# 2008年度後期　証券市場の一般均衡分析 講義ノート

## 1　さまざまなくじの定義

**1.1 定義 (単純くじ)** $C = \{1, \ldots, N\}$ を帰結 (consequence) の集合とする．このとき，任意の $n = 1, \ldots, N$ について $p_n \geq 0$ かつ $\sum_n p_n = 1$ を満たす $p_1, \ldots, p_N$ からなる $N$ 次元ベクトル $(p_1, \ldots, p_N)$ を単純くじ (simple lottery または単に lottery) と呼ぶ．また，単純くじの集合を $\mathscr{L}$ とする．

**1.2 定義 (複合くじ)** 結果が単純くじとなっているくじのことを複合くじ（compound lottery，または sequential lottery，two-stage lottery）と呼ぶ．一般に複合くじは次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_K \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_K \end{pmatrix}$$

上の表現は，任意の $k = 1, \ldots, K$ について，確率 $\alpha_k$ で，単純くじ $L_k$ が得られることを表している．ここで，任意の $k = 1, \ldots, K$ について，$L_k \in \mathscr{L}$ であり，$\alpha_k \geqslant 0$ かつ $\sum_k \alpha_k = 1$ である．

**1.3 定義 (単純化くじ)** 複合くじ

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_K \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_K \end{pmatrix}$$

に対し，単純くじ $\left( \sum_k \alpha_k p_1^k, \ldots, \sum_k \alpha_k p_N^k \right)$ を $\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_K L_K$ と書くことにする．これは単純化くじ (reduced lottery) と呼ばれる．ここで，$L_k$ は単純くじ $(p_1^k, \ldots, p_N^k)$ を表している．$\alpha_k p_1^k$ は，単純くじ $L_k$ を通じて結果 1 が生じる確率であり，$\sum_k \alpha_k p_1^k$ は複合くじから実現しうるすべての単純くじ $L_1 \ldots, L_K$ を通じて結果 1 が実現する確率を表している．

**1.4 注意** $\Omega$ を確率測度空間とする．$\Omega$ を有限集合に限定し，$\Omega = \{1, \ldots, M\}$ とする．また，$1, \ldots, M \in \Omega$ が実現する確率をそれぞれ $\pi_1, \ldots, \pi_M$ とする．$X : \Omega \to \boldsymbol{R}$, $Y : \Omega \to \boldsymbol{R}$ と定義すると，一般には

$$\frac{1}{2} L_X + \frac{1}{2} L_Y = L_{\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y}$$

は成立しない．このことを例示しよう．$C = X(\Omega) \cup Y(\Omega)$ とすると $C$ は有限集合である．これを $\{c_1, \ldots, c_N\}$ と書くことにする．また $L_X$ を，関数 $X$ が $C$ 上に導入するくじ，すなわち，

$$L_X = \left( \sum_{m \in X^{-1}(c_1)} \pi_m, \ldots, \sum_{m \in X^{-1}(c_N)} \pi_m \right)$$

とする．ここで $n=1,\dots,N$ について，$X^{-1}(c_n)$ は，関数 $X$ が帰結 $c_n$ を与えるような $\Omega$ の元からなる集合である．そのような任意の $\Omega$ の元を $m\in X^{-1}(c_n)$ とすると，$m$ が実現する確率は $\pi_m$ であるから，$X$ が帰結 $c_n$ を与える確率が $\displaystyle\sum_{m\in X^{-1}(c_n)}\pi_m$ で表されている．同様に $L_Y$ を，関数 $Y$ が $C$ 上に導入するくじ，

$$L_Y=\left(\sum_{m\in Y^{-1}(c_1)}\pi_m,\dots,\sum_{m\in Y^{-1}(c_N)}\pi_m\right)$$

とする．ここで，$n=1,\dots,N$ について $\displaystyle\sum_{m\in Y^{-1}(c_n)}\pi_m$ は $Y$ が帰結 $c_n$ を与える確率である．このとき，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}L_X+\frac{1}{2}L_Y&=\frac{1}{2}\left(\sum_{m\in X^{-1}(c_1)}\pi_m,\dots,\sum_{m\in X^{-1}(c_N)}\pi_m\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{m\in Y^{-1}(c_1)}\pi_m,\dots,\sum_{m\in Y^{-1}(c_N)}\pi_m\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\sum_{m\in X^{-1}(c_1)}\pi_m+\frac{1}{2}\sum_{m\in Y^{-1}(c_1)}\pi_m,,\dots,\frac{1}{2}\sum_{m\in X^{-1}(c_N)}\pi_m+\frac{1}{2}\sum_{m\in Y^{-1}(c_N)}\pi_m\right)\end{aligned}$$

