\}} \frac{dx}{|x|^p}$. (ii) $\int_{\mathbb{R}^d\backslash B} \frac{dx}{|x|^p}$. (iii) $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1+|x|^p)^q}$.

問 12.4.7 $S = \{(\theta_1, \theta_2) \in [0,\infty)^2\ ;\ \theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}\}$ とおく。以下を示せ：(i) $g(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}, \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_1}\right)$ は S から $[0,1)^2$ への全単射で、$g^{-1}(x,y) = \left(\mathrm{Arccos}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}, \mathrm{Arccos}\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}\right)$.
(ii) $J_g(\theta_1, \theta_2) = 1 - \tan^2\theta_1 \tan^2\theta_2$. (iii) $\int_{[0,1)^2} \frac{dxdy}{1-x^2y^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

問 12.4.8 ($\star$) $\int_{[0,1)^2} \frac{dxdy}{1-x^2y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ を示し、それから $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を導け (ヒント：問 12.4.7)。

12.5 ($\star$) 変数変換公式の証明

この節は未完成（というより未着工）。

13　付録

13.1　実数の定義

実数の定義を述べる前に、少しだけ歴史を繙いてみよう。

微分積分学は 19 世紀の始め頃までに、既に多くの発展を遂げていた。この講義で述べる事柄の多くは、厳密な形ではないにしても既にその段階で知られていたと言ってもいいだろう。但し、それまでは「関数」とは漠然と「式で表されたもの」、「実数」も「そこにあるもの」と認識され、改めて定義しようとは誰も思わなかった。ところが、フーリエ級数展開を数学的に正当化する試み等を通じ、より一般な関数を解析する必要が生じた。そうした中で、連続性、可微分性、可積分性、といった基本的な問題に目が向けられるようになり、遂には「そもそも実数とは何か？」が問われ始めた。実数を厳密に定義する試みは 19 世紀半ばすぎから、多くの数学者により行われるようになった。

以下で述べる公理の原型はヒルベルトによる（1900 年）[78] 。

定義 13.1.1 集合 $\mathbb{R}$ に

- $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ に対し新たな元 $a+b \in \mathbb{R}$, $ab \in \mathbb{R}$ を対応させる写像 (**加法** と **乗法**),
- $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ を与える毎に定まる命題 $a \le b$ (**順序**)

が定義され、以下に述べる 17 個の条件 (A0)–(A3),(M0)–(M5), (O1)–(O6),(AC) を全て満たす時、$\mathbb{R}$ を**実数体**、その元を**実数** (real number) と呼ぶ。

以後、定義 13.1.1 で挙げた 17 個の公理を説明する。それらは

- 「演算に関するもの」　((A0)–(A3),(M0)–(M5))、
- 「順序に関するもの」((O1)–(O6))、
- 「連続の公理」((AC):定義 1.3.6 参照）に大別出来る。

加法に関する公理：

(A0) 任意の元 a,b に対し $a+b=b+a$ (**加法の可換律**).

(A1) 任意の元 a,b,c に対し $(a+b)+c=a+(b+c)$ (**加法の結合律**).

(A2) 元 0 が存在し、任意の元 a に対し $a+0=a$ (**加法単位元 0 の存在**).

(A3) 任意の元 a に対し元 $-a$ が存在し、$a+(-a)=0$ (**加法逆元の存在**).

なお、元 a,b に対し $a+(-b)$ は $a-b$ とも記し、a,b の**差** (difference) と呼ぶ。

(A0)–(A3) から、以下が導かれる：

$$a+b=a \Longrightarrow b=0. \tag{13.1}$$

$$a+b=0 \Longrightarrow a=-b, b=-a. \tag{13.2}$$

$$\text{任意の元 } a \text{ に対し } -(-a)=a. \tag{13.3}$$

[78] David Hilbert (1862–1943)

(13.1) を示すには $a+b=a$ の両辺に $-a$ を加えればよい。そうすれば、(A1),(A2) より $b=0$ を得る。(13.2) の証明も同様である。(13.2) で特に $b=-a$ とすれば、(13.3) も判る。 □

(13.1) より加法単位元 0 は唯一つである。また、(13.2) により $a \in \mathbb{R}$ に対し、その加法逆元 $-a$ は唯一つである。

乗法、及び加法・乗法の関係に関する公理は次の通り：

(M0) 任意の元 a, b に対し $ab = ba$ (**乗法の可換律**).

(M1) 任意の元 a, b, c に対し $(ab)c = a(bc)$ (**乗法の結合律**).

(M2) 元 1 が存在し、任意の元 a に対し $1a = a1 = a$ (**乗法単位元 1 の存在**).

(M3) 任意の元 a, b, c に対し $(a+b)c = ac+bc$, $c(a+b) = ca+cb$ (**分配律**).

(M4) $a \neq 0$ なら元 a^{-1} が存在し、$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (**乗法逆元の存在**).

(M5) $0 \neq 1$. (**0 以外の元の存在**).

元 a, b について b^{-1} がもし存在すれば、ab^{-1} を $\frac{a}{b}$, a/b とも記し、a, b の**商** (quotient) と呼ぶ。

加法の場合の (13.1), (13.2) と同様にして (M0)–(M2), (M3) から次が判る：

$$a \neq 0,\ ab = a \Longrightarrow b = 1 \tag{13.4}$$

$$a \neq 0,\ ab = 1 \Longrightarrow b = a^{-1} \tag{13.5}$$

分配律を用いて以下が導かれる：

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対し } 0a = 0 \tag{13.6}$$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対し } (-1)a = -a \tag{13.7}$$

$$(-1)^2 = 1 \tag{13.8}$$

証明は次の通り：

(13.6):(M3) を用れば、

$$0a + 0a = (0+0)a = 0a.$$

故に (13.1) により $0a = 0$.

(13.7): (M3), (13.6) より、

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = \{1 + (-1)\}a = 0a = 0.$$

故に (13.2) により $(-1)a = -a$.

(13.8): (13.3) と (13.7) による。

(M5) を仮定する理由は次の通り。もし $1 = 0$ なら、任意の実数 a に対し $a = 1a = 0a = 0$ （(13.6) を用いた)、従って $\mathbb{R} = \{0\}$ となってしまう！

順序に関する条件は以下の通り：

(O1) 任意の元 a に対し $a \le a$ (**反射律**).

(O2) $a \le b,\ b \le a$ ならば $a = b$ (**反対称律**).

(O3) $a \le b,\ b \le c$ ならば $a \le c$ (**推移律**).

(O4) 元 a, b に対し、$a \le b$ 或いは $b \le a$ が成立する (**全順序性**).

(O5) $a \le b$ なら $a + c \le b + c$. (**加法は順序を保つ**)

(O6) $a \le b,\ c > 0$ なら $ac \le bc$. (**正数による積は順序を保つ**)

元 a, b に対し、「$a \le b$ かつ $a \ne b$」 を $a < b$ と記す。また、$a \le b,\ a < b$ はそれぞれ $b \ge a,\ b > a$ とも記す。条件 (O4) の直観的意味は、実数が「直線上に並んでいる」ことである：(O2),(O4) により、

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ なら } a = b,\ a > b,\ a < b \text{ のうちひとつだけが成立する。} \tag{13.9}$$

(O1)–(O6) から以下の諸性質が導かれる：

$$a < b \text{ なら任意の } c \text{ に対し } a + c < b + c. \tag{13.10}$$

$$a < b,\ c > 0 \text{ ならば } ac < bc. \tag{13.11}$$

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し } a \le b + \varepsilon \text{ なら } a \le b. \tag{13.12}$$

$$a < b \iff -a > -b. \tag{13.13}$$

$$a \ne 0 \text{ なら } a > 0 \text{ または } -a > 0 \tag{13.14}$$

$$a \ne 0 \text{ なら } a^2 > 0. \tag{13.15}$$

$$1 > 0, \tag{13.16}$$

(13.10) – (13.16) は次のようにして導かれる。
(13.10): (O5) より、$a + c \le b + c$ なので $a + c \ne b + c$ を言えばよい。所が、もし $a + c = b + c$ なら、両辺に $-c$ を加え $a = b$. これは (13.9) に反する。
(13.11): (O6) を用いれば (13.10) と同様に示せる。
(13.12):$b < a$ と仮定する。すると、(13.10),(13.11) より $\varepsilon = (a - b)/2 > 0$. 故に この ε に対し $a \le b + \varepsilon = (a + b)/2$ これと、(O5),(O6) により $a \le b$ となるが、(13.9) に反する。
(13.13):(13.10) で $c = -a - b$ とすれば 「$\Longrightarrow$」 が判る。これと、(13.3) を用いて逆も出る。
(13.14): (O4) により $a > 0$ または $a < 0$. 後者の場合は (13.13) で $b = 0$ とすることにより、$-a > 0$.
(13.15): (13.7), (13.8) より、$a^2 = (-a)^2$. 従って (13.14) より a^2 は正数の積である。一方、(O6) で $a = 0$ とすれば、正数の積は正数。
(13.16): (M5) より $1 \ne 0$. 従って (M2) と (13.15) より、$1 = 1^2 > 0$.

注：定義 1.1.1 に述べた $\mathbb{N}$ の定義は一般的であり、実用には十分である。しかし、厳密に言うと 「...」 の部分を読み手の常識的理解に委ねている点で、論理的に不完全である。正確な定義は次の通り。まず、$\mathbb{R}$ の部分集合 A に対し次の条件を考える：

(∗) $0 \in A$ かつ $\{a+1\,;\ a \in A\} \subset A$.

その上で、集合 $\mathbb{N}$ を次のように定める：

$$\mathbb{N} = \bigcap_{\substack{A \subset \mathbb{R} \\ A \text{ は } (*) \text{ を満たす}}} A. \tag{13.17}$$

問 13.1.1 (⋆) 定義 1.1.1 後の注に述べた $\mathbb{N}$ の定義に従って、以下を示せ：(i) $a, b \in \mathbb{N}$ なら $a + b \in \mathbb{N}$. (ii) $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ なら $a - b \in \mathbb{N}$. 従って、非負整数は自然数である。(iii) $n \in \mathbb{N}$, $n < a < n + 1$ なら $a \notin \mathbb{N}$.

問 13.1.2 次を示せ：$a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, $A = \{z \in \mathbb{Z}\,;\ a < z \leq b\}$ なら $\sharp A = b - a$.

問 13.1.3 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ のとき、$A = \{z \in \mathbb{Z}\,;\ a < z \leq b\}$ が有限集合である。これを、既に述べた公理だけを用いて示せる、示せない、賭けるならどちらか？

問 13.1.4 (⋆) 集合 A に対し、全単射 $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$ が存在するとき、A を**可算集合**（countable set）と呼ぶ。$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ は可算集合であることを示せ。なお、$a < b$ なら、集合 $\{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x < b\}$ は非可算集合であることが知られている。

最後に、これまで述べた実数の公理が現代数学の色々な抽象概念に通じていることを述べておく。

定義 13.1.2 (⋆)

• 一般に集合 S に加法が定義され、(A0)–(A3) が満たされるなら S を**加群** (additive group) と呼ぶ。

• 一般に加群 S に乗法が定義され、(M1)–(M3) が満たされるなら S を**環** (ring) と呼ぶ。また、(M4) を満たす環 を**体** (field) と呼ぶ。更に (M0) を満たす環を**可換環** (commutative ring)、(M0) を満たす体を**可換体** (commutative field)、 と呼ぶ。

• 一般に集合 S に乗法が定義され、(M1), (M2), (M4) が満たされるなら S を**群** (group) と呼ぶ。特に、(M0) を満たす群を**可換群** (commutative group) と呼ぶ。

問 13.1.5 (⋆) 次を示せ：(i) $\mathbb{Z}$ は可換環である。(ii) $\mathbb{Q}$ は可換体である。

定義 13.1.3 (⋆)

• 一般に集合 S の任意の 2 元 a, b に対し命題 $a \leq b$ が定義され、(O1)–(O3) が満たされるなら $\leq$ を**順序** (order)、また集合 S を**順序集合** (ordered set) と呼ぶ。

• 順序集合 S で定義された順序 $\leq$ が (O4) を満たすとき、この順序をを**全順序** (total order)、また集合 S を**全順序集合** (totally ordered set) と呼ぶ。

問 13.1.6 (⋆)（**成分毎の順序**）$\mathbb{R}^2$ の元 $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ に対し $z \leq z'$ を「$x \leq x'$ かつ $y \leq y'$」と定義する。 $z \leq z'$ は順序ではあるが、全順序でないことを示せ。

問 13.1.7 (⋆) （**辞書的順序**）$\mathbb{R}^2$ の元 $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ に対し「$x < x'$」 または「$x = x'$ かつ $y \leq y'$」のとき、$z \leq z'$ と定める。このとき、$z \leq z'$ は全順序であることを示せ。

問 13.1.8 $(\star)$ 集合 X の部分集合 $A,\, B$ に対する包含関係 $A \subset B$ は順序であること、また、X が2つ以上の要素を含めば全順序ではないことを示せ。

13.2 コーシーの収束条件

この節では、コーシーの収束条件（定理 13.2.1）を与える。

定理 13.2.1 (**コーシーの収束条件**) $(a_n)_{n\geq 0}$ は $\mathbb{R}^d$ の点列とする。このとき、以下の条件は同値：**(a)** (a_n) は収束する。**(b)** (a_n) は**コーシー列**である、即ち任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$\ell \in \mathbb{N}$ が存在し

$$m, n \geq \ell \text{ なら } |a_m - a_n| < \varepsilon. \tag{13.18}$$

証明: (a) $\Longrightarrow$ (b): $a_n \to a$ とする。仮定より、

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \ell \in \mathbb{N},\ \forall n \geq \ell,\ |a_n - a| < \varepsilon/2.$$

従って $m, n \geq \ell$ なら

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(b) $\Longrightarrow$ (a): まず、コーシー列 (a_n) の有界性を示す。(13.18) で $\varepsilon = 1$ とし、これに対する ℓ をとる。$n \geq \ell$ なら

$$|a_n| \leq |a_n - a_\ell| + |a_\ell| \leq 1 + |a_\ell|.$$

従って、

$$\sup_{n\geq 0} |a_n| \leq \max_{0\leq n\leq \ell} |a_n| \vee (1 + |a_\ell|) < \infty.$$

以上より (a_n) は有界。
(a_n) が コーシー列なら、その座標成分もコーシー列である。また、(a_n) の収束を言うには、全ての座標成分の収束を言えばよい。以上から $d = 1$ の場合を示せば十分なので、以後 $d = 1$ とする。

$$I_n = \inf_{m\geq n} a_m, \quad S_n = \sup_{m\geq n} a_m$$

とおく[79]。$I_n \leq a_n \leq S_n$, I_n は $\nearrow$, S_n は $\searrow$, 両者は共に有界（(a_n) の有界性より）。I_n, S_n は収束するから（単調列定理)、極限が同じなら (a_n) も収束する（はさみうちの原理)。今、(13.18) より $\forall \varepsilon$ に対し次のような m が存在する：

$$p, q \geq m \quad \Longrightarrow \quad a_p - a_q \leq \varepsilon.$$

p について上限、q について下限をとれば $S_m - I_m \leq \varepsilon$. 故に $n \geq m$ なら、

$$0 \leq S_n - I_n \leq S_m - I_m \leq \varepsilon$$

以上より、$\lim_n (S_n - I_n) = 0$. □

[79]以下の議論は $\underline{\lim}_n a_n = \overline{\lim}_n a_n$ の証明に他ならないが、上極限、下極限を表に出さずに述べる。

定理 13.2.1 も中間値定理（定理 2.3.4）と同じ歴史を辿った。ボルツァーノ は 1817 年に発表した論文の中で定理 13.2.1 の条件 (b) を定義した。その後、コーシーは ボルツァーノとは独立に、定理 13.2.1 の条件 (b) を満たす数列が収束することを述べた（1821 年)。コーシー自身はそのことを「自明」と考えていたらしいが、後年、その重要性が再認識された。例えば、19 世紀半過ぎに、実数の厳密な定義づけが多くの数学者により試みられた。その中のひとつの考え方（特に カントールによるもの）が、 実数を「有理数に値をとるコーシー列の極限」として捉えることだった。

問 13.2.1 $a_n \in \mathbb{R}^d$ に対し $\sum_0^\infty |a_n| < \infty$ なら $\sum_0^\infty a_n$ が収束すること（系 2.5.7）をコーシーの収束条件を用いて示せ（この逆については 問 13.2.3 参照)。

問 13.2.2 $p_n = \prod_{j=0}^n (1+a_j)$ $(a_j \in \mathbb{C},\, a_j \neq -1)$ とする。以下を示せ：(i) (p_n) が 0 でない値に収束することと、次の条件は同値である：任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$\ell \in \mathbb{N}$ が存在し $n > m \geq \ell$ なら $\left|\frac{p_n}{p_m} - 1\right| < \varepsilon$. (ii) $\sum_0^\infty |a_n| < \infty$ なら、(i) の条件が満たされる。

問 13.2.3 $(\star)$ 次の (i),(ii) を順次示すことで、定理 13.2.1 (b) $\Rightarrow$ (a) の別証明を与えよ：(i) コーシー列 (a_n) が収束部分列 $(a_{\ell(n)})$ を含めば、(a_n) 自身が収束する。(ii) $\ell(0) < \ell(1) < \ldots$ を、「$p, q \geq \ell(n)$ なら $|a_p - a_q| < 2^{-n}$」なるように選ぶ事ができ、この $\ell(n)$ に対し $(a_{\ell(n)})$ が収束する。

注： 問 13.2.1 ではコーシーの収束条件から、絶対収束級数の収束を導いた。問 13.2.3 では逆に、絶対収束級数の収束からコーシーの収束条件を導いた。

問 13.2.4 $(\star)$ 定理 5.5.4 を使って定理 13.2.1 (b) $\Rightarrow$ (a) を示せ。ヒント: コーシー列は有界であることと、問 13.2.3(i).

次にコーシーの収束定理を、関数の極限の場合に一般化する。この一般化は、後に一様連続関数の拡張定理の他、広義積分の収束判定にも応用される。

定理 13.2.2 （**一般化されたコーシーの収束条件**）記号は 定義 4.1.1 の通りとするとき、以下の条件は同値である：**(a)** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^k$ が存在する。**(b)** 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次のような $\delta > 0$ が存在：

$$x, y \in D \cap B_d(a, \delta) \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \tag{13.19}$$

ここで、$B_d(a, \delta)$ は (4.4) で定める。

証明: (a) $\Longrightarrow$ (b): 仮定より、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次のような $\delta > 0$ が存在：

$$x \in D \cap B_d(a, \delta) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon/2.$$

従って $x, y \in D \cap B_d(a, \delta)$ なら、

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \varepsilon.$$

つまり、条件 (b) が言えた。

(b) $\Longrightarrow$ (a): $x_n \in D$, $x_n \longrightarrow a$ とし、以下を示せばよい：

(1) $(f(x_n))$ が収束列。

(2) $\ell = \lim_n f(x_n)$ が点列 (x_n) の選び方に依らない。

(1) について：$(f(x_n))$ がコーシー列であることを言えばよい。$\varepsilon > 0$ を任意とし、条件 (b) の δ をとる。$x_n \longrightarrow a$ より、$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し

$$n \geq n_0 \implies x_n \in B_d(a, \delta).$$

故、条件 (b) より

$$m, n \geq n_0 \implies |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon.$$

従って、$(f(x_n))$ はコーシー列。
(2) について：$x_n, x'_n \in D$, $x_n \longrightarrow a$, $x'_n \longrightarrow a$ とする。このとき、(1) より

$$\ell = \lim_n f(x_n), \quad \ell' = \lim_n f(x'_n)$$

が存在。故に、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$n \geq n_0 \implies |f(x_n) - \ell| + |f(x'_n) - \ell'| < \varepsilon.$$

また、$\varepsilon > 0$ に対し、条件 (b) の δ をとる。このとき、$n_1 \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$n \geq n_1 \implies x_n, x'_n \in B_d(a, \delta).$$

従って、条件 (b) より

$$n \geq n_1 \implies |f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon.$$

以上より、$n \geq n_0 \vee n_1$ なら

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x'_n)| + |f(x'_n) - \ell'| < 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから $\ell = \ell'$. □

系 13.2.3 $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ に対し以下の条件は同値である：

(a) $\lim_{x \to b} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$ が存在する。

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次のような $c \in (a, b)$ が存在する：

$$c < u < v < b \text{ なら } |f(v) - f(u)| < \varepsilon.$$

命題 13.2.4 (**広義積分に対するコーシーの条件**) $f \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}([a, b))$ に対し次の条件は同値である：

(a) 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \int_a^v f$ が収束。

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次のような $c \in (a, b)$ が存在：

$$c < u < v < b \text{ なら } \left| \int_u^v f \right| < \varepsilon.$$

証明： (a,b) 上の関数 $F(v)=\int_a^v f$ に系 13.2.3 を適用。

定理 13.2.5 (**一様コーシー条件**) 関数列 (f_n) に対し、次の条件を考える：

(a) 一様収束する。

(b) **一様コーシー列**である。即ち、任意の $\varepsilon > 0$ に対し次を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在：

$$m, n \ge n_0 \implies \|f_m - f_n\|_D < \varepsilon.$$

(c) **一様有界**である。即ち $\sup\limits_n \|f_n\|_D < \infty.$

このとき、(a) $\iff$ (b) $\implies$ (c) が成立。条件 (b) を**一様コーシー条件** と呼ぶ。

証明: (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c): 定理 13.2.1 と同様に示される（問 13.2.5）。
(b) $\implies$ (a): 仮定から各 $x \in D$ に対し、点列 $(f_n(x))_{n\ge 0}$ はコーシー列。従って、定理 13.2.1 より

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

が存在。また、改めて一様コーシー列の条件から、任意の $\varepsilon > 0$ に対し次を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在：

$$m, n \ge n_0, x \in D \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

上式で、$m \longrightarrow \infty$ とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対し次を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在することになる：

$$n \ge n_0, x \in D \implies |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

これは、f_n が f に一様収束することを示す。 $\square$

問 13.2.5 定理 13.2.5 の証明中、(a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) を確認せよ。

問 13.2.6 定理 13.2.5 を応用してワイエルシュトラス の M-テスト（定理 10.2.1）を示せ。

14 問の略解

第 1 章

問 13.1.1: (i) (13.17) 右辺の全ての A に対し $a \in \mathbb{N} \subset A$. 次に、条件 $(*)$ を繰り返し用いて $a+b \in A$. (13.17) 右辺の全ての A に対しこれが言えたから $a+b \in \mathbb{N}$. (ii) はじめに $b=1$ の場合を示す。それには、$A \stackrel{\rm def}{=} \{0\} \cup \{a \in \mathbb{R} : a-1 \in \mathbb{N}\}$ が条件 $(*)$ をみたせばよい。$0,1 \in A$ は自明。 そこで $a \in A$ とする。$a=0$ なら $a+1=1 \in A$. また $a \neq 0$ なら $a-1 \in \mathbb{N}$. よって $(a+1)-1=(a-1)+1 \in \mathbb{N}$ ((i) より). これで $b=1$ の場合が分かった。b が一般の場合は $A \stackrel{\rm def}{=} \{a \in \mathbb{R} : b \in \mathbb{N}, a \geq b \Rightarrow a-b \in \mathbb{N}\}$ が条件 $(*)$ をみたせばよい。なお、$b=0$ を考えることにより $A \subset \mathbb{N}$. $0 \in A$ は自明。 次に $a \in A$ とする。$b=0$ なら $a+1-b=a+1 \in \mathbb{N}$. また、$b \neq 0$ なら $b-1 \in \mathbb{N}$ (はじめに示したこと). よって $(a+1)-b=a+(b-1) \in \mathbb{N}$ ((i) より). これで A が条件 $(*)$ をみたすことが言えた。(iii) $A_n \stackrel{\rm def}{=} \{a \in \mathbb{N}\ a \leq n \text{ または } n+1 \leq a\}$ が条件 $(*)$ をみたすことが n に関する帰納法で分かる。従って $\mathbb{N} \subset A_n$. つまり $n<a<n+1$ となる自然数 a は存在しない。
問 1.1.1:容易。
問 1.1.2:単純計算。
問 13.1.2: $b-a$ は非負整数だから自然数（問 13.1.1）。また、$z \to z+a$ により $\{z \in \mathbb{N}\ ;\ 0 < z \leq b-a\}$ から A への全単射が得られる。
問 13.1.3: 示せない。 連続の公理（より直接的にはアルキメデスの原理）を使う必要がある。
問 1.2.1: $m_1 < m_2$ かつ m_1, m_2 が共に $\max A$ だとする。$m_2 \in A$ より m_1 は A の上界でない (矛盾)。$\min A$ についても同様。
問 1.2.4: $m \in A \cap [\ell, u] \subset A$ だから $A \subset [-\infty, m]$ を言えばよい。$A \subset [-\infty, u]$ より $A = (A \cap [-\infty, \ell)) \cup (A \cap [\ell, u])$. $\ell \in A \cap [\ell, u]$ だから $\ell \leq m$. 従って $\ell \leq m$ より $A \cap [-\infty, \ell) \subset [-\infty, m]$. また m の定義より $A \cap [\ell, u] \subset [-\infty, m]$. 以上より $A \subset [-\infty, m]$.
問 1.2.5: $d \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $x \in \mathbb{Z}$ に対し上のような $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \{0, .., d-1\}$ が 2 つ以上ないことの証明は難しくない。ここでは存在を示す。先ず、$A = \{a \in \mathbb{Z}\ ;\ ad \leq x\}$ に最大値が存在することを示す。その為に 例 1.2.3(a) の 2 条件を検証する。
$A \neq \emptyset$ であること：$-|x|d \leq x$. 故に $-|x| \in A$.
$A \subset [-\infty, |x|]$ であること：全ての $a \in A$ に対し $ad \leq x \leq |x| \leq d|x|$.
次に $q = \max A$, $r = x - dq$ が求めるものであることを示す。実際、$qd \in A$, $(q+1)d \notin A$ より $qd \leq x < (q+1)d$. 従って、$r = x - qd \in [0, d) \cap \mathbb{N}$.
問 1.3.1 : $m_1 < m_2$ かつ m_1, m_2 が共に $\sup A$ だとする。このとき、m_1 が $\sup A$ であることと (U) より $A \subset [-\infty, m_1]$. 一方、m_2 が $\sup A$ であることと (S) より $(m_1, m_2] \cap A \neq \emptyset$. ところが、これは $A \subset [-\infty, m_1]$ に矛盾する。従って $\sup A$ は高々ひとつしか存在しない。$\inf A$ についても同様に示せる。
問 1.3.2：$\sup(-\gamma A + \beta) = -\gamma \inf A + \beta$ を示す (他式も同様に示せる)。なお、この証明は 補題 1.3.7 のものと本質的に同じである。$a_* = \inf A$, $m = -\gamma a_* + \beta$ とする。$m = \sup(-\gamma A + \beta)$ の一致を言う為、定義 1.3.1 の条件 (U) (S) を検証する。(U): 全ての $a \in A$ に対し $a_* \leq a$ なので $-\gamma a + \beta \leq -\gamma a_* + \beta$. (S): $x < -\gamma a_* + \beta$ 即ち $a_* < (\beta - x)/\gamma$ なら $\exists a \in A$, $a < (\beta - x)/\gamma$. この a に対し、$x < -\gamma a + \beta$.
問 1.3.3: $A^{-1} = \{1/a\ ;\ a \in A\}$ として、$\sup A^{-1} = 1/\inf A$ を示すために 定義 1.3.1 の条件 (U),(S) を検証する。任意の $a \in A$ に対し $\inf A \leq a$, 従って、$1/a \leq 1/\inf A$. これで、(U) が分かった。一方 $x < 1/\inf A$ とすると、$\inf A < 1/x$ だから、$\inf A \leq a < 1/x$ を満たす $a \in A$ が存在し、この a は $x < 1/a \leq 1/\inf A$ を満たす。これで (S) が分かった。$\inf A^{-1} = 1/\sup A$ を示すには、同様にして定義 1.3.1 の条件 (L),(I) を検証すればよい。
問 1.3.4: (i),(ii) は 命題 1.3.8 から分かる。(i),(ii) から (iii) が分かる。
問 1.3.6: $[0,1)$ を小区間 $[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N})$ $(k=1, .., N)$ に分割すると、小区間のうちどれかには x_j うち 2 個以上が入る（ディリクレの**部屋割り論法**）。従って、$0 \leq j < k \leq N$ であり $|x_k - x_j| < 1/N$ を満たすものが存在する。この不等式を $k-j$ で割ればよい。
問 1.4.3:問 1.3.2 の帰結
問 1.4.4: 問 1.3.4 の帰結
問 1.4.5: <u>真中の不等号</u>:命題 1.4.4 (a) による。<u>右端の不等号</u>: 今、$\beta = \sup_A f + \sup_A g$ なら任意の $a \in A$ に対し $(f+g)(a) \leq \beta$. 従って 命題 1.4.4 (b) より $\sup_A (f+g) \leq \beta$. <u>左端の不等号</u>: 上と同様。
問 1.4.6: 第 1 式を示す。簡単のため $A = \cup_{b \in B} A_b$ とおく。
<u>左辺 $\geq$ 右辺</u>：$\forall b \in B$ に対し $A \supset A_b$ なので $\sup A \geq \sup A_b$. 従って $\sup A \geq \sup\limits_{b \in B} \sup A_b$
<u>左辺 $\leq$ 右辺</u>：$\forall a \in A$, $\exists b \in B$, $a \in A_b$. この b に対し $a \leq \sup A_b$ なので、$a \leq \sup\limits_{b \in B} \sup A_b$. 更に

$a \in A$ は任意なので、$\sup A \leq \sup_{b \in B} \sup A_b$. 第 2 式も上と同様に示せる。

問 1.4.7: (i),(ii): $\{f(a,b)\,;\,(a,b) \in A \times B\} = \cup_{b \in B}\{f(a,b)\,;\,a \in A\} = \cup_{a \in A}\{f(a,b)\,;\,b \in B\}$ と書き、予選決勝法 (問 1.4.6) を適用する。(iii) : 任意の $(a,b) \in A \times B$ に対し $f(a,b) \leq \sup_{a' \in A} f(a',b)$. 従って、任意の $a \in A$ に対し $\inf_{b \in B} f(a,b) \leq \inf_{b \in B} \sup_{a' \in A} f(a',b)$. 更に両辺の $\sup_{a \in A}$ をとれば結論を得る。

第 2 章

問 2.1.1: $a \in \mathbb{R}$ の場合: (2.1) より、$n \geq n_0$ なら $a_n \in \mathbb{R}$. 故、$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$. $a = \infty$ の場合: (2.1) より、$n \geq n_0$ なら $a_n > 1/\varepsilon > 0$. 故、$|a_n| = a_n > 1/\varepsilon$. $a = -\infty$ の場合: (2.1) より、$n \geq n_0$ なら $a_n < -1/\varepsilon$. 故、$|a_n| = -a_n > 1/\varepsilon$.

問 2.1.2：$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $n \geq n(\varepsilon)$, $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. $\varepsilon = 1/2$ とすると $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ は高々一つの整数しか含まない。従って、その整数を b とすると $n \geq n(1/2)$ で $a_n = b$. 一方、再び $\varepsilon > 0$ を任意とすると $n \geq n(1/2) \vee n(\varepsilon)$ で $b = a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, 特に $|b - a| < \varepsilon$. これが、任意の $\varepsilon > 0$ で成り立つには $a = b$ が必要。

問 2.1.3：$a \in \mathbb{R}$ の場合：$\varepsilon \in (0,\infty)$ を任意とする。$\lim_n (1/n) = 0$(例 2.1.2) より、有限個の n を除き $2/n < \varepsilon$. 今、$D \cap (a - 1/n, a + 1/n) \neq \emptyset$ より $a_n \in D \cap (a - 1/n, a + 1/n)$ を選べる。このとき、$|a_n - a| < 2/n < \varepsilon$. $a = \pm\infty$ の場合も同じ考え方で示せる。

問 2.1.4：$\varepsilon > 0$ に対し、$\{n \in \mathbb{N}\,;\,a_n \notin B(a,\varepsilon)\}$ は有限集合なら $\{n \in K_i\,;\,a_n \notin B(a,\varepsilon)\}$ $(i = 1,2)$ は共に有限集合。また、その逆も真。

問 2.1.5： 問 2.1.2 または 問 2.1.4 による。

問 2.1.6: 定義 2.1.1 後の注 3 と、次の関係による：$B(a,\varepsilon/2) \leq \overline{B}(a,\varepsilon) \leq B(a,2\varepsilon)$.