である．一方，$L_{\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y}$ は関数 $\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y$ が $C$ 上に導入するくじであるから，

$$L_{\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y}=\left(\sum_{m\in\left(\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)^{-1}(c_1)}\pi_m,\dots,\sum_{m\in\left(\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)^{-1}(c_N)}\pi_m\right)$$

である．一般に，$n=1,\dots,N$ について

$$\frac{1}{2}\sum_{m\in X^{-1}(c_n)}\pi_m+\frac{1}{2}\sum_{m\in Y^{-1}(c_n)}\pi_m=\sum_{m\in\left(\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)^{-1}(c_n)}\pi_m$$

は成立しない．

# 2　二項関係 $\succsim$

**2.1 定義** 集合 $\succsim$ を直積集合 $\mathscr{L}\times\mathscr{L}$ の部分集合とする．二項関係（binary relation）の記述の慣例に従い，$(\mathscr{L},\mathscr{L}')\in\succsim$ を $\mathscr{L}\succsim\mathscr{L}'$ と，$(\mathscr{L},\mathscr{L}')\notin\succsim$ を $\mathscr{L}\not\succsim\mathscr{L}'$ と書くことにする．集合 $\succsim$ は二項関係と呼ばれる．

同様に, 集合 $\sim$ と集合 $\succ$ を $\mathscr{L}\times\mathscr{L}$ の部分集合とする．$(\mathscr{L},\mathscr{L}')\in\succsim$ かつ $(\mathscr{L}',\mathscr{L})\in\succsim$ ならば $(\mathscr{L},\mathscr{L}')\in\sim$ が成立し，$(\mathscr{L},\mathscr{L}')\in\succsim$ かつ $(\mathscr{L}',\mathscr{L})\notin\succsim$ ならば $(\mathscr{L},\mathscr{L}')\in\succ$ が成立するとする．

$\succsim$ の場合と同様に，$(\mathscr{L},\mathscr{L}')\in\sim$ を $\mathscr{L}\sim\mathscr{L}'$ と，$(\mathscr{L},\mathscr{L}')\in\succ$ を $\mathscr{L}\succ\mathscr{L}'$ と書くことにする．

以下の分析では，二項関係 $\succsim$ は，次の 2 つの性質を満たすと仮定する．

(a) 完備性（completeness）: 任意の $\mathscr{L}$，$\mathscr{L}'$ について，$\mathscr{L}\succsim\mathscr{L}'$ または $\mathscr{L}'\succsim\mathscr{L}$

(b) 推移性（transitivity）: $\mathscr{L}\succsim\mathscr{L}'$ かつ $\mathscr{L}'\succsim\mathscr{L}''$ ならば，$\mathscr{L}\succsim\mathscr{L}''$.

# 3　独立性公理

## 3.1　独立性公理の定義

**3.1 定義 (独立性公理)** 任意の $L$ と $L'$ に対して，$L\succsim L'$ と $\alpha L+(1-\alpha)L''\succsim\alpha L'+(1-\alpha)L''$ が同値であるならば，$\succsim$ は独立性公理 (Independence Axiom) を $\mathscr{L}$ 上で満たすと言う．

$L, L', L'' \in \mathscr{L}$，$\alpha \in [0,1]$ とし，複合くじ 1 を $\begin{pmatrix} L & L'' \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$，複合くじ 2 を $\begin{pmatrix} L' & L'' \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$ とする．2 つの複合くじの間の選好関係はどのように考えられるであろうか．$\succsim$ は $\mathscr{L}$ 上に定義されているため，複合くじ 1 と複合くじ 2 の選好関係を，二項関係 $\succsim$ を使って表すことはできない．しかし，単純化くじは $\mathscr{L}$ に含まれるので，2 つの単純化くじの選好関係は二項関係を使って表すことはできる．ここで複合くじ 1 と複合くじ 2 の単純化くじは，それぞれ $\alpha L + (1-\alpha)L'' \in \mathscr{L}$ と $\alpha L' + (1-\alpha)L'' \in \mathscr{L}$ である．

複合くじ 1 と複合くじ 2 は，確率 $1-\alpha$ で単純くじ $L''$ が実現する点で共通している．$L''$ が得られなかった場合，2 つの複合くじの違いは，$L$ と $L'$ の違いに帰される．したがって，もし意思決定者が $L \succsim L'$ と考えているならば，くじ 1 よりもくじ 2 のほうを好むべきである．これが独立性公理の論理である．

### 3.2　独立性公理は妥当か？

くじの場合，$L$ や $L'$ が実現するときは，決して $L''$ は実現しないので，$L$ と $L''$ や $L'$ と $L''$ の間に補完的関係はなく，独立性公理を課すのは妥当と考えられる．上で紹介したくじ 1 とくじ 2 について，$\alpha = \frac{1}{2}$ と仮定しよう．このとき，$L \succsim L'$ ならば，$\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L'' \succsim \frac{1}{2}L' + \frac{1}{2}L''$ が成立する．