問 2.1.7: (i): 両端の不等号は定義から明らか。真中は 「$\sup\inf \leq \inf\sup$」(問 1.4.7) による。(ii):次のようにして判る：

$$\begin{aligned}\inf_{m \geq 0} \sup_{n \geq m} a_n < a \quad &\overset{\inf \text{ の性質}}{\Longrightarrow} \quad \exists m \in \mathbb{N},\ \sup_{n \geq m} a_n < a \overset{\sup \text{ の性質}}{\Longrightarrow} \exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \geq m,\ a_n < a \\ &\overset{\sup \text{ の性質}}{\Longrightarrow} \quad \exists m \in \mathbb{N},\ \sup_{n \geq m} a_n \leq a \overset{\inf \text{ の性質}}{\Longrightarrow} \inf_{m \geq 0} \sup_{n \geq m} \leq a\end{aligned}$$

(iii) も同様。(iv): 次のようにして判る：

$$\begin{aligned}a < \inf_{m \geq 0} \sup_{n \geq m} a_n \quad &\overset{\inf \text{ の性質}}{\Longrightarrow} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ a < \sup_{n \geq m} a_n \overset{\sup \text{ の性質}}{\Longrightarrow} \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \geq m,\ a < a_n \\ &\overset{\sup \text{ の性質}}{\Longrightarrow} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ a < \sup_{n \geq m} a_n \overset{\inf \text{ の性質}}{\Longrightarrow} a \leq \inf_{m \geq 0} \sup_{n \geq m} a_n.\end{aligned}$$

(v) も同様。

(vi):$\Longrightarrow$: $\underline{\lim}_n a_n \leq \overline{\lim}_n a_n$ なので $\overline{\lim}_n a_n \leq a \leq \underline{\lim}_n a_n$ を言えばよい。$\overline{\lim}_n a_n \leq a$ を言うため、$a < \overline{\lim}_n a_n$ を仮定。このとき、$\exists x \in \mathbb{R}, a < x < \overline{a}$. そうすると無限個の n に対し $x < a_n$. これは $a_n \longrightarrow a$ に反する。$a \leq \underline{\lim}_n a_n$ の証明も同様。

$\Longleftarrow$: 仮定より以下が成立：

$(*1)$ $b < a$ なら有限個の n を除き $b < a_n$ （$a = \underline{\lim}_n a_n$ より）.

$(*2)$ $a < b'$ なら有限個の n を除き $a_n < b'$ （$a = \overline{\lim}_n a_n$ より）.

$a \in \mathbb{R}$ なら $(*1)$, $(*2)$ より $a_n \longrightarrow a$. $a = \infty$ なら $(*1)$ より $a_n \longrightarrow a$. $a = -\infty$ なら $(*2)$ より $a_n \longrightarrow a$.

問 2.2.1: 命題 2.2.4 の証明と同様。

問 2.2.2: 任意の $n \geq m$ に対し、$\inf_{n \geq m} a_n \leq a_n \leq \sup_{n \geq m} a_n$. これと 命題 2.2.2 による。

問 2.2.3: (a_n) の存在は次のようにして判る。$s = \sup A$ とし、数列 (s_n) を任意の $n \in \mathbb{N}$ で $s_n < s$ かつ $s_n \longrightarrow s$ を満たすようにとる（実際 $s = \infty$ なら $s_n = n$, $s < \infty$ なら $s_n = s - n^{-1}$ とすればよい)。sup の性質から、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $s_n < a_n \leq s$ を満たす $a_n \in A$ が存在する。このとき、はさみうちの原理から $a_n \longrightarrow s$. (b_n) の存在も同様にして判る。

問 2.2.4: $\varepsilon > 0$ を任意とする。仮定より $\exists n_0, \forall j \geq n_0, |a_j|/j < \varepsilon$. 更に、$M = \max_{1 \leq j \leq n_0} |a_j|$ に対し $n > n_0 \vee (M/\varepsilon)$ なら $\frac{1}{n} \max_{1 \leq j \leq n} |a_j| \leq (M/n) \vee (\max_{n_0 \leq j \leq n} |a_j|/j) < \varepsilon$.

問 2.2.8: 右半分を示す。$\overline{a} = \overline{\lim}_n a_n$ とする。$\overline{a} = \infty$ なら示すことはないので、$\overline{a} < \infty$ とする。$\overline{a} < a$ なら、$\sup_{n \geq m} a_n \leq a$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在する。従って $n > m$ なら、

$(*)\ \ \dfrac{s_n}{b_n} \le \dfrac{s_m}{b_n} + \dfrac{(b_n - b_m)a}{b_n}.$

今、$(*)$ の右辺について、m は固定されているので、第 1 項, 第 2 項は共に $n \to 0$ で 0 に収束する。従って、演算の連続性より $\lim_n ((*)\ \text{右辺}) = a$, 従って特に $\overline{\lim}_n ((*)\ \text{右辺}) = a$. また、極限は順序を保つから $\overline{\lim}_n s_n/n \le \overline{\lim}_n ((*)\ \text{右辺}) = a$. $a \in (\overline{a}, \infty)$ は任意なので結論を得る。左半分も同様。

問 2.3.2: (i):f の単調性より、$\forall \ell \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \ge m, f(c_\ell) \le f(c_n)$. 従って、定理 2.3.1 の証明より、$\lim_n f(c_n) = \underbrace{\sup_n f(c_n)}_{s\text{ と置く。}} \le \underbrace{\sup_{a<x<c} f(x)}_{t\text{ と置く。}}$. 所が、$s < t$ と仮定すると、sup の性質（t の方）より $s < f(y) \le t$ を満たす $y \in (a, c)$ が存在する。この y に対し、全ての n について $c_n < y < c$. これは、$c_n \to c$ に反する。従って $s = t$. (ii) の証明も (i) と同様。

問 2.3.3: 定理 2.3.1 と sup sup の可換性（問 1.4.7）による。

問 2.3.4: (i) f は全射だから $n = f(a_n)$, $-n = f(b_n)$ となる a_n, b_n が存在する。(ii) 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し、n が十分大きければ $f(b_n) \le s \le f(a_n)$. よって中間値定理より $s = f(c)$ を満たす $c \in \mathbb{R}$ が存在する。

問 2.3.5: $g(x) = f(x) - x$ とおくと、$g \in C([0,1] \to \mathbb{R})$, $g(0) \ge 0 \ge g(1)$. よって中間値定理より、$g(c) = 0$ となる $c \in [0,1]$ が存在する。

問 2.3.6: f が最大値 $f(m)$ を持つとする。このとき、$g(x) = f(a+x) - f(x)$ は連続かつ $g(m) \le 0 \le g(m-a)$. よって中間値定理より $g(b) = 0$ となる b が存在する。f が最小値を持つ場合も同様。

問 2.3.7: (i) :指数数列の極限（例 2.1.3）より $\forall \varepsilon \in (0,1), \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \ge m, (1-\varepsilon)^n < a < (1+\varepsilon)^n$. 従って $n \ge m$ で $1 - \varepsilon < a^{1/n} < 1 + \varepsilon$. (ii): 仮定より、$\forall \varepsilon \in (0,1), \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \ge m, a_n/a_{n-1} < a + \varepsilon$. 従って、$a_n \le (a+\varepsilon)^{n-m} a_m$, つまり $a_n^{1/n} \le (a+\varepsilon)\left(\frac{a_m}{(a+\varepsilon)^m}\right)^{1/n}$. (i) より、有限個の n を除き $\left(\frac{a_m}{(a+\varepsilon)^m}\right)^{1/n} < 1 + \varepsilon$. 以上から、有限個の n を除き $a_n^{1/n} < (a+\varepsilon)(1+\varepsilon) \le a + (a+2)\varepsilon$. $a = 0$ の場合はこれで結論を得る。$a > 0$ なら $\forall \varepsilon \in (0, 1 \wedge a), \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \ge m, a - \varepsilon < a_n/a_{n-1}$. よって先と同様に $a_n^{1/n} \ge (a-\varepsilon)\left(\frac{a_m}{(a-\varepsilon)^m}\right)^{1/n}$. (i) より、有限個の n を除き $\left(\frac{a_m}{(a-\varepsilon)^m}\right)^{1/n} > 1 - \varepsilon$. 以上から、有限個の n を除き $a_n^{1/n} > (a-\varepsilon)(1-\varepsilon) \ge a - (a+1)\varepsilon$. 以上を併せれば結論を得る。(iii)：$\max_{1 \le j \le n} a_j \le \left(\sum_{j=1}^n a_j^n\right)^{1/n} \le n^{1/n} \sup_{n \ge 1} a_n$. また (ii) より $n^{1/n} \to 1$. 以上と、はさみうちより結論を得る。

問 2.3.9: a_n は非減少、b_n は非増加、$a_n - b_n \le (a_{n-1} - b_{n-1})/2$. 以上と単調列定理から結論を得る。

問 2.3.10: $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - b^2 + 4ac$ より $S \ne \emptyset$ と $b^2 - 4ac \ge 0$ は同値。また、 $b^2 - 4ac \ge 0$ なら $f(x) = a(x - s_+)(x - s_-)$. これより、その他の事柄も分かる。

問 2.3.11: (i): $x_n \le x_{n+1}$ かつ $x_n \le f(x_n)$ は帰納法で容易に分かる。単調列定理により x_n は極限 $(a, b]$ を持つ。更に、「$x \in (m, b)$ ならば、$f(x) < x$」 を満たす $m \in (a, b)$ が存在するとする。全ての n に対し $f(x_n) \le x_n$ だから $x_n \le m$. 従って $a \le m$. (ii): (i) と同様。(iii): $x_{n+1} = f(x_n)$ で $n \to \infty$ とする。

問 2.3.12: (i): 2 乗して考えれば 問 2.3.10 に帰着。(ii): (i) と 問 2.3.11 より x_n は収束し、極限 x_∞ は $x_\infty = f(x_\infty)$ を満たす。これを解いて、$x_\infty \ge 0$ を考慮すれば $x_\infty = s$.

問 2.3.13: (i):$g = f \circ f$ は非減少、$x_{2n+2} = g(x_{2n})$, $x_{2n+3} = g(x_{2n+1})$ だから、問 2.3.11 より $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ はそれぞれ単調数列。また、g は有界だから、$(x_{2n}), (x_{2n+1})$ も有界。従って、$(x_{2n}), (x_{2n+1})$ は収束。また、I は閉区間だから、極限は I に属する。

(ii): (x_{2n}) の極限を t と書くと、$x_{2n+2} = g(x_{2n})$ だから $n \to \infty$ として $t = g(t)$. よって、$s = t$. 同様に (x_{2n+1}) の極限も s に等しい。以上と 問 2.1.4 より $x_\infty = s$.

(iii) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は非増加、有界、連続。また、$f \circ f(s) = s$ となる $s \in I$ は $s = (-b + \sqrt{b^2 + 4a})/(2a)$ のみ。よって、(ii) より $\lim_n x_n = s$.

問 2.4.8: 方程式を $a_n x^{n+1} = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1}) x^j$ と変形する。$|x| > 1$ と仮定すると $a_n |x|^{n+1} \le a_0 + (a_n - a_0)|x|^n \le a_n |x|^n$ より $|x| \le 1$ (矛盾)。

問 2.5.2: 仮定より $\exists m \in \mathbb{N}, \forall j \ge m, a_j \le b_j - b_{j+1}$. $n \ge m$ なら

$$s_n = s_{m-1} + \sum_{j=m}^n a_j \le s_{m-1} + \underbrace{\sum_{j=m}^n (b_j - b_{j+1})}_{= b_m - b_{n+1}} \le s_{m-1} + b_m.$$

上式から (s_n) は上に有界、従って収束する。
問 2.5.3: $p \geq 2$ なら、$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{2n^2} \geq \frac{1}{2n^p}$. 従って階差級数との比較 (問 2.5.2) より、$\sum n^{-p}$ は収束。
問 2.5.4: 仮定より $\exists m,\, b_m - a_m > 0$. $B - A = \sum_0^\infty (b_n - a_n) \geq b_m - a_m > 0$.
問 2.5.5: 上に有界な非減少数列は $a_n = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})$ と書くことにより絶対収束級数である。
問 2.5.6: $|a_{n+1}/a_n|$ は (i),(ii),(ii) の順に、$(n/(n+1))^p \to 1$, $1/(n+1) \to 0$, $\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \to 1$.
問 2.5.7: (a) $\Rightarrow$ (b) は 命題 2.5.4 による。また、(b) $\Rightarrow$ (c) は $x_n = x_0 + \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})$ と書くと、右辺の級数は絶対収束することによる。
問 2.5.8：一意性：$x, y \in S$ が不動点なら、$|x-y| = |f(x) - f(y)| \leq r|x-y|$.
上式が、$r < 1$ で成り立つには $x = y$ が必要。存在：x_n はヒントのように定める。このとき、$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq r|x_n - x_{n-1}|$. 従って、極限 $x = \lim_n x_n$ が存在する (問 2.5.7)。更に、縮小写像の定義式で $y = x_n$ として、$n \to \infty$ とすれば、$f(x_n) \longrightarrow f(x)$ が分かる。そこで、$x_n = f(x_{n-1})$ で $n \longrightarrow \infty$ として $x = f(x)$ を得る。
問 2.5.9: $(\sum_0^n a_j x^j)(\sum_0^n b_j x^j) = \sum_0^n c_j x^j + \sum_{\substack{j,k \leq n \\ j+k \geq n}} a_j x^j b_k x^k$. 右辺第１項 の絶対収束と右辺第２項 $\to 0$ を言う。
問 2.5.12: (i): $f(x) + f(-x) = \displaystyle\sum_0^\infty a_n(x^n + (-x)^n) \overset{\text{命題 2.5.9}}{=} 2\sum_0^\infty a_{2n}x^{2n}$. となり、示すべき式の一方を得る。他方も同様。(ii):(2.7) による。

第 3 章

問 3.1.1: $\lim_n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp(-x)$ を用いる。
問 3.1.2: $a_n = n^n/n!$ に対し $a_{n+1}/a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$. 従って、問 2.3.7 より $a_n^{1/n} \to e$.
問 3.1.3：前半を示せば十分。(3.3) より $|e_n(a_n)\exp(-a_n) - 1| \leq \frac{a_n^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{a_n^2}{2n}$. $a_n/\sqrt{n} \to 0$ より $\frac{a_n^2}{2n} \to 0$. 次に $\frac{a_n^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ を言う。十分大きな n に対し $a_n \leq \sqrt{n}$ だから、$b_n \overset{\text{def.}}{=} \frac{n^{(n+1)/2}}{(n+1)!} \to 0$ を言えば十分。$b_{n+1}/b_n \to 0$ を示すことが出来るので、これと 問 2.3.7 より $b_n \to 0$.
問 3.1.5: $0 \leq p_{m,n} \leq p_{m,n+1}$ より $e_n(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!}p_{m,n} \leq \sum_{m=0}^{n+1} \frac{x^m}{m!}p_{m,n+1} = e_{n+1}(x)$.
問 3.1.6：(i), (ii) は単純計算。(iii): $x \geq 1$ なら $\ell_n(x) \geq 0$. $0 \leq y$ なら問 3.1.5 より $e_n(y) \leq e_{n+1}(y)$. 従って (ii) より

$$e_{n+1} \circ \ell_{n+1}(x) = x = e_n \circ \ell_n(x) \leq e_{n+1} \circ \ell_n(x)$$

一方、$-(n+1) < y < z$ なら $e_{n+1}(y) < e_{n+1}(z)$ だから上式から $\ell_{n+1}(x) \leq \ell_n(x)$. (iv): (i), (iii) から分かる。(v): (iii), (iv) と単調列定理による。
問 3.1.8: $c_n = \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} = \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} z^m w^{n-m} = \frac{1}{n!}(z+w)^n$ 従って、
$\exp(z+w) = \sum_0^\infty c_n = \sum_0^\infty a_n \sum_0^\infty b_n = \exp z \exp w$.
問 3.2.1: 指数関数の指数法則 (命題 3.1.3) による。
問 3.2.2: 双曲関数に対する加法定理 (問 3.2.1) に帰着する。
問 3.2.3: $\cos(x/\mathbf{i}) = \mathrm{ch}\,(x)$, $\sin(x/\mathbf{i}) = \mathrm{sh}\,(x)/\mathbf{i}$. 従って、共に非有界。
問 3.3.1: (i) は対数の差の評価（命題 3.3.1）、(ii) は (i) による。(ii) と 命題 2.5.4(d) より $c_n \overset{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{n-1}(\gamma_j - \gamma_{j+1})$ は、ある c に収束する。更に 問 2.5.4 より $c < \sum_1^\infty (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1$. 以上より $\gamma_n = \gamma_1 - c_n = 1 - c_n \to 1 - c > 0$.
問 3.3.2: $x \geq 0$ と $x \leq 0$ の場合に分け、対数の差の評価（命題 3.3.1）を使えば、ヒントの不等式が分かる。(a) $\Rightarrow$ (b):仮定より $|a_n| \to 0$ だから、十分大きい n に対し $|a_n| \leq 1/2$. 従って、ヒントの不等式より $|\log(1+a_n)| \leq |a_n|/2$. (b) $\Rightarrow$ (a):仮定より $\log(1+a_n) \to 0$. よって $a_n = \exp(\log(1+a_n)) - 1 \to 0$. 従って、ヒントの不等式より $|a_n|/2 \leq |\log(1+a_n)|$. (b) $\Rightarrow$ (c): (c) は、$\sum_0^\infty \log(1+a_n)$ の収束と同値である。
問 3.3.3: $e_n \circ \ell_n(x) = x$ で $n \nearrow \infty$ とすれば (3.5) より $\exp \ell(x) = x$.
問 3.3.4: (i)$n = 0$ なら正しいので、$E_0, .., E_{n-1}$ が所期不等式を満たすとする。このとき、

$$\frac{|E_n|}{(2n)!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|E_k|}{(2n-2k)!(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^{-2k}}{(2n-2k)!} = r^{-2n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^{2n-2k}}{(2n-2k)!}}_{\leq \mathrm{ch}\, r - 1}.$$

問 3.3.5: (i)$n=0$ なら正しいので、$b_0,..,b_{n-1}$ が所期不等式を満たすとする。このとき、

$$\frac{|b_n|}{n!} \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|b_k|}{(n+1-k)!k!} \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^{-k}}{(n+1-k)!} = r^{-(n+1)} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^{n+1-k}}{(n+1-k)!}}_{\le e^r - r - 1}.$$

問 3.4.1: (3.8): $x \ge 0$ なら $x\log a \le x \log b$. 従って、

$$\begin{aligned} b^x - a^x \quad &= \quad \exp(x\log b) - \exp(x\log a) \overset{\text{命題 3.1.3}}{\le} (x\log b - x\log a)\underbrace{\exp(x\log b)}_{=b^x} \\ &\overset{\text{命題 3.3.1}}{\le} \quad \frac{b-a}{a} x b^x = (b-a)\frac{b}{a} x b^{x-1}. \end{aligned}$$

これで、$x \ge 0$ の場合の右半分を得る。左半分も同様。
$x \le 0$ の場合は $x \ge 0$ の場合に帰着する。実際、$x \ge 0$ の場合 より、

$$-(a/b)xa^{-x-1}(b-a) \le b^{-x} - a^{-x} \le -(b/a)xb^{-x-1}(b-a).$$

上式両辺に $a^x b^x$ を掛けて整理すれば、所期不等式を得る。
(3.9) で $a \ge 1$ の場合: $x\log a \ge y \log a$ なので

$$a^x - a^y = \exp(x\log a) - \exp(y\log a) \overset{\text{命題 3.1.3}}{\le} (x\log a - y\log a)\underbrace{\exp(x\log a)}_{=a^x} = (x-y)a^x\log a.$$

これで、(3.9) の右半分を得る。左半分も同様。
(3.9) で $0 < a \le 1$ の場合: $a \ge 1$ の場合に対する結果から、

$$(x-y)(1/a)^y \log(1/a) \le (1/a)^x - (1/a)^y \le (x-y)(1/a)^x \log(1/a).$$

上式両辺に a^{x+y} を掛けて整理すれば、(3.9) を得る。
問 3.4.3: $n^{xn}/n! = (n^{x-1}\cdot n/(n!)^{1/n})^n$ と問 3.1.2 による。
問 3.4.4: (i) 全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$ 特に $x=0$ として $f(0)=0$. このとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$(*)$ $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$ 故に $f(-x) = -f(x)$.

一方、$q \in \mathbb{Q}$ とする。$q > 0$ なら $q = n/m$, $m, n \in \mathbb{N} \cap [1,\infty)$ と書け、

$$f(n/m) = f(1/m) + f((n-1)/m) = ... = nf(1/m).$$

上式で $n=m$ とすると $f(1/m) = (1/m)f(1)$ が判る。更にこれを上式に代入して $f(q) = qf(1)$. また、$q<0$ なら $(*)$ より $f(q) = -f(|q|) = -|q|f(1) = qf(1)$. 以上と、$f$ の連続性、及び有理数の稠密性より結論を得る。(ii): $f(x) = \log g(x)$ として (i) に帰着する。
問 3.4.5: $M = \sup_{n\ge1} |a_n| < \infty$ とする。命題 3.4.1, 例 2.5.5 より $\sum_{n=1}^\infty \left|\frac{a_n}{n^s}\right| \le M \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, s}} < \infty$.
問 3.4.6: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \ge 1/(2n^2)$. 従って

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{p-1} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^{p-1} \overset{(3.8)}{\ge} \frac{n}{n+1}(p-1)\left(\frac{1}{n+1}\right)^{p-2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \ge cn^{-p}.$$

ここで c は n に無関係な正数。従って階差級数との比較 (命題 2.5.4(d)) より、$\sum n^{-p}$ は収束。

第 4 章

問 4.1.1: 順に、1,0,0
問 4.1.2: (i): $p<q$, $p=q$, $p>q$ に応じそれぞれ 0, a_p/b_p, ∞. (ii) $p<1$, $p=1$, $p>1$ に応じそれぞれ 0, 1, ∞.
問 4.2.1: (4.5) は $x \to a$ という極限に関する性質なので、a の近傍だけで考えてよい。
問 4.2.2: $\delta_i \in \mathbb{R}^d$ の第 i 座標は 1, その他の座標は 0 とする。このとき、$x = \sum_{i=1}^d x_i\delta_i$ より $|q(x)| \overset{(1),(2)}{\le} \sum_{i=1}^d |x_i| q(\delta_i)$, 特に、$|x| = 1$ なら $|q(x)| \le C \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^d q(\delta_i)$. よって、

$|q(x)-q(y)| \overset{(2)}{\le} q(x-y) \overset{(1)}{\le} |x-y|C.$
問 4.2.3：(i) 仮定より $f(0)=0$. また、$x \to 0$ とすると、$x=|x|(x/|x|)$. 従って、$|f(x)| = |x|f(x/|x|) \to 0$. (ii) $\alpha=0$ で $f \not\equiv$ (定数) のとき：$f(y) \neq f(y')$ とする。$t \to 0$ なら $ty \to 0$, $ty' \to 0$. ところが、$\lim_{r\to 0} f(ry) = f(y) \neq f(y') = \lim_{r \to 0} f(ry')$. よって $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない。$\alpha<0$ で $f \not\equiv 0$ のとき：$f(y) \neq 0$ とすると、$|f(ty)| = t^{\alpha}|f(y)| \to \infty$ $(t \to 0)$.
問 4.2.4: f は $x \neq 0$ では連続。$x=0$ での連続性に関しては問 4.2.3 により判定できる。
問 4.2.5: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ は共に稠密なので、$f(x)=1$ をみたす x のいくらでも近くに $f(y)=0$ を満たす y がある。また、$f(x)=0$ をみたす x のいくらでも近くに $f(y)=1$ を満たす y がある。
問 4.2.6: $f(x)=(e^x-1)/x$ とする。$x \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ に対し $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n/(n+1)!$. 右辺の巾級数は全ての $x \in \mathbb{C}$ に対して絶対収束するので、それを $g(x)$ とおく。$x \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $x \to 0$ のとき $f(x)=g(x) \overset{\text{例 4.2.6}}{\to} g(0)=1$. $\sin x/x \to 1$, $(1-\cos x)/x^2 \to 1/2$ も同様にして分かる。
問 4.3.1: $x \in [0,1)$, $N \in \mathbb{N}$ に対し $\sum_{n=0}^{N} g_n(x) \le f(x) \le \sum_{n=0}^{\infty} g_n(1-)$. $x \to 1$ として、$\sum_{n=0}^{N} g_n(1-) \le f(1-) \le \sum_{n=0}^{\infty} g_n(1-)$. 次に $N \to \infty$ とし、挟み撃ちの原理で結論を得る。

第 5 章

問 5.1.1: $f(x)=(f_j(x))_{j=1}^d$, $g(x)=(g_j(x))_{j=1}^d$ と書くと $f(x)\cdot g(x) = \sum_{j=1}^d f_j(x)g_j(x)$. この式に命題 5.1.5 を適用する。
問 5.1.2: n に関する帰納法による。
問 5.1.3: 命題 3.4.1 で述べた $a^x - a^y$ の評価とはさみうちの原理を用いる。
問 5.1.5: 命題 5.1.10 で $f(y)=\log y$ とする。
問 5.1.6: (i) $f_1'(x) = m\sin^{m-1}x\cos x$, $f_2'(x) = mn\sin^{m-1}(x^n)\cos(x^n)x^{n-1}$. (ii): $f_1'(x) = x^x(\log x+1)$, $f_2'(x) = x^{x^x}(x^x(\log x+1)\log x + x^{x-1})$.
問 5.1.7: $(\frac{1}{|f(x)|})' = -\frac{f(x)\cdot f'(x)}{|f(x)|^3}$, $(f(x)\frac{1}{|f(x)|})' = f'(x)\frac{1}{|f(x)|} - f(x)\frac{f(x)\cdot f'(x)}{|f(x)|^3}$.
問 5.2.1: 例 5.1.2, 例 5.1.8, 例 5.1.11, と例 5.2.2 の論法による。
問 5.2.5: (5.7) より、$a_n \equiv b_n$ が分かる。
問 5.3.1 : 命題 5.1.4 と同様。
問 5.3.3: できない。実際、巾級数で 例 5.2.5 のように表されるなら、(5.7) 及び $f^{(m)}(0)=0$ より 全ての $m \in \mathbb{N}$ に対し $a_m=0$. 従って $f\equiv 0$. これは矛盾。
問 5.3.4: 例 5.3.3 の f を用い $g(x) = \frac{f(R^2-|x|^2)}{f(R^2-|x|^2)+f(|x|^2-r^2)}$ とする。
問 5.3.5: $f_p \in C^{\infty}(0,\infty)\cap C^{\infty}(-\infty,0)$. また、$x \neq 0$ なら $f_p^{(m)}(x) = f_{p-m}(x)$ （但し $m>p$ なら $f_{p-m}\equiv 0$ とする）。故に原点 0 での可微分性のみが問題。$0 \le m \le p-2$ なら帰納的に次が判る：

$$f_p^{(m)}(0)=0 \text{ かつ } D_{\pm}f_p^{(m)}=0.$$

従って、$f_p^{(0)},..,f_p^{(p-2)}$ は 原点 0 も含めて可微分、ところが、$f_p^{(p-1)}(x) = f_1(x) = |x|$ は原点 0 で微分不可能（例 5.1.3）。
問 5.4.2: $f(x) = c_0x + \frac{c_1x^2}{2} + .. + \frac{c_nx^{n+1}}{n+1}$ とおくと、f は多項式だから $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $f'(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n$. 仮定より $f(0)=f(1)=0$. よって平均値定理より $f'(x)=0$ を満たす $x \in (0,1)$ が存在する。
問 5.4.3: $x_n \to \infty$ となる任意の数列 (x_n) をとる。平均値定理より $f(x_n+1)-f(x_n) = f'(y_n)$ を満たす $y_n \in (x_n, x_n+1)$ が存在する。$x_n < y_n$ より $y_n \to \infty$. よって、$f'(y_n) \to c$.
問 5.4.5: $\delta_f = f(b)-f(a)$, $\delta_g = g(b)-g(a)$ と書く。次の 2 つを示せばよい。

(∗1) $\exists c \in (a,b)$, $\delta_f g'(c) = \delta_g f'(c)$.

(∗2) $g'(c) \neq 0$.

(∗1) 両辺を $\delta_g g'(c)$ で割れば所期等式を得る。
(∗1) の証明：$F(x) = \delta_g f(x) - \delta_f g(x)$ として $\exists c \in (a,b)$, $F'(c)=0$ を言えばよい。$F \in C([a,b])$ なので最大・最小値の存在定理（定理 5.4.4）より $\exists c_1 \in [a,b]$, $F(c_1) = \max_{[a,b]} F$. また、$\exists c_2 \in [a,b]$. $F(c_2) = \min_{[a,b]} F$.
$F(c_1)=F(c_2)$ なら、F は定数。従って全ての $c \in (a,b)$ が $F'(c)=0$ を満たす。
$F(c_1) > F(c_2)$ なら、$F(b)-F(a) = \delta_g\delta_f - \delta_f\delta_g = 0$. により $\{c_1,c_2\} \not\subset \{a,b\}$. 従って、$c \in \{c_1,c_2\}\backslash\{a,b\}$ とすれば $c \in (a,b)$. しかも c は F の最大点または最小点なので、命題 5.4.3 より $F'(c)=0$.
(∗2) の証明: $g'(c)=0$ と仮定すれば (a) より $f'(c)\neq 0$. これと (∗1) から $\delta_g=0$ となり (b) に反する。
問 5.4.7: $\partial_t h_t(x) = ct^{-\frac{d}{2}-2}(|x|^2-td)/2$. 従って $t=|x|^2/d$ までは非減少（温度上昇）、それ以

後は非増加（温度下降)。
問 5.4.9: (a) $\Rightarrow$ (b): (a,b) 上 $(e^{-F}u-G)'=e^{-F}(-F'u+u')-G'=0$. よって 定理 5.4.6(c) より $e^{-F}u-G=c$ (定数). (a) $\Leftarrow$ (b): $u'=F'e^F(G+c)+G'e^F=F'u+G'e^F$.
問 5.4.10: (a) $\Rightarrow$ (b): n に関する帰納法による。$n=1$ の場合は 問 5.4.9 より正しい。$n-1$ まで正しいとする。今、$Q(x)=(x-b_1)^{m_1-1}\prod_{j=2}^r(x-b_k)^{m_k}$, $v=u'-b_1u$ とおく。仮定より $Q(D)v=P(D)u=0$. よって帰納法の仮定から v は $n-1$ 個の関数 $x^pe^{b_kx}$ $(0\le p\le m_1-2)$, $x^je^{b_kx}$ $(2\le k\le r,\, 0\le j\le m_k-1)$ の線形和。一般に x^je^{bx} $(j\in\mathbb{N},\, b\in C)$ は x^ie^{bx} $(0\le i\le j)$ の適当な線形和の微分である。従って $e^{-b_1x}v$ は n 個の関数 x^p $(0\le p\le m_1-1)$, $x^je^{(b_k-b_1)x}$ $(2\le k\le r,\, 0\le j\le m_k-1)$ の線形和 G を用い G' と表せる。よって $u'-b_1u=e^{b_1x}G'$. これと問 5.4.9 より $u=e^{b_1x}(G+c)$ (c は定数). 右辺は所期線形和である。(b) $\Rightarrow$ (a): $P(D)u$ は u に対し微分作用素 $f\mapsto f'-b_kf$ $(k=1,..,r)$ をそれぞれ m_k 回施して得られる。一方 $x^je^{b_kx}$ は $f\mapsto f'-b_kf$ を j 回施すと 0 になる。
問 5.5.5: A は有界、$\varepsilon>0$ は任意とする。十分大きな ℓ に対し $A\subset C\stackrel{\text{def.}}{=}[-\frac{\ell}{2},\frac{\ell}{2}]^d$. 今 $n\in\mathbb{N}$ に対し、立方体 C の各辺を n 等分することにより、C は一辺の長さが ℓ/n の n^d 個の閉立方体 $C_1,...,C_N$ $(N=n^d)$ の和として表せる。ここで、n を (C_i の各辺の長さ)$=\ell/n<2\varepsilon/\sqrt{d}$ となるようにとれば、各 C_i は半径 ε の開球に含まれるので、その中心を x_i と書く。以上より $A\subset C=\bigcup_{i=1}^N C_i\subset\bigcup_{i=1}^N B(x_i,\varepsilon)$.
問 5.5.6: (i): $x_n\in f^{-1}(F)$, $x_n\longrightarrow x$ とし、$x\in f^{-1}(F)$ を言う。仮定から $f(x_n)\in F$, かつ f の連続性から $f(x_n)\longrightarrow f(x)$. ここで、$F$ は閉だから $f(x)\in F$, 即ち $x\in f^{-1}(F)$.
(ii): (y_n) を $f(K)$ の任意の点列とし、(y_n) が $f(K)$ に収束する部分列を含む事を言う。各 n に対し $y_n\in f(K)$ なので $y_n=f(x_n)$ なる $x_n\in K$ が存在。このとき、(x_n) は K の点列なので、収束部分列 $(x_{\ell(n)})$ を含み $x_{\ell(n)}\longrightarrow x\in K$. 故に f の連続性から $y_{\ell(n)}=f(x_{\ell(n)})\longrightarrow f(x)\in f(K)$. 以上から、 $(y_{\ell(n)})$ が所期部分列。
問 5.5.8: $A_{r,R}$ は有界。また、$x_n\in A_{r,R}$, $x_n\to x$ なら、$|x|=\lim_n|x_n|\in[r,R]$ より $x\in A_{r,R}$. 従って $A_{r,R}$ は閉でもある。以上と 定理 5.5.4 より $A_{r,R}$ はコンパクト。
問 5.5.10: f は有界な閉区間 $[0,T]$ 上で最大値 M, 最小値 m を持つ。一方、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $x\in[kT,(k+1)T)$ となる $k\in\mathbb{Z}$ が存在する。この k に対し $x-kT\in[0,T]$ かつ $f(x)=f(x-kT)$. よって $m\le f(x)\le M$. 故に $M=\max_{\mathbb{R}}f$, $m=\min_{\mathbb{R}}f$.
問 5.5.11: 仮定より $f\not\equiv 0$. よって $|f(a)|>0$ となる $a\in\mathbb{R}^d$ が存在する。また、再び仮定より $|x|\ge r\Rightarrow|f(x)|>|f(a)|$ をみたす r が存在する。ここで、$A=\{x\in\mathbb{R}^d\ |x|\le r\}$ はコンパクトだから定理 5.5.5 より $\min_A|f|=|f(c)|$ となる $c\in A$ が存在する。一方 $x\not\in A$ なら $|f(x)|>|f(a)|\ge|f(c)|$. よって、$|f(c)|$ は $|f|$ の最小値である。