ここで，次のような需要理論の例と対比してみよう．2 財を右足用の靴，左足用の靴とし，$x = (4,4)$，$y = (10,2)$，$z = (2,10)$ とする．$x$ では靴は 4 足，$y$ では 2 足できるので，$x \succsim y$ が成立すると考えられる．このとき，2 次元ベクトルの凸結合として $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$ と $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ を定義すると，$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \succsim \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ は成立するであろうか？ 2 つの凸結合をそれぞれ計算すると，

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}(4,4) + \frac{1}{2}(2,10) = \frac{1}{2}(6,14) = (3,7)$$
$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}(10,2) + \frac{1}{2}(2,10) = \frac{1}{2}(12,12) = (6,6)$$

となり，前者からは 3 足，後者からは 6 足の靴が得られる．したがって，$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \succsim \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ は成立せず，独立性公理が満たされない．ここで独立性公理が満たされない原因は，当然のことではあるが，右足用の靴と左足用の靴は同時に消費され，2 財の間に補完的関係が存在する点にある．

### 3.3　独立性公理の反例

**3.2 例 (エルスバーグのパラドックス (Ellsberg Paradox))** 次のような 2 つのつぼを考える．どちらにもボールが 100 個入っているが，つぼ 1 には赤 50 個，白 50 個のボールが入ってることがわかっているが，つぼ 2 には赤と白がそれぞれいくつ入っているかはわからないとする．そこで意思決定者は，つぼ 2 には赤 $x$ 個，白 $(100-x)$ 個のボールが入っていると期待しているとしよう．

ここで，次のような実験をする．まず，赤が出たときのみ 1 万円獲得できるとした場合，多くの人はつぼ 1 を好む（つぼ 1 $\succ$ つぼ 2）という結果が出る．このとき人々は，

$$\frac{50}{100} > \frac{x}{100} \Longrightarrow x < 50$$

と考えているはずである．

次に，白が出たときのみ 1 万円を獲得できるとした場合，このときも，多くの人はつぼ 1 を好む（つぼ 1 $\succ$ つぼ 2）という結果が出る．つまり人々は，

$$\frac{50}{100} > \frac{100-x}{100} \Longrightarrow x > 50$$

と考えているはずである．しかし，これは先ほどの結果と同時には起こりえない．

実験では，このような矛盾する結果が観察される．これは，人々が選択をする際に，必ずしも確率を念頭に置いていないことを示しており，そのようなとき，独立性公理は成立しないことになる．

**3.3 例 (帰納主義 (Consequentialism) )** 父と 2 人の娘アリスとバーバラが無人島にいるとする．娘 2 人が病気になってしまったが，薬は 1 人分しかない．このとき，帰結の集合は

$$C = \{A, B\}$$

である．ここで A はアリスに投薬し，B はバーバラに投薬することを表す．くじの集合の中には，確率 1 でアリスが助かるくじと確率 1 でバーバラが助かるくじがあるが，両者は父にとって無差別である．つまり

$$(1,0) \sim (0,1)$$

が成立しているとする．しかし，ここで，父は運を天にまかせ，どちらの娘に薬を与えるかをコインで決めるほうを好むとする．つまり，

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \succ (1,0)$$
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \succ (0,1)$$

が成立している．

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(0,1)$$
$$(0,1) = \frac{1}{2}(0,1) + \frac{1}{2}(0,1)$$

が成立する．$(1,0) \sim (0,1)$ より，独立性公理が満たされるならば $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim (0,1)$ が成立するはずであるが，実際は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \succ (1,0)$ である．つまり独立性公理が満たされない．この原因は，くじを生む手続きが選好には全く影響しない点にある．

**3.4 例 (情報開示のスピード (Speed of information revelation))** 以下のような 2 つの複合くじを考えよう．くじ 1 は，実現する単純くじに不確実性がなく，確率 $\frac{1}{2}$ で必ず 1 万円が獲得できる単純くじが実現し，確率 $\frac{1}{2}$ で必ず 2 万円が獲得できる単純くじが実現するようなくじである．

くじ 2 は，実現する単純くじの分布に不確実性がなく，確率 $\frac{1}{2}$ で 1 万円，確率 $\frac{1}{2}$ で 2 万円が獲得できる単純くじが，確率 1 で実現するようなくじである．

2 つの複合くじから得られる単純化くじは全く同じであり，独立性公理が成立するならば，2 つの複合くじは無差別である．しかし，くじ 1 はくじ 2 よりも早い段階で，獲得できる賞金の額が明らかになるため，意思決定者によっては，くじ 1 をくじ 2 よりも選好する可能性がある．このようなときは独立性公理は成立しない．情報開示のスピードに効用が依存するケースの分析に対しては，帰納的 (recursive) 効用関数というものが考えられている．