第 6 章

問 6.1.1: 系 6.1.3(a) に帰着する。
問 6.1.4: $h=\delta^{1/m}e^{\mathbf{i}\theta/m}$ $(0<\delta\le r)$ とすると、例 6.1.4 の証明と同様に $|f(a)+g(a)h^m|=|f(a)|+|g(a)h^m|$. また、$\delta$ が十分小さければ $|g(a+h)-g(a)|<|g(a)|$. よって、$|f(a+h)|\ge \underbrace{|f(a)+g(a)h^m|}_{=|f(a)|+|g(a)h^m|}-\underbrace{|h^m(g(a+h)-g(a))|}_{<|g(a)h^m|}>|f(a)|$.
問 6.1.5： $f(z)=\sum_{j=0}^n a_jz^j$ $(a_n\neq 0)$ と書くと $|z|$ が十分大きければ $\sum_{j=0}^{n-1}|a_jz^{-(n-j)}|<|a_n|/2$. 故に、

$$|f(z)|=|z|^n\left|a_n+\sum_{j=0}^{n-1}a_jz^{-(n-j)}\right|\ge|a_n||z|^n/2\longrightarrow\infty\ \ (|z|\longrightarrow\infty).$$

よって $|f|$ はある $a\in\mathbb{C}$ で最小となる（問 5.5.11)。ここで、$f(z)$ を $z-a$ についての多項式に書き直す（$z=(z-a)+a$ を $f(z)$ に代入し、$z-a$ について展開する）と適当な $m\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ と、多項式 g $(g(a)\neq 0)$ を用い、$f(z)=f(a)+(z-a)^mg(z)$ と書けることが分かる。このことと、例 6.1.4 から、$f(a)=0$.
問 6.1.8: 命題 6.1.5 の証明と同様。
問 6.1.9: 単純計算。
問 6.1.10: (i),(ii) は単純計算。(iii) は (ii) の結果を用い、 例 5.4.8 の証明に倣う。あるいは、(i) の結果に $\log(1\pm y)$ の巾級数展開 （例 5.4.8）を直接用いてもよい。
問 6.2.1: 命題 6.2.1 を $\alpha=-m$ として適用し、$\binom{-m}{n}=(-1)^n\binom{m+n-1}{n}$ に注意する。
問 6.2.2: (i),(ii) は単純計算。(iii) は (ii) の結果を用い、例 5.4.8 の証明法に倣う。
問 6.4.1： $\mathrm{Arcsin}\, y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ より $\pi/2-\mathrm{Arcsin}\, y\in[0,\pi]$. 更に

$$\cos(\pi/2-\mathrm{Arcsin}\, y)\underbrace{=}_{\text{加法定理}}\sin(\mathrm{Arcsin}\, y)=y=\cos(\mathrm{Arccos}\, y).$$

故に、$\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,+1]$ の狭義単調性より $\pi/2 - \mathrm{Arcsin}\, y = \mathrm{Arccos}\, y$.
問 6.4.2: (i) 容易。(ii) T_n は n 次多項式であり、$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ となることは、n に関する帰納法で分かる（cos の加法定理を用いる）。また、$\mathrm{Arccos}\,(-x) = \pi - \mathrm{Arccos}\,(x)$ となることも容易に分かるから、これと T_n の定義から $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ を得る。
問 6.4.3: $\mathrm{Arctan}\, x = \theta$ とする。$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = -\frac{2x}{x^2-1}$, $\tan(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \frac{1}{\tan 2\theta} = -\frac{x^2-1}{2x}$. 両辺の Arctan をとれば (i) を得る。その際、$x > 0$ という条件から $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{\pi}{2}$ であることに注意する必要がある。(ii) は $\tan 4\theta = \frac{2\tan 2\theta}{1+\tan^2 2\theta}$ を用いて同様に計算すれば得られる。その際、x に関する条件から $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - 4\theta < \frac{\pi}{2}$ であることに注意する必要がある。

第 7 章

問 7.1.1: 区間分割の表示 (7.7) を用いて、

$$|I| = |I_1|\cdots|I_d| \overset{(7.5)}{=} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots\cdots \sum_{k_d=1}^{N_d} |D_{1k_1}|\cdots|D_{dk_d}| = \sum_{D\in\Delta} |D|.$$

問 7.2.1: 最初の等号は「$g(x,y) = f(x) - f(y)$ に対し $\sup\limits_{D\times D} |g| = \sup\limits_{D\times D} g$」と言い換えられる。$E = \{(x,y)\ ;\ g(x,y) \geq 0\}$ とおくと $g(x,y) = -g(y,x)$ より $\sup\limits_{D\times D} |g| = \sup\limits_{E} |g|$. また、$\sup\limits_{D\times D} g = \sup\limits_{E} g = \sup\limits_{E} |g|$. 二つ目の等号は $\sup\limits_{D\times D} g = \sup\limits_{x\in D} \sup\limits_{y\in D} g(x,y)$ による。
問 7.3.1: 補題 7.3.2 の証明と同様にすればよい。
問 7.3.2: $p = 1$ なら明らか。$p > 1$ なら $f(x) = |x|^p$ は全ての $x \in \mathbb{R}$ で可微分、$f'(x) = p|x|^{p-1}$. 例えば $a < b$ とする。平均値定理より、$|b|^p - |a|^p = p|c|^{p-1}(b-a)$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在する。両辺の絶対値をとり、$|c| \leq M$ に注意すればよい。
問 7.3.3: (i),(ii) は容易。(iii) は次の通り。$\varepsilon > 0$, $C_1 = \|f\|_p + \varepsilon$, $C_2 = \|g\|_q + \varepsilon$, 更に $\widetilde{f} = f/C_1$, $\widetilde{g} = g/C_2$ とおくと、$\|fg\|_1/C_1C_2 = \|\widetilde{f}\widetilde{g}\|_1 \overset{\text{(ii)}}{\leq} \frac{1}{p}\|\widetilde{f}\|_p^p + \frac{1}{q}\|\widetilde{g}\|_q^q \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 従って、$\|fg\|_1 \leq C_1C_2$. そこで $\varepsilon \longrightarrow 0$ とすれば結論を得る。
問 7.3.4: $\frac{1}{q/p} + \frac{1}{q/(q-p)} = 1$ より、

$$\|f\|_p^p = \||f|^p 1\|_1 \leq \left(\int_I |f|^{p\cdot\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_I 1^{\frac{q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}} = \|f\|_q^p |I|^{1-\frac{p}{q}}.$$

問 7.3.5: $\frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = 1$ より、

$$\|fg\|_r^r = \int_I |fg|^r \leq \left(\int_I |f|^{r\cdot(p/r)}\right)^{\frac{1}{p/r}} \left(\int_I |g|^{r\cdot(q/r)}\right)^{\frac{1}{q/r}} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

問 7.3.6: ヒントで述べた不等式の証明は次の通り：

$$\|h\|_p^p = \|h^p\|_1 = \|h\cdot h^{p-1}\|_1 \leq \|fh^{p-1}\|_1 + \|gh^{p-1}\|_1$$

更に $q = p/(p-1)$ に 対し $\|h^{p-1}\|_q = \|h\|_p^{p-1}$. 故に

$$\begin{aligned} \|h\|_p^p &\leq \|fh^{p-1}\|_1 + \|gh^{p-1}\|_1 \overset{\text{ヘルダーの不等式}}{\leq} \|f\|_p\|h^{p-1}\|_q + \|g\|_p\|h^{p-1}\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|h\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

問 7.3.7: $\varepsilon > 0$ を任意とする。これに対して $T_0 > 0$ が存在し、$x \geq T_0$ なら $|f(x) - c| < \varepsilon$. 更に、T_1 が存在し $T > T_1$ なら $\frac{T_0}{T}\sup_{[0,T_0]}|f-c| < \varepsilon$. 以上から $T > T_0 \vee T_1$ に対し

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{T}\int_{[0,T]} f - c\right| &\leq \frac{1}{T}\int_{[0,T]} |f-c| = \frac{1}{T}\int_{[0,T_0]} |f-c| + \frac{1}{T}\int_{[T_0,T]} |f-c| \\ &\leq \frac{T_0}{T}\sup_{[0,T_0]} |f-c| + \frac{T-T_0}{T}\varepsilon < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

問 7.3.8: $\varepsilon > 0$ を任意とする。これに対し $\delta > 0$ が存在し、$x \in B(a,\delta)$ なら $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. また、$n$ が十分大きければ $I_n \subset B(a,\delta)$ なので、$\left|\frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f - f(a)\right| \leq \frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} |f - f(a)| \leq \varepsilon$.

問 7.5.1： f の不連続点の集合 E は有限なので、適当な区間分割 Δ をとることで $\cup_{D\in\Delta}\overset{\circ}{D}\subset I\backslash E$ と出来る。このとき、$f\in C_{\rm b}(\cup_{D\in\Delta}\overset{\circ}{D})$ だから定理 7.5.1(b) より $f\in\mathscr{R}(I)$。
問 7.6.3： (i)–(iv) で $f\in C(D)$ は明らか。$f\notin C_{\rm u}(D)$ を言うには、$a_n,b_n\in D$ を $a_n-b_n\to 0$ かつ $f(a_n)-f(b_n)\not\to 0$ となるように選べばよい。例えば (i) では $a_n=n+n^{1-p}$, $b_n=n$ とすると、$a_n-b_n=n^{1-p}\to 0$. 一方、不等式 $(1+x)^p\ge 1+px$ $(x\ge 0)$ より、$a_n^p-b_n^p=n^p\{(1+n^{-p})^p-1\}\ge p$. 以下、(ii) では $a_n=1/n$, $b_n=1/(n+1)$, (iii) では $a_n=1/n$, $b_n=2/n$, (iv) では $a_n=1/n$, $b_n=2/(2n+1)$.
問 7.6.2: (ii) :$D_1=(0,1]$, $D_2=(1,2]$, D_j 上 $f=j$. (iii): (i) より $C_{\rm u}(D_1)\cap C_{\rm u}(D_2)\subset C_{\rm u}(D_1\cup D_2)$ を言えばよい。$f\in C_{\rm u}(D_1)\cap C_{\rm u}(D_2)$, $\varepsilon>0$ を任意とする。このとき $j=1,2$ に対し「$x,y\in D_j$, $|x-y|<\delta_j\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$」となるような $\delta_j>0$ が存在する。そこで、$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_0/2\}$, $x,y\in D_1\cup D_2$, $|x-y|<\delta$ とすれば、δ_j, $j=0,1,2$ の性質から $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. よって $f\in C_{\rm u}(D_1\cup D_2)$.
問 7.6.4: $a_n=n+\frac{1}{f'(n)}$, $b_n=n$ とすると $a_n-b_n\to 0$. また、平均値定理から $f(a_n)-f(b_n)=f'(c_n)(a_n-b_n)$ となる $c_n\in(b_n,a_n)$ が存在し、$f(a_n)-f(b_n)=f'(c_n)(a_n-b_n)\ge f'(n)(a_n-b_n)=1$.
問 7.6.7: 定理 7.6.3 より $f\in C_{\rm u}([0,2])$, 問 7.6.1 より $f\in C_{\rm u}([1,\infty))$. また、$x,y\ge 0$, $|x-y|<1$ なら $x,y\in[0,2]$ または $x,y\in[1,\infty)$. よって 問 7.6.2 より $f\in C_{\rm u}([0,2]\cup[1,\infty))=C_{\rm u}([0,\infty))$.
問 7.6.8: (i) $q>0$ を f の周期、$q\in[np_0,(n+1)p_0)$ とする。$f(x+np_0)=f(x)=f(x+q)$ の x を $x-np_0$ でおきかえて、$f(x)=f(x+q-np_0)$. よって、もし $q>np_0$ なら、 $q-np_0$ は f の周期である。ところが、$q-np_0<p_0$ だから、これは p_0 の最小性に反する。故に $q=np_0$. (ii) 任意に $M>0$ を固定し、$[-M,M]$ 上で定数ならよい。$f\in C_{\rm u}([-M-1,M+1])$ より $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ $x,y\in[-M-1,M+1]$, $|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. そこで $0<p<\delta\wedge 1$ となる周期 p を選ぶ。また、$x\in[-M,M]$ に対し $x\in[np,(n+1)p)$ となる $n\in\mathbb{Z}$ をとる。このとき、$x,np\in[-M-1,M+1]$, $|x-np|\le p<\delta$ より、$|f(x)-f(0)|<\varepsilon$. ε は任意だったから $f(x)=f(0)$. (iii) 周期全体の集合を P, $p_0=\inf P$ とする。$p_n\in P$ で $p_n\to p_0$ なるものをとると、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $f(x+p_0)=\lim_n f(x+p_n)=f(x)$. よって $p_0\in P$. また、(ii) の結果より $p_0>0$.