状態依存効用関数は，独立性公理を満たさない．

**3.5 例 (状態依存効用関数 (State-dependent utility) )** 効用関数が状態に依存する場合は，独立性公理を満たさない可能性がある．このことを確認するために次の 2 つの例を見ていこう．

はじめの例は，かさやアイスクリームに対する効用は天気という状態に依存するために，独立性公理が満たされない状況を示すものである．明日の天気の確率は

$$\begin{cases} \text{晴れ} & 50\% \\ \text{雨} & 50\% \end{cases}$$

で与えられているものとする．帰結の集合は $C = \{$ かさ, アイスクリーム $\}$ とし，次のような状態依存くじ， $L_1$ と $L_2$ を考える．

$$L_1 = \begin{cases} \text{アイス} & (\text{晴れのとき}) \\ \text{かさ} & (\text{雨のとき}) \end{cases}, \quad L_2 = \begin{cases} \text{かさ} & (\text{晴れのとき}) \\ \text{アイス} & (\text{雨のとき}) \end{cases}$$

通常は，$L_1 \succ L_2$ が成立するが，2 つの確率変数が導入する単純くじは同じで，ともに

$$\begin{pmatrix} \text{かさ} & \text{アイス} \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

である．もし二項関係 $\succsim$ が独立性公理を満たすなら，$L_1 \sim L_2$ が成立する．しかしここでは $L_1 \succ L_2$ が成立しており，独立性公理を満たしていない．ここで $\succsim$ が独立性公理を満たさないのは，かさやアイスに対する効用が状態依存的であるためである．

次に，くじの賞金に対する効用が雇用状態によって変わるために独立性公理が満たされない例を見ていこう．労働者は来期に 50% の確率で解雇されるとし，2 つのくじを

$$L_1 = \begin{cases} 20\text{ 万円} & (\text{解雇されたとき}) \\ 0 & (\text{解雇されないとき}) \end{cases}, \quad L_2 = \begin{cases} 0 & (\text{解雇されたとき}) \\ 20\text{ 万円} & (\text{解雇されないとき}) \end{cases}$$

とする．いずれのくじからも確率 50% で賞金 20 万円が得られ，確率 50% で何も得られないにもかかわらず，通常は $L_1 \succ L_2$ が成立し，独立性公理が満たされない．ここで独立性公理が満たされないのは，くじ以外から得られる所得が雇用状態によって異なるためであり，そのためくじから得られる賞金に対する効用もまた雇用状態によって異なるからである．

もし雇用されたときに受け取る賃金を $w$ 万円とすると，$L_1$ と $L_2$ はそれぞれ

$$\begin{cases} 20\text{ 万円} & (\text{解雇されたとき}) \\ w\text{ 万円} & (\text{解雇されないとき}) \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 & (\text{解雇されたとき}) \\ (20+w)\text{ 万円} & (\text{解雇されないとき}) \end{cases}$$

という総所得を与える．何も持っていないときに獲得できる 20 万円は，$w$ 万円持っているときに獲得できる 20 万円よりも効用を大きく増加させる．つまり，限界効用の観点からも $L_1$ が $L_2$ より望ましい．収入の一部のみを表すくじについては，独立性公理は成立しないが，このように総所得を表すくじについては，独立性公理が満たされる可能性がある．

**3.6 例 (心理的な負の補完性)** 帰結の集合が

$$C = \{ \text{ベネチアへの旅行}, \text{ベネチアに関する映画を見る}, \text{家にいる} \}$$

で与えられるとする．通常は，$(1,0,0) \succ (0,1,0) \succ (0,0,1)$ が成立する．Mark Machina (1987, Journal of Economic Perspectives) は，

$$(0.99, 0, 0.01) \succ (0.99, 0.01, 0)$$

という選好を持つ人がいる可能性を紹介し，その場合は独立性公理が満たされないことを指摘した．

単純くじ $(0.99, 0, 0.01)$ は，

$$\begin{pmatrix} (1,0,0) & (0,0,1) \\ 0.99 & 0.01 \end{pmatrix}$$

という複合くじの単純化くじ $(0.99)(1,0,0) + (0.01)(0,0,1)$ に等しい．同様に，$(0.99, 0.01, 0)$ は，

$$\begin{pmatrix} (1,0,0) & (0,1,0) \\ 0.99 & 0.01 \end{pmatrix}$$

という複合くじの単純化くじ $(0.99)(1,0,0)+(0.01)(0,1,0)$ に等しい．

2 つの複合くじを比較すると，確率 0.99 で単純くじ (1,0,0) が実現する点では共通しており，確率 0.01 でそれぞれ $(0,1,0)$ と $(0,0,1)$ が実現する点で異なっている．すでに述べたように，通常は $(0,1,0) \succ (0,0,1)$ が成立し，もし独立性公理が満たされるならば，$(0.99)(1,0,0)+(0.01)(0,1,0) \succ (0.99)(1,0,0)+(0.01)(0,0,1)$ すなわち $(0.99,0.01,0) \succ (0.99,0,0.01)$ が成立するはずである．したがって，Machina が紹介した選好は独立性公理を満たしていない．

それでは，Machina が紹介したような選好を持つのはどのような人なのであろうか．Machina による説明では，その人は，通常は家にいることよりもベネチアに関する映画を見ることのほうが好ましいと考えているが，ベネチアへ旅行できなくなったという状況の中では，ベネチアに関する映画を見ることに苦痛を感じ，家にいるほうが望ましいと考えているのである．つまり $C$ の要素の間には物理的な補完性は存在しないが，心の中は負の補完性があり，$(1,0,0)$ が実現するかどうかが，$(0,1,0)$ と $(0,0,1)$ の選好に影響を与えているのである．

**3.7 例 (アレーのパラドックス)** 賞品の集合が

$$C = \{7\text{ 万円}, 5\text{ 万円}, 0\text{ 円}\}$$

で与えられる場合に，次の 4 つのくじについて考えてみよう．

$$\begin{cases} L_1 = (0,1,0) \\ L_1' = (0.10, 0.89, 0.01) \end{cases}$$
$$\begin{cases} L_2 = (0, 0.11, 0.89) \\ L_2' = (0.10, 0, 0.90) \end{cases}$$

多くの人の選好は $L_1 \succ L_1'$ かつ $L_2' \succ L_2$ であるが，このような選好は独立性公理を満たさない．このことを示すために，次のような 2 つのくじを考えよう．

$$L_3 = \left(\frac{10}{11}, 0, \frac{1}{11}\right)$$
$$L_4 = (0,0,1)$$

これらを用いると，$L_1$，$L_1'$，$L_2$，$L_2'$ は，それぞれ以下のように表現することができる．

$$\begin{aligned} L_1 &= (0.11)L_1 + (0.89)L_1 \\ L_1' &= (0.11)L_3 + (0.89)L_1 \\ L_2 &= (0.11)L_1 + (0.89)L_4 \\ L_2' &= (0.11)L_3 + (0.89)L_4 \end{aligned}$$

$L_1$ と $L_1'$ の右辺の第 2 項はともに $(0.89)L_1$ である．$L_1 \succ L_1'$ が成立し，かつ独立性公理が満たされるならば，$L_1 \succ L_3$ でなければならない．一方，$L_2$ と $L_2'$ の右辺の第 2 項はともに $(0.89)L_4$ である．$L_2' \succ L_2$ が成立し，かつ独立性公理が満たされるならば，$L_3 \succ L_1$ でなければならない．したがって，独立性公理は満たされない．

$L_1$ と $L_3$ を比較すると，$L_1$ は確実に 5 万円与えるのに対して $L_3$ が与える賞金は 7 万円のときもあれば 0 円のときもある．つまり $L_1$ は $L_3$ よりもリスクが少ない．$L_1$ と $L_1'$ に対応する複合くじは，いずれも確率 0.89 で単純くじ $L_1$ を与え，この場合は確実に 5 万円を与える．$L_1 \succ L_1'$ が成立し，かつ独立性公理が満たされるならば，確率 0.11 で与えられる単純くじ，$L_1$ と $L_3$ の間には $L_1 \succ L_3$ が成立し，リスクの少ないくじが好まれている．

一方，$L_2$ と $L_2'$ に対応する複合くじは，いずれも確率 0.89 で $L_4$ を与え，この場合は確実に何も与えない．$L_2 \succ L_2'$ が成立し，かつ独立性公理が満たされるならば，確率 0.11 で与えられる単純くじ $L_1$ と $L_3$ の間に $L_1 \prec L_3$ が成立し，リスクの大きいくじが好まれている．

この例では，確率 0.89 で実現する単純くじから得られる状況が悪化すると，残りの確率で実現する単純くじの選好に関して，人々はよりリスク愛好的になる状況を示している．このような状況では，独立性公理は満たされない．

# 4　期待効用定理

以上のような多くの反例があるにもかかわらず，実際には二項関係 $\succsim$ が独立性公理を満たすと仮定することは多い．とくに，$\succsim$ が独立性公理を満たすとき，次に述べるような期待効用定理 (Expected Utility Theorem) が成立し，$\succsim$ が期待効用の形で表現できるという利便性は大きい．

**4.1 定理 (期待効用定理 (Expected Utility Theorem) )** 二項関係 $\succsim$ が完備性，推移性，連続性を満たし，かつ独立性公理を満たすとする．このとき，任意のくじ $L = (p_1, \dots, p_N) \in \mathscr{L}$ および $L' = (p_1', \dots, p_N') \in \mathscr{L}$ について，

$$L \succsim L' \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{N} p_n u_n \geq \sum_{n=1}^{N} p_n' u_n$$