第 8 章

問 8.1.1: (i):$\frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\,\frac{x-b}{a}$. (ii): $\frac{b}{a}\mathrm{Arctan}\,\frac{x-b}{a}+\frac{1}{2}\log\left((x-b)^2+a^2\right)$ (iii): $\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}+\frac{1}{6a^2}\log\frac{(x+a)^3}{x^3+a^3}$. (iv): $\frac{1}{a\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}-\frac{1}{6a}\log\frac{(x+a)^3}{x^3+a^3}$. (v):$\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{a}-\frac{1}{b}\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{b}\right)$.
問 8.1.2: $\dfrac{1}{8ac}\log\dfrac{x^2+2cx+a}{x^2-2cx+a}+\dfrac{1}{4ad}\left(\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x+c}{d}+\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x-c}{d}\right)$, (但し $d=\sqrt{(a+b)/2}$)
問 8.1.3: (i): $f\in\mathscr{R}(\overset{\circ}{I})$ とする。$[u,v]\subset I$ なら $(u,v)\subset\overset{\circ}{I}$. よって $f\in\mathscr{R}((u,v))$.
(ii):区間 $[u,v]\subset I$ に 補題 7.5.3 を適用。(iii):例えば $f(x)=1/(x-a)$ は $C((a,b))$ の元だが、$\mathscr{R}_{\rm loc}([a,b))$ の元でない。
問 8.2.1: 仮定より $0\le y\le y$ に対し $\frac{f(y)}{g(y)}\le\frac{f(x)}{g(x)}$. 即ち $g(x)f(y)\le f(x)g(y)$. 今、$F(x)=\int_0^x f$, $G(x)=\int_0^x g$ とすると、$\left(\frac{F}{G}\right)'=\frac{F'G-FG'}{G^2}=\frac{fG-Fg}{G^2}$. ところが、

$$(fG-Fg)(x)=f(x)\int_0^x g(y)dy-g(x)\int_0^x f(y)dy=\int_0^x\left(f(x)g(y)-g(x)f(y)\right)dy\ge 0.$$

故に $\left(\frac{F}{G}\right)'\ge 0$.
問 8.2.2:

$$\int_0^x f^2=\begin{cases}\cos x\sin x/2+x/2, & f=\cos,\\ -\cos x\sin x/2+x/2, & f=\sin,\\ \mathrm{ch}\,x\ \mathrm{sh}\,x/2+x/2, & f=\mathrm{ch}\,,\\ \mathrm{ch}\,x\ \mathrm{sh}\,x/2-x/2, & f=\mathrm{sh}\,.\end{cases}$$

問 8.2.3: (i): $x\neq 0$ での可微分性は明らか。また、微分の定義に戻って計算すると $F'(0)=0$ が分かる。(ii): $x\neq 0$ なら $F'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$ だから $x\neq 0$ では連続かつ任意の有界区間上で有界。従って、任意の有界閉区間上可積分。(iii):$x\to 0$ で $x\sin(1/x)\to 0$ かつ $\cos(1/x)$ は で極限を持たないから、$F'(x)$ は原点で不連続。(iv): (i), (ii) より定理 8.2.1 を適用出来る。
問 8.2.6: ヒントの方針に従う。

$$F'(t)=e^{-V(t)}\left(-v(t)\int_0^t vu+v(t)u(t)\right)\overset{\text{仮定}}{\le}\alpha e^{-V(t)}v(t)=G'(t).$$

より $F-G$ は非増加、かつ $(F-G)(0)=0$. 故に $F\le G$.
問 8.2.9：定理 8.2.1(c) より f,g はともに原始関数を持ち、微積分の基本公式が成立。今、G が g の原始関数なら $F(x)=xf(x)-G\circ f(x)$ は f の原始関数である。実際、

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)-\underbrace{(G'\circ f)(x)}_{=g\circ f(x)=x}f'(x)=f(x).$$

従って、微積分の基本公式より

$$\int_u^v f=[F]_u^v=[xf(x)-G\circ f(x)]_u^v=[xf(x)]_u^v-\int_{f(u)}^{f(v)} g$$

問 8.2.10: (i) $x\mathrm{Arcsin}\,x+\sqrt{1-x^2}$. (ii) $x\mathrm{Arctan}\,x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$.
問 8.3.1: $I\stackrel{\text{def.}}{=}\int_0^T xf(x)\,dx=\int_0^T(T-x)f(T-x)\,dx=T\int_0^T f-I$.
問 8.3.6

$$\begin{aligned}\int_0^x f^{(k)}\sin &= [-f^{(k)}\cos]_0^x+\int_0^x f^{(k+1)}\cos\\ &= \underbrace{[-f^{(k)}\cos]_0^x}_{=f^{(k)}(0)-f^{(k)}(x)\cos x}+\underbrace{[f^{(k+1)}\sin]_0^x}_{=f^{(k+1)}(x)\sin x}-\int_0^x f^{(k+2)}\sin.\end{aligned}$$

$I(f)=\int_0^{\frac{m\pi}{2}}f\sin$ とおく。例えば $m\in 2\mathbb{N}$ なら、$\cos\frac{m\pi}{2}=(-1)^{\frac{m}{2}}$, $\sin\frac{m\pi}{2}=0$ なので

$$\begin{aligned}I(f) &= f(0)-(-1)^{\frac{m}{2}}f(\tfrac{m\pi}{2})-I(f^{(2)})\\ &= f(0)-(-1)^{\frac{m}{2}}f(\tfrac{m\pi}{2})-\{f^{(2)}(0)-(-1)^{\frac{m}{2}}f^{(2)}(\tfrac{m\pi}{2})\}\\ &\quad+...+(-1)^n\{f^{(2n)}(0)-(-1)^{\frac{m}{2}}f^{(2n)}(\tfrac{m\pi}{2})-\underbrace{I(f^{(2n+2)})}_{=0}\}.\end{aligned}$$

$m\notin 2\mathbb{N}$ の場合も同様に計算出来る.
問 8.3.7: (i),(ii) は容易。(iii) は (i),(ii) の帰結。(iv): $[0,r]$ 上 $0\le f_n\le r^np^n/n!$ より、

$$|I(f_n)|\le\int_0^r|f_n\sin|\le\int_0^r f_n\le r^{n+1}p^n/n!\longrightarrow 0.$$

(v):(iii) より $0\le m\le 2n$ に対し $f_n^{(m)}(0)$, $f_n^{(m)}(\pi)\in\mathbb{Z}$. 故に 問 8.3.6 より $I(f_n)\in\mathbb{Z}$. 所が $(0,\pi)$ 上 $f_n\sin>0$ なので、連続関数の積分の強単調性より $I(f_n)>0$.
問 8.3.8：$F(x)=\int_0^x\sin(1/y)dy$ とする。

(1) $F(\varepsilon)=\displaystyle\int_0^\varepsilon f=\int_0^{\varepsilon^2}f+\int_{\varepsilon^2}^\varepsilon f.$

$|f|\le 1$ より

(2) $\left|\int_0^{\varepsilon^2}f\right|\le\int_0^{\varepsilon^2}|f|\le\varepsilon^2.$

次に $y=1/x$ で置換積分して、$\int_{\varepsilon^2}^\varepsilon f=\int_{\varepsilon^2}^\varepsilon\sin(1/x)dx=\int_{1/\varepsilon}^{1/\varepsilon^2}\frac{\sin y}{y^2}dy$. 更に、第 2 平均値定理より、

$$\exists c\in(1/\varepsilon,1/\varepsilon^2),\ \int_{1/\varepsilon}^{1/\varepsilon^2}\frac{\sin y}{y^2}dy=\varepsilon^4\int_c^{1/\varepsilon^2}\sin ydy+\varepsilon^2\int_{1/\varepsilon}^c\sin ydy.$$

ここで、$\left|\int_a^b\sin ydy\right|=|\cos a-\cos b|\le 2$ と、以上を併せると、

(3) $\left|\int_{\varepsilon^2}^\varepsilon f\right|\le 4\varepsilon^2.$

(1)–(3) より、$|F(\varepsilon)|\le 5\varepsilon^2$.
問 8.4.1: 定理 8.4.1(c) より $R_{n,a,b}=\frac{f^{(n)}(c)(b-a)^n}{n!}$ を満たす $c\in(a\wedge b,a\vee b)$ が存在する。よって $(b-a)^{-n}\left(f(b)-\sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)(b-a)^m}{m!}\right)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$. $b\to a$ として、結論を得る。
問 8.4.2: 定理 8.4.1(c) より $f(a\pm h)-f(a)=\pm f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a\pm\theta_\pm h)h^2$ を満たす $\theta_\pm\in(0,1)$ が存在する。よって $h^{-2}(f(a+h)+f(a-h)-2f(a))=\frac{1}{2}\left(f''(a+\theta_+h)+f''(a-\theta_-h)\right)$. $h\to 0$ として、結論を得る。

問 8.4.3: $f = \sin$ に対し、定理 8.4.1 の $R_{2n+2,0,x}$ を評価すればよい。定理 8.4.1(c) より $R_{2n+2,0,x} = f^{(2n+2)}(c)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ を満たす $c \in (0,x)$ が存在する。ところが $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ かつ n の偶奇に応じ $f^{(2n+2)}(c) \in (-1,0)$, $f^{(2n+2)}(c) \in (0,1)$.
問 8.4.5: 定理 8.4.3 の証明の記号を用いると、示すべきことは

(∗1) $\lim_{\substack{b\to a \\ b\neq a}} \gamma = f^{(n)}(a)$.

一方、定理 8.4.3 の証明と全く同じ論法で、次が判る：

$$1 \leq k \leq n-1 \Longrightarrow \exists c_k \in (a\wedge b, a\vee b),\ g^{(k)}(c_k) = 0.$$

今、p, g の定義から、

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + \gamma(x-a) + g^{(n-1)}(x)$$

上式で $x = c_{n-1}$ とし、(∗1) を導く。

第 9 章

問 9.1.1: $\int_u^v f = \int_u^b f - \int_v^b f$ だが、補題 9.1.5 より右辺の各項は $u,v\to b$ で 0 に収束する。
問 9.1.5：第 1 の積分を考える。原始関数の形から、求める積分は

$$p\neq 1 \text{ なら } \left[\frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\right]_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{p-1}, & p<1, \\ \infty, & p>1 \end{cases} \quad p=1 \text{ なら } [\log(x-a)]_a^b = \infty.$$

第 2 の積分も同様。
問 9.2.1: $\Leftarrow$ は明らかなので $\Rightarrow$ を示す。$\lim_{v\to\infty} f(v) = c$ とする（単調性より必ず存在）。このとき、$a_n \stackrel{\text{def.}}{=} e^{\mathbf{i}n\pi}f(n\pi) = (-1)^n f(n\pi)$ は n が偶数なら c 以上、n が奇数なら c 以下である。所が仮定より a_n は収束する筈だから $c=0$ でなくてはならない。
問 9.2.4: $\Rightarrow$ は明らか。$\Leftarrow$ を示すために $\int_1^\infty |f\sin| < \infty$ を仮定する。このとき、

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f\sin| \geq f((n+1)\pi) \underbrace{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin|}_{(1)}$$

所が、$(1) = \int_0^\pi |\sin| = \int_0^\pi \sin = [-\cos]_0^\pi = 2$. 従って、

$$\infty > \int_1^\infty |f\sin| \geq \sum_{n=1}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f| \geq \sum_{n=1}^\infty f((n+1)\pi).$$

故に例 9.2.4 より $\int_1^\infty |f(\pi x)|dx < \infty$. これから $\int_1^\infty |f| < \infty$ も分かる。
問 9.2.5: (i): $\int_1^\infty f$ の収束 $\stackrel{\text{問 9.2.2}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^p} = 0 \iff p>0$. (ii): $\int_1^\infty |f| < \infty \stackrel{\text{問 9.2.4}}{\Longleftrightarrow} \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} < \infty \stackrel{\text{例 9.1.7}}{\Longleftrightarrow} p>1$.
問 9.2.6: $x>0$ を固定し $f(y) = \frac{x}{1+x^2y^2}$ とすると例 9.2.4 と同様にして積分と級数を比較して、$S(x) - \frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=2}^\infty f(n) \leq \int_1^\infty f \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) = S(x)$. 一方 $\int_1^\infty f = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}x$.
問 9.2.7 ：(a):$g(x) = \begin{cases} M/x^p & x\in[c,\infty) \\ 0 & x\in(a,c) \end{cases}$ とおくと、例 9.1.7 より $\int_c^\infty g$ は収束。以上と比較定理（系 9.2.2）より $\int_a^\infty |f|$ は収束。(b):$g(x) = \begin{cases} M/(b-x)^p & x\in[c,\infty) \\ 0 & x\in(a,c) \end{cases}$ とおくと、問 9.1.5 より $\int_c^b g$ は収束。以上と比較定理（系 9.2.2）より $\int_a^b |f|$ は収束。(c): g を (a) の証明と同じものとすると、例 9.1.7 より $\int_c^\infty g = \infty$. 以上と比較定理（系 9.2.2）より $\int_a^\infty f$ は収束しない。(d): g を (b) の証明と同じものとすると、問 9.1.5 より $\int_c^b g = \infty$. 以上と比較定理（系 9.2.2）より $\int_a^b f$ は収束しない。
問 9.3.3: $y = \text{Arccos}\, x$ として置換積分すると、

$$\begin{aligned} 2\int_{-1}^1 \frac{T_a(x)T_b(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= 2\int_0^\pi \cos ay\cos by dy = 2\int_0^\pi (\cos((a+b)y) + \cos((a-b)y))dy \\ &= \frac{\sin(a+b)\pi}{a+b} + \frac{\sin(a-b)\pi}{a-b}. \end{aligned}$$

問 9.3.7: 次に注意する：

(1) $\qquad 0 \le 1 - \cos x \le \min\{2, x^2/2\}.$

(例えば $1 - \cos x = \int_0^x \sin y dy$ とすると見易い。) (1) より

$$0 \le \frac{1-\cos x}{x^{p+1}} \le \begin{cases} \frac{1}{2x^{p-1}}, & x \in (0,1], \\ \frac{2}{x^{p+1}}, & x \in [1,\infty). \end{cases}$$

今、$p-1<1<p+1$ より上式右辺の関数はそれぞれの範囲で可積分。従って I_2 は収束する。一方 $0<a<b<\infty$ に対し

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sin x}{x^p} dx &= \int_a^b \frac{(1-\cos x)'}{x^p} dx \\ &= \left[\frac{1-\cos x}{x^p}\right]_a^b + p\int_a^b \frac{1-\cos x}{x^{p+1}} dx. \end{aligned}$$

再度 (1) に注意しつつ $a \to 0$, $b \to \infty$ とすると、上式右辺は pI_2 に収束する。従って左辺も収束し $I_1 = pI_2$ となる。また、I_2 に $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ を代入し $y = x/2$ として置換積分すると $2^{1-p}I_3$ になる。
問 9.4.1: (9.5) 右辺の積分を $x = vy$ と置換して (9.9) を得る。(9.9) の積分を $e^{-y} = s$ と置換して (9.10) を得る。(9.9) の積分を $r = \sqrt{y}$ と置換。して (9.11) を得る。
問 9.4.5: (i) $y = (1-x)/x$ と置換。(ii) $y = x^t$ と置換。(iii) $B(u,u) = 2\int_0^{1/2}(x(1-x))^{u-1}dx$ を $y = x(1-x)$ と置換。
問 9.4.6：(9.16): $B(u+1,v) = \int_0^1 x^u(1-x)^{v-1}\,dx = -\frac{1}{v}\underbrace{[x^u(1-x)^v]_0^1}_{=0} + \frac{u}{v}\underbrace{\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^v\,dx}_{=B(u,v+1)}$

となり、第 1 式を得る。また第 1 式と (9.13) より第 2 式を得る。
(9.17): $B(u+1,v) = \int_0^1 \underbrace{x^u}_{=(1-(1-x))x^{u-1}} (1-x)^{v-1}\,dx = B(u,v) - \underbrace{B(u,v+1)}_{=\frac{v}{u}B(u+1,v)}$ となり、第 1 式を得る。また第 1 式と (9.13) より第 2 式を得る。
(9.18):(9.17) を繰り返し用いる。
問 9.5.2: 命題 9.5.2 の証明中に与えた $\sigma_n - \sigma_{n+1}$ の評価より $0 \le \sigma_n - \sigma \le \frac{1}{12n} + \frac{1}{96n^2}$. また、$\sigma \le \sigma_n \le 1$ と (3.4) より $0 \le s_n - s \le e(\sigma_n - \sigma)$.
問 9.5.3: 命題 9.5.2 の証明中 $s = \sqrt{2\pi}$ を示した計算からわかる。

第 10 章

問 10.1.1: 各点収束は明らか。一様収束しないことは例えば、$x_n = 1 - \frac{1}{n}$ に対し $\|f_n - f\|_D \ge |f_n(x_n) - f(x_n)| = x_n^n \longrightarrow e^{-1}$. (ii) $\|f_n\|_{[0,\delta]} = \delta^n \longrightarrow 0$.
問 10.1.2: sup の性質から容易に分る。
問 10.1.3: f_n の極限を f とする。仮定より「$n \ge n_0 \implies \|f - f_n\|_D < \varepsilon/2$」を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する。そこで $m,n \ge n_0$ とすると $\|f_m - f_n\|_D = \|(f_m - f) - (f_n - f)\|_D \le \|f_m - f\|_D + \|f_n - f\|_D < 2\cdot\varepsilon/2 = \varepsilon$.
問 10.1.4: (i) $\varepsilon > 0$, $x \in I$ を任意とする。これらに対し、f の連続性より次のような $\delta > 0$ が存在する：

(1) $y \in I$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

そこで、$\frac{1}{n} < \delta$ とし、$x \in (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ となる $k \in \{1,...,n\}$ をとると、$\frac{k}{n} \in I$ かつ $|x - \frac{k}{n}| < \delta$. よって (1) より

(2) $|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(k/n)| < \varepsilon$.