が成立するようなベクトル $(u_1, \dots, u_N) \in \boldsymbol{R}^N$ が存在する．ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} p_n u_n$ は，$L$ に関する $(u_1, \dots, u_N)$ の期待値である．

この定理は，ベクトル $(u_1, \dots, u_N) \in \boldsymbol{R}^N$ を所与としたとき，関数 $U : \mathscr{L} \to \boldsymbol{R}$ を任意の $L = (p_1, \dots, p_N) \in \mathscr{L}$ に関して

$$U(L) = \sum_{n=1}^{N} p_n u_n$$

と定義すると，

$$L \succsim L' \Longleftrightarrow U(L) \geq U(L')$$

が成立する，と言い換えることもできる．

($\Longrightarrow$:) この証明のステップは以下の通りである．

(i) $N < \infty$ かつ $\succsim$ が連続性を満たすことより，任意の $L$ について $\bar{L} \succsim L$ を満たす $\bar{L}$ が存在する．また，任意の $L$ について $\underline{L} \succsim L$ を満たす $\underline{L}$ が存在する．$\bar{L}$ と $\underline{L}$ は，それぞれ最も良いくじと最も悪いくじであると言える．

(ii) 任意の $L$ に対して，

$$L \sim \alpha \bar{L} + (1 - \alpha) \underline{L}$$

となるような唯一の $\alpha \in [0, 1]$ が存在する．この $\alpha$ を $U(L)$ と書くことにする．

(iii) $\succsim$ が独立性公理を満たすことから，任意の $L \in \mathscr{L}$，$L' \in \mathscr{L}$ および $\alpha \in [0, 1]$ について

$$U(\alpha L + (1 - \alpha) L') = \alpha U(L) + (1 - \alpha) U(L')$$

が成立する．

(iv) 任意の $n = 1, \ldots, N$ に対して,

$$u_n = U\left((0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\right)$$

と定義する．左辺の $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ は，$n$ 番目の要素だけが 1 で他はすべて 0 であるようなベクトルであり，$n$ 番目の商品を確率 1 で獲得できるようなくじを表している．このとき，任意の $L$ に対して,

$$U(L) = \sum_{n=1}^{N} p_n u_n$$

が成立する．

**練習問題 1** 以上の証明のステップのギャップを埋めよ．

**練習問題 2** ($\Longleftarrow$:) を証明せよ．

# 5 $C$ が無限集合である場合の分析

これまで帰結の集合 $C$ が有限集合であると仮定してきたが，これからは $C$ が無限集合である場合の単純くじや複合くじを考察していく．

応用分野では，$C$ の分布が一様分布や対数正規分布に従うと仮定することが多く，$C$ が無限集合の場合に，$C$ 上のくじおよびくじの集合上でどのような収束概念を使うのかを明らかにする必要がある．

無限集合である $C$ の例としては，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}_+$，$\boldsymbol{R}_{++}$，$\boldsymbol{R}^L$ などがある．単純くじの集合も，無限集合である $C$ の一つである．

# 6 位相と $\sigma$-加法族

## 6.1 位相とその基底

**6.1 定義 (位相と位相空間)** 集合 $C$ の部分集合の集合 $\mathscr{O}$ が，次の条件を満たすとき，$\mathscr{O}$ は $C$ の位相 (topology) であるという．

(1) $C \in \mathscr{O}$ かつ $\phi \in \mathscr{O}$.

(2) $A_1 \in \mathscr{O}, A_2 \in \mathscr{O}, \ldots, A_N \in \mathscr{O}$ ならば，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{N} A_n \in \mathscr{O}$.

(3) $\Lambda$ を任意の集合とする．このとき任意の $\lambda \in \Lambda$ について $A_\lambda \in \mathscr{O}$ ならば，$\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathscr{O}$.

位相 $\mathscr{O}$ が与えられた空間を位相空間 (topological space) といい，$(C, \mathscr{O})$ と書く．

ひとつの $C$ について，異なる位相を定義することも可能である．

**6.2 例** $C$ を任意の集合，$\mathscr{O} = \{\phi, C\}$ とすると，$\mathscr{O}$ は $C$ のひとつの位相である．この位相を密着位相 (trivial topology) と呼ぶ．

**6.3 例** $C$ を任意の集合，$\mathscr{O}$ を $C$ のすべての部分集合からなる集合 (ベキ集合) とすると，$\mathscr{O}$ は $C$ のひとつの位相である．この位相を離散位相 (discrete topology) と呼ぶ．

**6.4 定義 (基底)** $(C, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$\mathscr{S}$ を $\mathscr{O}$ の部分集合とする．このとき，任意の $A \in \mathscr{O}$ について，次の 2 つの条件

(1) 任意の $\lambda \in \Lambda$ について，$B_\lambda \in \mathscr{S}$ である

(2) $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = A$ が成立する

を満たすような $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が存在するならば，$\mathscr{S}$ を $\mathscr{O}$ の基底 (base) と呼ぶ．

**練習問題 3** $\mathscr{S}$ が $\mathscr{O}$ の基底であることの必要十分条件は，任意の $A \in \mathscr{O}$ と任意の $x \in A$ について，$x \in B \subseteq A$ となるような $B \in \mathscr{S}$ が存在することである．

ここで，$C$ の部分集合からなる集合 $\mathscr{S}$ に対して，以下の条件を考えよう．

**条件 1**

(1) 任意の $x \in C$ について，$x \in A$ となるような $A \in \mathscr{S}$ が存在する．

(2) 任意の $A_1 \in \mathscr{S}$，$A_2 \in \mathscr{S}$ と任意の $x \in A_1 \cap A_2$ について，$x \in B \subseteq A_1 \cap A_2$ となるような $B \in \mathscr{S}$ が存在する．

**練習問題 4** もし $\mathscr{S}$ が $\mathscr{O}$ の基底であるならば，上の条件 1 が成立することを証明せよ．

条件 1 の (1)，(2) に $\mathscr{O}$ が全く登場しない点は重要である．すでに見たように集合 $C$ に対して複数の位相を定義することが可能であり，各位相に対してそれぞれ基底を定義することができる．しかし (1)，(2) は，$C$ に対して位相の基底が満たすべき条件を表すものであり，位相については何ら条件を課していない．したがって，条件 (1)，(2) は，どのような位相であるかを問わず，任意の位相の基底に関して成立する条件であると言える．

上の練習問題 4 では，$\mathscr{S}$ は位相の基底として与えられているが，実は，次の命題で見るように，条件 1 を満たすような任意の集合 $\mathscr{S}$ が位相を生成することがわかる．

**6.5 命題** $\mathscr{S}$ が $C$ の部分集合からなる集合で，条件 1 を満たすとする．このとき $\mathscr{S}$ は，$\mathscr{S}$ を含む最弱の位相の基底である．また，この最弱の位相は，適当な $\mathscr{S}$ の部分集合 $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し，$\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ という形をとるような $C$ のすべての部分集合からなっている．

この命題は重要である．以下ではさまざまな位相を定義していくのだが，その際に，位相に属するすべての元を列挙するのではなく，位相の基底の元を定義することによって，位相を定義していくことが多いからである．

**6.6 例** $\boldsymbol{R}^L$ における開球とは，$x \in \boldsymbol{R}$ と $\epsilon > 0$ を用いて $\{y \in \boldsymbol{R}^L \mid \parallel x - y \parallel < \epsilon\}$ と書かれる集合のことである．ここで $\parallel \cdot \parallel$ は $\boldsymbol{R}^L$ のユークリッドノルムを表す．開球全体の集合は条件 1 を満たす．それが基底となるような位相はユークリッド位相と呼ばれる．

## 6.2 $\sigma$-加法族とボレル $\sigma$-加法族

**6.7 定義 ($\sigma$-加法族)** $C$ の部分集合の集合 $\mathscr{B}$ が以下の 3 条件を満たすとき，$\mathscr{B}$ を $C$ 上の $\sigma$-加法族 ($\sigma$-field) という．

(1) $C \in \mathscr{B}$ かつ $\phi \in \mathscr{B}$.

(2) $A \in \mathscr{B}$ ならば，$C \backslash A \in \mathscr{B}$.

(3) $A_1 \in \mathscr{B}, A_2 \in \mathscr{B}, \ldots$ ならば，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{B}$.

**6.8 例** $C$ のすべての部分集合の集合 (ベキ集合) は $\sigma$-加法族である．また，$\{\phi, C\}$ は $\sigma$-加法族である．

**6.9 命題** $\Lambda$ を任意の集合とし，任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\mathscr{B}_\lambda$ が $C$ のひとつの $\sigma$-加法族であるとする．このとき，$\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda$ は $C$ の $\sigma$-加法族である．

**6.10 定義 (ボレル $\sigma$-加法族 )** $(C, \mathscr{O})$ を位相空間とする．$\mathscr{O}$ を含む $\sigma$-加法族の集合を列挙したものを $\mathscr{B}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ と書くとする．このとき $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda$ も $C$ の $\sigma$-加法族であり，ボレル $\sigma$-加法族 (Borel $\sigma$-field) と呼ばれる．ボレル $\sigma$-加法族は，$(C, \mathscr{O})$ に対して一意に定まる．