(2) は 全ての $n > 1/\delta$ で成立するから、$\lim_n |f(x) - f_n(x)| = 0$.
(ii): f は一様連続なので $\delta > 0$ をひとつ選んで、(1) が全ての $x \in I$ で成立するようにできる。その δ に対し $x \in (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ となる $k \in \{1,...,n\}$ をとると、(2) は全ての $x \in I$ で成立する。したがって、$\sup_{x\in I}|f(x) - f(k/n)| \le \varepsilon$. これが全ての $n > 1/\delta$ で成立するから、$\lim_n \sup_{x\in I}|f(x) - f_n(x)| = 0$.
問 10.2.1: $D = [\varepsilon,\infty)$ とすると $\sum_{j=1}^\infty \|\frac{1}{1+xj^2}\|_D = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{1+\varepsilon j^2} < \infty$. よって、ワイエルシュトラス の M-テスト より f_n は D 上一様収束する。一方、$D = (0,\infty)$ とすると $\|f_j - f_{j-1}\|_D = \sup_{x>0}\frac{1}{1+xj^2} = 1$. よって問 10.1.3 より f_n は D 上一様収束しない。
問 10.2.2: $f_n(y) = \frac{(2n-1)!!y^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ $(y \in [-1,1])$ とおくと $|f_n(y)| \le f_n(1)$ かつ $\sum_{n=0}^\infty f_n(1) =$

Arcsin $1 = \pi/2 < \infty$. 従って、ワイエルシュトラス の M-テスト より $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)$ は $y \in [-1,1]$ について一様収束する。
問 10.2.4: 定理 10.2.4 で $D = [0,\infty)$, $p_n(x) = \frac{1}{x+n}$, $q_n(x) = (-1)^{n-1}$ とすれば仮定 (a),(b),(c1) が満たされ、一様収束が判る。連続性は定理 10.1.4 による。
問 10.2.6: $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$, $|z| \le 1$, $\overset{\circ}{D}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1,\ |1+z| > \varepsilon\}$ とする。このとき、$z \in D_\varepsilon$ となる $\varepsilon > 0$, 及び $z_n \longrightarrow z$ なる点列 $z_n \in \overset{\circ}{D}_\varepsilon$ が存在。更に

$$f(z) = \mathrm{Log}\ (1+z) \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$$

とする。このとき、

(1) $f \in C(\mathbb{C}\backslash(-\infty,-1])$ （命題 6.5.1)、従って $f \in C(D_\varepsilon)$.

(2) $g \in C(D_\varepsilon)$ ((a) と 定理 10.1.4)。

(3) $|z| < 1$ なら (従って $z \in \overset{\circ}{D}_\varepsilon$ なら)、$f(z) = g(z)$ (命題 6.5.3).

以上より

$$f(z) \overset{(1)}{=} \lim_n f(z_n) \overset{(3)}{=} \lim_n g(z_n) \overset{(2)}{=} g(z).$$

問 10.3.1：$f_N(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n y^{2n}$ とおく。容易に分るように

(1) $x \in (-1,1)$ について局所一様に $\displaystyle\lim_N f_N(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

(2) $x \in (-1,1)$ に対し $\displaystyle\int_0^x f_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

$x \in (-1,1)$ とすると (1) の収束は $[0 \wedge x, 0 \vee x]$ 上一様。従って、

$$\begin{aligned}\mathrm{Arctan}\, x &= \int_0^x \frac{dy}{1+y^2} \overset{\text{項別積分}}{=} \lim_N \int_0^x f_N \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

問 10.3.3: (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は $z \in \mathbb{C}$ について局所一様収束する（例 10.2.2）。然るに $(0,1] \ni x \mapsto x\log x$ は有界。故に $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x\log x)^n}{n!}$ は $x \in (0,1]$ で一様収束。(ii) $x^{-x} = \exp(-x\log x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x\log x)^n}{n!}$ は $x \in (0,1]$ で一様収束。よって $\int_0^1 x^{-x}\, dx \overset{\text{項別積分}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (-x\log x)^n dx \overset{(9.10)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \overset{(9.8)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.
問 10.3.4: $\int_I (b-x)^n f(x)dx = \frac{1}{n+1}(b-a)^{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_I (b-x)^{n+1} f'(x)dx$. 両辺に $\frac{n}{(b-a)^{n+1}}$ を掛けて $n \to \infty$ とする。この際、定理 10.3.1 が使える（条件 (b)）。
問 10.3.6: (10.8) で cos は偶関数 sin は奇関数であることに注意すれば、$\varphi \in (-2\pi, 2\pi)\backslash\{0\}$ に対し

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\mathbf{i}n\varphi}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\varphi)}{n} + \mathbf{i}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\varphi)}{n} = -\log\left(2\sin\frac{|\varphi|}{2}\right) + \frac{\mathbf{i}}{2}\left(\frac{\varphi}{|\varphi|}\pi - \varphi\right)$.

次に $\theta \in (-\pi,\pi)\backslash\{0\}$ とする。(1) で $\varphi = 2\theta$ とし、両辺に $\frac{1}{2}$ を掛ければ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\mathbf{i}n\theta}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\theta)}{2n} + \mathbf{i}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\theta)}{2n} = -\frac{1}{2}\log(2\sin|\theta|) + \frac{\mathbf{i}}{4}\left(\frac{\theta}{|\theta|}\pi - 2\theta\right)$.

(2) は (10.8) の偶数項のみの和のだから、(10.8) と (2) の差をとって奇数項の和が得られる。
問 10.3.9: (i):

$$2\sum_{n=0}^{N} \cos n\theta = \sum_{n=-N}^{N} e^{\mathbf{i}n\theta} = e^{-\mathbf{i}N\theta}\sum_{n=0}^{2N} e^{\mathbf{i}n\theta} = \frac{e^{(N+1)\mathbf{i}\theta} - e^{-N\mathbf{i}\theta}}{e^{\mathbf{i}\theta} - 1} = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

なお、最後の変形では分母、分子に $e^{-\mathbf{i}\theta/2}$ を乗じた。上式の両辺を積分して所期等式を得る。
(ii):f_N は周期 2π だから I を $(-\pi,\pi)$ におきかえても同じである。また、f_N は連続な奇関数だから更に $(-\pi,\pi)$ を $(0,\pi)$ におきかえても同じである。結局

$$g_N(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\theta \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\varphi\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 2\int_0^{\theta/2}\frac{\sin\left((2N+1)\varphi\right)}{\sin\varphi}\,d\varphi$$

が $(0,\pi)$ 上一様有界ならよい。$a_N = 2N+1$ として

$$g_N(\theta) = 2\underbrace{\left[\frac{1-\cos(a_N\varphi)}{a_N\sin\varphi}\right]_0^{\theta/2}}_{(1)} + 2\underbrace{\int_0^{\theta/2}\frac{(1-\cos(a_N\varphi))\cos\varphi}{a_N\sin^2\varphi}\,d\varphi}_{(2)}.$$

$\theta \geq 0$ に対し $0 \leq 1-\cos\theta \leq \theta\wedge\theta^2$. また、$\frac{\sin\theta}{\theta}$ は $[0,\pi/2]$ 上で連続なので、その最小値を $c>0$ とすると

$$\begin{aligned} 0 \leq (1) &= \frac{1-\cos(a_N\theta/2)}{a_N\sin(\theta/2)} \leq \frac{a_N\theta/2}{a_N c\theta/2} = \frac{1}{c} < \infty, \\ 0 \leq (2) &\leq \frac{1}{c^2}\int_0^{\theta/2}\frac{1-\cos(a_N\varphi)}{a_N\varphi^2}\,d\varphi \leq \frac{1}{c^2}\int_0^\infty \frac{1-\cos\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi < \infty. \end{aligned}$$

問 10.3.12： $f_N(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^N a_n(z-c)^n$ とおく。例 10.2.2 より

$$\lim_N f_N(z) = f(z) \ \ (D_\rho(c) \text{ 上局所一様})$$

従って $0<r<\rho$ なら

(1) $\qquad \lim_N f_N(c+re^{\mathbf{i}\theta}) = f(c+re^{\mathbf{i}\theta})$ ($\theta\in[0,2\pi]$ について一様)

更に $\int_0^{2\pi} e^{\mathbf{i}n\theta}d\theta = 2\pi\delta_{n\,0}$ より

(2) $\qquad \displaystyle\int_0^{2\pi} f_N(c+re^{\mathbf{i}\theta})d\theta = 2\pi a_0 = 2\pi f(c).$

定理 10.3.1 より (1) を項別積分できて、

$$\int_0^{2\pi} f(c+re^{\mathbf{i}\theta})d\theta \stackrel{(1)\text{ を項別積分}}{=} \lim_N \int_0^{2\pi} f_N(c+re^{\mathbf{i}\theta})d\theta \stackrel{(2)}{=} 2\pi f(c).$$

問 10.3.14: 「$A_m \Rightarrow P_m$」を示すが、仮定 A_m に加え、P_{m-1} を仮定してよい（帰納法の仮定)。このとき、

(a2) $f_n^{(m-1)}$ は I 上、 $f^{(m-1)}$ に各点収束。

(b2) $f_n^{(m)}$ は I 上、局所一様収束。

故に $\{f_n^{(m-1)}\}_{n\geq1}$ は A_1 を満たすので、$\{f_n^{(m-1)}\}_{n\geq1}$ に P_1 を適用し、$f^{(m-1)}\in C^1(I)$ かつ全ての $x\in I$ に対し

$$f^{(m)}(x) = \lim_n f_n^{(m)}(x)$$

を得る。上と P_{m-1} を併せれば P_m を得る。
問 10.3.17: 「$A_m \Rightarrow P_m$」を言うが、A_m に加え、P_{m-1} を仮定する（帰納法の仮定)。このとき、$F\in C^{m-1}(J)$

$$F^{(m-1)}(t) = \int_I \partial_t^{m-1}f_t(x)dx$$

また、($f_t(x)$ の替わりに) $\frac{\partial^{m-1}f_t}{\partial t^{m-1}}(x)$ が仮定 A_1 を満たすから、上式に P_1 を適用して、

$$F^{(m-1)}\in C^1(J), \quad F^{(m)}(t) = \int_I \partial_t^m f_t(x)dx$$

を得る。以上から P_m が判る。
問 10.3.19: $f_t(x) = \frac{\exp\left(-(1+x^2)t^2\right)}{1+x^2}$, $F(t) = \int_0^1 f_t$, $G(t) = \left(\int_0^t \exp(-x^2)\,dx\right)^2$ とする。$f_t(x)$,

$\partial_t f_t(x) = -2t\exp\left(-(1+x^2)t^2\right)$ は $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ について連続だから定理 10.3.8 より $F \in C^1(\mathbb{R})$ かつ

$$F'(t) = -2t\int_0^1 \exp\left(-(1+x^2)t^2\right)\,dx = -2te^{-t^2}\int_0^1 \exp\left(-x^2t^2\right)\,dx = -2e^{-t^2}\int_0^t \exp\left(-x^2\right)\,dx$$

上式は $-G'(t)$ に等しいから、$(F+G)(t)$ は定数であり、$t=0$ の値より $(F+G)(t) = \frac{\pi}{4}$. 一方 $f_t(x) \le e^{-t^2}$ より $F(t) \le e^{-t^2} \to 0$ $(t \to \infty)$. よって、

$$\left(\int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx\right)^2 = \lim_{t\to\infty}(F+G)(t) = \frac{\pi}{4}.$$

問 10.3.20: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log q$ を a の関数として $F(a)$ とする。(i):$F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2}{q} = \int_0^\infty \frac{dt}{(a+bt^2)(1+t^2)}$. $a \neq b$ なら、$\int_0^\infty \frac{dt}{(a+bt^2)(1+t^2)} = \frac{1}{b-a}\int_0^\infty \left(\frac{b}{a+bt^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \frac{\pi}{2\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$. $a=b$ なら、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2}{q} = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 = \frac{\pi}{4a}$. (ii):(i) の両辺を a で積分し、 $F(a) = \pi\log(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + C$ (C は定数). $a=b$ のときの値で C を決めて結論を得る。

問 10.4.2：$f_n(s) = e^{-(a+n)s}s^{b-1}$ とすると、$\int_0^\infty f_n = \frac{\Gamma(b)}{(n+a)^b}$. 次に

$$g(s) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{e^{-as}s^{b-1}}{1-xe^{-s}} = \sum_{n=0}^\infty x^n f_n(s), \quad g_N(s) \stackrel{\text{def.}}{=} e^{-as}s^{b-1}\frac{1-(xe^{-s})^{N+1}}{1-xe^{-s}} = \sum_{n=1}^N x^n f_n(s)$$

とし、以下を検証する：

(a) $\lim_N g_N = g$ ($(0,\infty)$ 上局所一様)。

(b) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty g_N$ は N について一様収束する。

これらが分れば、項別積分（定理 10.4.3）を用い、

$$\int_0^\infty g = \lim_N \int_0^\infty g_N = \sum_{n=0}^\infty x^n \int_0^\infty f_n = \Gamma(b)\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{(n+a)^b}.$$

(a) の検証：$\varepsilon > 0$ を任意、$I = [\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]$ とし、I 上の一様収束を言えばよい。$s \in I$ なら $1 - xe^{-s} \ge 1 - e^{-\varepsilon} > 0$. よって $I \ni s \mapsto \frac{e^{-as}s^{b-1}}{1-xe^{-s}}$ は連続。そこで、その最大値を M とすると、

$$|g - g_N|(s) = e^{-as}s^{b-1}\frac{|xe^{-s}|^{N+1}}{1-xe^{-s}} \le M|xe^{-s}|^{N+1} \le Me^{-\varepsilon(N+1)} \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty.$$

これで所期一様収束が分った。
(b) の検証：

$$0 \le g_N(s) \le \frac{2e^{-as}s^{b-1}}{1-xe^{-s}}$$

上式右辺は、N に無関係で、仮定 (i) または (ii) のもとで $s \in (0,\infty)$ について可積分。よって例 10.4.2(a) より、(b) が言える。

問 10.4.7：$I = J = (0,\infty)$, $f_t(x) = e^{-tx}\frac{\sin x}{x}$ とすると、

(1) $f_t(x)$ および $\frac{\partial f_t}{\partial t}(x) = -e^{-tx}\sin x$ は $(x,t) \in I \times J$ 上連続

(2) 広義積分 $F(t) = \int_0^\infty f_t$ は両端点で $t \in J$ について一様収束（例 10.4.6)。

また、$t \in [u,v] \subset J$ なら $|\frac{\partial f_t}{\partial t}(x)| \le e^{-ux}$. 従って、

(3) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\partial f_t}{\partial t}(x)\,dx$ は $t \in J$ について局所一様収束（例 10.4.2(a))。

以上と 定理 10.4.5 より $F \in C^1((0,\infty))$,

$$F'(t) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{\partial f_t}{\partial t}(x)}_{=-e^{-tx}\sin x}\,dx \stackrel{\text{問 9.1.4}}{=} -\frac{1}{1+t^2} = -(\mathrm{Arctan}\,t)'.$$

従って、$t > 0$ に対し

(4) $\qquad F(t)+\mathrm{Arctan}\, t = C$ (定数)

また、(4) と $\lim_{t\to 0} F(t) = F(0)$(例 10.4.6) より、(4) は $t=0$ でも成立。更に、$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$(例 10.4.6), $\lim_{t\to\infty} \mathrm{Arctan}\, t = \pi/2$ より $C=\pi/2$.

第 11 章

問 11.1.2: 命題 11.1.6 の条件 (b) が $C=0$ に対して成立する。
問 11.1.3: (i) $(3x^2-3, 3y^2-3)$. (ii)$(4x^3-20x+16y, 4y^3-20y+16x)$. (iii) $(2x(1+x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}, -2y(1+x^2-y^2)e^{-x^2-y^2})$. (iv) $(2x(2+2x^2+y^2)e^{x^2+y^2}, 2y(1+2x^2+y^2)e^{x^2+y^2})$. (v) $\begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$, (iv)$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$.
問 11.1.4: (i) $(x^2-y-z, y^2-z-x, z^2-x-y)$. (ii)$(2x-y+1, 2y-x, 2z-2)$.
(iii) $(ye^x y+ze^{xz}-yze^{xyz}, xe^{xy}+ze^{zx}-zxe^{xyz}.ye^{yz}+xe^{zx}-xye^{xyz})$. (iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}$.
問 11.1.6: $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ を任意とする。$y=0$ なら $x\neq 0$ だから $|x| = \mathrm{ch}\, r$ となる $r>0$ が唯一存在する。また、x の正負に応じ $\theta = 0,\pi$ とすればこれらが $(x,y)=g(r,\theta)$ を満たす唯一の (r,θ) を与える。$y>0$ とする($y<0$ でも同様)。$\mathrm{ch}^2 r = x^2+y^2$ を満たす唯一の $r>0$ に対し $\cos\theta = x/\mathrm{ch}\, r$, $\sin\theta>0$ を満たす唯一の $\theta\in(-\pi,\pi]$ をとると、これらが $(x,y)=g(r,\theta)$ を満たす唯一の (r,θ) を与える。(11.4) にあたる式は

$$(f_r, f_\theta) = (f_x, f_y)\begin{pmatrix} \mathrm{sh}\, r\cos\theta & -\mathrm{ch}\, r\sin\theta \\ \mathrm{ch}\, r\sin\theta & \mathrm{sh}\, r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

問 11.3.1: 原点 0 が唯一の臨界点、$c_1,...,c_d>0$ なら 0 は極大点、$c_1,...,c_d<0$ なら 0 は極小点、それ以外なら極値でない。
問 11.3.2:

$$E = \{x\in[0,\infty)^d\ ;\ \frac{x_1^2}{a_1^2}+...+\frac{x_d^2}{a_d^2}=1\},\quad D=\{s\in[0,\infty)^{d-1}\ ;\ s_1+...+s_{d-1}\le 1\}$$

とする。$x\in E$ に $s=(\frac{x_1^2}{a_1^2},...,\frac{x_{d-1}^2}{a_{d-1}^2})\in D$ を対応させる写像は全単射かつ、

$$x_1\cdots x_d = x_1\cdots x_d\sqrt{s_1\cdots s_{d-1}(1-s_1-...-s_{d-1})}.$$

よって

$$f(s) = s_1\cdots s_{d-1}(1-s_1-...-s_{d-1}),\quad s\in D$$

を最大にすればよい。D はコンパクト、f は連続だから f は最大値を持つが、D の境界では $st(1-s-t)=0$ だから、最大点は $\overset{\circ}{D}$ 内にある。また、最大点は極大点、f は可微分だから最大点は臨界点 (命題 11.3.2)。一方、$\partial_j f = 0$ $(j=1,..,d-1)$ と $s_1,...,s_{d-1}>0$ を併せて次の連立方程式を得る：

$$\begin{aligned} 2s_1+s_2+...+s_{d-1}-1&=0,\\ s_1+2s_2+...+s_{d-1}-1&=0,\\ &....\\ s_1+s_2+...+2s_{d-1}-1&=0. \end{aligned}$$

第 i,j 式の差をとると $s_i=s_j$ が分るから、上の方程式の解は $(1/d,...1/d)$, 従って $\overset{\circ}{D}$ 内の臨界点は $(1/d,...1/d)$ のみである。以上より $f(1/d,...1/d)=d^{-d}$ が f の最大値。従って、求める最大値は $a_1\cdots a_d d^{-d/2}$.
問 11.3.3: (i) 臨界点は $(0,0)$, $(1,1)$, 極小点は $(1,1)$. (ii) 臨界点は $(0,0)$, $\pm(1,1)$, $\pm(3,-3)$, 極小点は $\pm(3,-3)$, 極大点は $(0,0)$. (iii) 臨界点は $(0,0)$, $\pm(1,0)$, $\pm(0,1)$, 極小点は $\pm(0,1)$, 極大点は $\pm(1,0)$. (iv) 臨界点は $(0,0)$, $\pm(1,0)$, $\pm(0,1)$, 極小点は $\pm(0,0)$, 極大点は $\pm(1,0)$.
問 11.3.4: $(-2,-1,3)/3$ が極小点。
問 11.4.1: $\mathrm{cs}\left(f_{rr}-\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}-\frac{f_r}{r}\right)+(\mathrm{c}^2-\mathrm{s}^2)\left(\frac{f_{r\theta}}{r}-\frac{f_\theta}{r^2}\right)$.
問 11.4.2: $\partial_x = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 r+\sin^2\theta}(\mathrm{sh}\, r\cos\theta\partial_r - \mathrm{ch}\, r\sin\theta\partial_\theta)$, $\partial_y = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 r+\sin^2\theta}(\mathrm{ch}\, r\sin\theta\partial_r+\mathrm{sh}\, r\cos\theta\partial_\theta)$.
問 11.4.3 : (i) は容易。(ii)：$(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ を y^2 に関する二次方程式として解き、$|y|\le|x|\le\sqrt{2}$ に注意すれば、$y_\pm = \pm\sqrt{\sqrt{4x^2+1}-x^2-1}$ を得る。また、$y_\pm^2$ の増減により、L は "∞" の形である。
問 11.4.4: (i) C の定義式を y^2 についての二次方程式と見たとき、実数解の存在のために

$-1/4 \leq x$ が必要。更に解 $s_\pm(x)$ が負にならない為に $x \leq 2$ が必要。(ii) 各場合に応じて C の定義式が y について解く。

問 11.4.7: (i) $(f_x, f_y, f_z) = (ye^x y + ze^{xz} - yze^{xyz}, xe^{xy} + ze^{zx} - zxe^{xyz}, ye^{yz} + xe^{zx} - xye^{xyz})$. よって $f(a,b,c) = 0$, $\partial_z f(a,b,c) \neq 0$ となり 定理 11.4.7 から所期陰関数の存在が分かる。また、$z_x = -\frac{ye^{xy}+ze^{xz}-yze^{xyz}}{ye^{yz}+xe^{zx}-xye^{xyz}}$, $z_y = -\frac{xe^{xy}+ze^{zx}-zxe^{xyz}}{ye^{yz}+xe^{zx}-xye^{xyz}}$. (ii) $x^y = y^z \quad \Rightarrow \quad y\log x = z \log y$ だから、$F(x,y,z) = y\log x - z\log y$ を考える。$(F_x, F_y, F_z) = (y/x, -z/y, -\log y)$. よって $F(a,b,c) = 0$, $\partial_z F(a,b,c) \neq 0$ となり 定理 11.4.7 から所期陰関数の存在が分かる。また、$z_x = \frac{y}{x\log y}$, $z_y = -\frac{z}{y \log y}$.

問 11.4.9: $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $F(x) = \binom{f_1(x_1)+...+f_d(x_d)}{g_1(x_1)+...+g_d(x_d)}$ とする。また、$x \in \mathbb{R}^d$ を $x = (x_1, x_2, y)$ $(y = (x_3, ..., x_d))$ とも書く 。このとき、

$$F(0,0,0) = 0, \quad \det \partial_{(x_1,x_2)} F(0,0,0) = f_1'(0)g_2'(0) - f_2'(0)g_1'(0) \neq 0.$$

従って、$F(x_1, x_2, y) = 0$ を (x_1, x_2) について解いた陰関数 $h \in C^1(A \to \mathbb{R}^2)$ (A は $0 \in \mathbb{R}^{d-2}$ の開近傍) が存在する。その座標成分を h_1, h_2 とすればよい。

第 12 章

問 12.2.1: (i) $\frac{1}{b^2}\{(ab-1)e^{ab}+1\} - \frac{a^2}{2}$. (ii) $\frac{1}{2}e^{ab^2}\left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b^4}\right) - \frac{a^2}{4}$.

問 12.2.2: (i),(ii),(iii) に応じて $F(x) = (x+1)(\log(x+1) - 1)$, $F(x) = -\log(1+x)$, $F(x) = \frac{x^{2-p}}{(p-1)(p-2)}$ とするとき、求める積分は、$F(2b) + F(2a) - F(a+b)$.

問 12.2.5: $\frac{4ab}{p+q}B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$

問 12.2.6: (i) $\frac{a^p b^q}{2(p+q)}B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$. (ii) $a \neq b$ なら $\frac{1}{4p(p+1)}\left(\frac{b^2(a^2+k^2)^{p+1} - a^2(b^2+k^2)^{p+1}}{a^2-b^2} + k^{2(p+1)}\right)$, $a = b$ なら $\frac{(a^2+k^2)^p}{4p} - \frac{(a^2+k^2)^{p+1} - k^{2(p+1)}}{4p(p+1)}$. (iii) $a \neq b$ なら $\frac{b^2F(a) - a^2F(b)}{4(a^2-b^2)} + \frac{1}{4}k^2 \log k^2$, $a = b$ なら $\frac{a^2}{4}\log(a^2+k^2) - \frac{F(a)}{4} + \frac{1}{4}k^2\log k^2$, 但し $F(x) = (x^2+k^2)\log(x^2+k^2) - x^2$, $0 \log 0 = 0$.

問 12.2.7: $\frac{8abc}{pq+qr+rp}\frac{\Gamma(1/p)\Gamma(1/q)\Gamma(1/r)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)}$

問 12.2.8: (i) $\frac{a^p b^q c^r \Gamma(p/2)\Gamma(q/2)\Gamma(r/2)}{\Gamma((p+q+r)/2)}$. (ii) $\frac{1}{8p(p+1)(p+2)}\left(F(a,b,c) + F(b,c,a) + F(c,a,b) - k^{2p+4}\right)$, 但し $F(a,b,c) = \frac{b^2c^2(a^2+k^2)^{p+2}}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$. (ii) $\frac{1}{32}\left(F(a,b,c) + F(b,c,a) + F(c,a,b) - k^2(2\log k^2 - 1)\right)$, 但し $F(a,b,c) = \frac{b^2c^2(a^2+k^2)^2(2\log(a^2+k^2)-1)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$.

問 12.2.9: d に関する帰納法で、例 12.2.6 と同様の計算ができる。

問 12.3.2:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(1+x^2)y}dy &= \int_0^\infty e^{-y}dy \int_0^\infty e^{-x^2y}\cos(tx)dx \\ &\overset{\text{例 } 10.4.7}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \exp\left(-y - \frac{t^2}{4y}\right)\frac{dy}{\sqrt{y}} \overset{\text{問 } 10.4.9}{=} \frac{\pi}{2}e^{-t}.\end{aligned}$$

問 12.3.3: ヒントの方針に従い、

$$I_t = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-(y^2+t-\mathbf{i})x}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^2+t}{(y^2+t)^2+1}\,dy + \mathbf{i}\int_0^\infty \frac{dy}{(y^2+t)^2+1}$$

次に両辺で $t \to 0$ の極限を考え、上式が $t = 0$ でも正しいことを言う（定理 10.4.3, 例 10.4.6 参照)。更に、

$$\int_0^\infty \frac{y^2}{y^4+1}\,dy \overset{z=1/y}{=} \int_0^\infty \frac{dz}{z^4+1} \overset{\text{問 } 8.1.2}{=} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

問 12.4.5: $pq > 2$ なら $\frac{2\pi}{p}B\left(q - \frac{2}{p}, \frac{2}{p}\right)$, $pq \leq 2$ なら ∞.

問 12.4.6: (i): $p < d$ なら $\frac{2\pi^{d/2}R^{d-p}}{(d-p)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$, $p \geq d$ なら ∞. (ii): $p > d$ なら $\frac{2\pi^{d/2}R^{d-p}}{(p-d)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$, $p \leq d$ なら ∞. (iii):$pq > d$ なら $\frac{2\pi^{d/2}}{p\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}B\left(q - \frac{d}{p}, \frac{d}{p}\right)$, $pq \leq d$ なら ∞.

第 13 章

問 13.2.3: (i):$a_{\ell(n)} \to a$, また $\varepsilon > 0$ を任意とする。このとき、$\exists k_1 \in \mathbb{N}$, $\sup_{n \geq k_1} |a_{\ell(n)} - a| < \varepsilon/2$. 一方、コーシー列の定義から、$\exists k_2 \in \mathbb{N}$, $\sup\{|a_m - a_n| \ ; \ m, n \in \mathbb{N} \cap [k_2, \infty)\} < \varepsilon/2$ そこで $k = k_1 \vee k_2$, $n \geq k$ とすれば $\ell(n) \geq n \geq k$ なので、$|a_n - a| \leq |a_n - a_{\ell(n)}| + |a_{\ell(n)} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. (ii):$n = 0$ に対しては (13.18) で、$\varepsilon = 1$ としたときの ℓ を $\ell(0)$ とすればよい。また、$\ell(n)$ までが選ばれたとすると、$\ell(n+1)$ は $\ell(n+1) > \ell(n)$ かつ、「$p, q \geq \ell(n+1)$ なら $|a_p - a_q| < 2^{-(n+1)}$.」となるようにすればよい。このとき $|a_{\ell(n+1)} - a_{\ell(n)}| < 2^{-n} \quad n = 0, 1, ...$ だから、$(a_{\ell(n)})$ は収束する（問 2.5.7）。

問 13.2.6: $\varepsilon > 0$ を任意とする。仮定より、$\sum_{n=N_0}^{\infty} \|f_n\|_D < \varepsilon$ となる $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在する。そこで、$s_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$, $M > N \geq N_0$ とすると、$\|s_M - s_N\|_D \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|f_n\|_D < \varepsilon$. 以上より $(s_N)_{N \geq 0}$ は D 上一様コーシー条件を満たす。従って、定理 13.2.5 より D 上一様収束する。

記号表

$\mathbb{R}$ 実数全体（定義 13.1.1）

$\mathbb{N}$ 自然数全体 (定義 1.1.1)

$\mathbb{Z}$ 整数全体 (定義 1.1.1)

$\mathbb{Q}$ 有理数全体 (定義 1.1.1)

$|a|$ $\overline{\mathbb{R}}$ または $\mathbb{R}^d$ の元の絶対値（定義 1.1.1, 定義 2.4.1）

$a^{\pm}$ 正部、負部 （定義 1.1.1）

$\overline{\mathbb{R}}$ 補完数直線 (定義 1.1.2)

(a,b) 開区間 (定義 1.1.3)

$[a,b]$ 閉区間 (定義 1.1.3)

$(a,b],[a,b)$ 半開区間 (定義 1.1.3)

$\sharp A$ 集合 A の元の数 (定義 1.1.4)

max 最大値 (定義 1.2.1, 定義 1.4.3)

min 最小値 (定義 1.2.1, 定義 1.4.3)

sup 上限 (定義 1.3.1, 定義 1.4.3)

inf 下限 (定義 1.3.1, 定義 1.4.3)

$\nearrow$ 非減少 (定義 1.4.2)

$\searrow$ 非増加 (定義 1.4.2)

$B(a,\delta)$ 近傍 （定義 2.1.1）

$\lim_n a_n$ 数列、あるいは点列の極限（定義 2.1.1, 定義 2.4.3）

$C(I)$ 連続関数全体 (定義 2.3.3, 定義 4.2.1)

$x \cdot y$ 内積（定義 2.4.1）

$\mathbb{C}$ 複素数全体 (定義 2.4.2)

$\mathbf{i}$ 虚数単位 (定義 2.4.2)

$\overline{z}$ 複素共役 (定義 2.4.2)

$\mathrm{Re}\, z$ 実部 (定義 2.4.2)

$\mathrm{Im}\, z$ 虚部 (定義 2.4.2)

$\binom{\alpha}{n}$ （一般）二項係数 (問 2.4.5)

exp 指数関数 (命題 3.1.1)

e 自然対数の底 (命題 3.1.1)

ch 双曲余弦 (命題 3.2.1)

sh 双曲正弦 (命題 3.2.1)

cos 余弦 (命題 3.2.2)

sin 正弦 (命題 3.2.2)

log 対数関数 (命題 3.3.1)

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ 関数の極限 (定義 4.1.1)

$f(c\pm)$ 片側極限 (定義 4.3.1)

$\frac{\partial}{\partial x_i}$, ∂_i, ∂_{x_i} 偏微分 (定義 5.1.6)

$\frac{\partial^m}{\partial x^m}$, $f^{(m)}$ 高階微分 (定義 5.2.1)

$D^m(I)$ m 回可微分な関数全体 (定義 5.2.1)

$C^m(I)$ m 回連続的可微分な関数全体 (定義 5.2.1)

$f'_{\pm}$ 片側微分 (定義 5.3.1)

π 円周率 (命題 6.1.1)

tan 正接 (命題 6.1.5)

th 双曲正接 (問 6.1.8)

$(2n)!!$, $(2n-1)!!$ 2 重階乗 (例 6.2.2)

Arcsin 逆正弦 (命題 6.4.1)

Arctan 逆正接 (命題 6.4.2)

Log 対数の主値 (命題 6.5.1)

$\mathrm{m}(\Delta)$ 区間分割 Δ の幅 (定義 7.1.2)

$\mathscr{D}(I)$ I の区間分割全体 (定義 7.1.2)

$s_I(f,\Delta,\xi)$ リーマン和 (定義 7.1.4)

$\mathscr{R}(I)$ （リーマン）可積分関数全体 (定義 7.1.4)

$\int_I f$ （リーマン）積分 (定義 7.1.4)

$\overline{s}_I(f,\Delta)$, $\underline{s}_I(f,\Delta)$ 過剰和、不足和 (定義 7.2.2)

$r_I(f,\Delta)$ 過剰和と不足和の差 (定義 7.2.2)

$\overline{s}_I(f)$, $\underline{s}_I(f)$ 上積分、下積分 (定義 7.4.1)