$C$ 上の 2 つの位相 $\mathscr{O}$ と $\mathscr{O}'$ の間に，$\mathscr{O}' \subset \mathscr{O}$ という関係が成り立つとき，$\mathscr{O}$ は $\mathscr{O}'$ より強いという．これと同様のことが $\sigma$-加法族についても言える．$C$ 上の 2 つの $\sigma$-加法族 $\mathscr{B}$ と $\mathscr{B}'$ の間に，$\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ という関係が成り立つとき，$\mathscr{B}$ は $\mathscr{B}'$ より強いという．ボレル $\sigma$-加法族は，$\mathscr{O}$ を含む最弱の $\sigma$-加法族である．

# 7 確率測度

**7.1 定義 (測度)** $\mathscr{B}$ を任意のボレル $\sigma$-加法族とする．$P : \mathscr{B} \to \boldsymbol{R}$ が次の条件

(1) $P(\phi) = 0$

(2) $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{B}$ が互いに素 ($n \neq m$ ならば，$A_n \cap A_m = \phi$) であるならば，

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

が成立する．これを可算無限個の列に対して，加法性が成立するという ($\sigma$-加法性).

(3) 任意の $A \in \mathscr{B}$ について，$P(A) \geq 0$

を満たすとき，$P$ は測度 (measure) と呼ばれる．

**7.2 定義 (確率測度)** $\mathscr{B}$ を任意のボレル $\sigma$-加法族とし，$P : \mathscr{B} \to \boldsymbol{R}$ を測度とする．このとき $P$ が

(4) $P(C) = 1$

を満たすとき，$P$ は確率測度 (probability measure) と呼ばれる．

**7.3 注意** (4) を $\mathscr{P}(C) < \infty$ と弱めた場合，$\mathscr{P}$ は有限測度 (finite measure) と呼ばれる．もし，$\mathscr{P}(C) = 100$ ならば，$\mathscr{P}$ 全体を 100 で割れば，それは確率測度である．したがって，有限測度と確率測度は数学的にはほぼ同じである．ただし，有限測度を用いるほうが分析上便利な場合がある．

**7.4 定義 (ルベーグ測度)** $\mathscr{B}$ を $\boldsymbol{R}$ 上のボレル $\sigma$-加法族とし，$P : \mathscr{B} \to \boldsymbol{R}$ を測度とする．このとき $P$ が $a < b$ である任意の $a \in \boldsymbol{R}$ と $b \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$P((a, b)) = b - a$$

を満たすとき，$P$ はルベーグ測度と呼ばれる．ここで例えば,

$$P((0,\infty))=\infty$$
$$P((-\infty,-100))=\infty$$

となるように，ルベーグ測度は $\infty$ になることもある．

**7.5 定義 (符号付き測度)** $\mathscr{P}:\mathscr{B}\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$ が，(1)，(2) を満たし，次のいずれかの条件を満たすとき，$\mathscr{P}$ を符号付き測度 (singed measure) と呼ぶ．

(1) すべての $A\in\mathscr{B}$ について，$\mathscr{P}(A)\geq -r$ となるような $r\geq 0$ が存在する．

(2) すべての $A\in\mathscr{B}$ について，$\mathscr{P}(A)\leq r$ となるような $r\geq 0$ が存在する．

両方を満たすときは，有限符号付き測度と呼ぶ．

**7.6 命題** $\mathscr{P}$，$\mathscr{Q}$ を $(C,\mathscr{B})$ 上の有限測度とする．このとき $\mathscr{P}-\mathscr{Q}:\mathscr{B}\to\boldsymbol{R}$ を

$$(\mathscr{P}-\mathscr{Q})(A)=\mathscr{P}(A)-\mathscr{Q}(A)$$

と定義するとき，$\mathscr{P}-\mathscr{Q}$ は必ず符号付き測度である．

**7.7 定義 (ボレル測度)** 位相空間 $(C,\mathscr{O})$ に対するボレル $\sigma$-加法族を $\mathscr{B}$ とする．このとき測度 $P:\mathscr{B}\to\boldsymbol{R}$ はボレル測度 (Borel measure) と呼ばれる．

**7.8 命題** $X$ を任意の可算集合とし，$\mathscr{V}$ を高々すべての可算集合 (countable set) とすべての補集合が可算集合であるような集合 (co-countable set) からなる集合であるとする．このとき，$\mathscr{V}$ は $\sigma$-加法族である．また，$P:\mathscr{V}\to\boldsymbol{R}$ を

$$P(A)=\begin{cases}1 & (A\text{ が補集合が可算集合であるような集合であるとき})\\ 0 & (A\text{ が可算集合であるとき})\end{cases}$$

と定義すると，$P$ は確率測度である．

# 8 弱位相

$(C,\mathscr{O})$ を任意の位相空間とする．また，$\mathscr{P}$ をボレル $\sigma$-加法族上に定義されたすべての確率測度からなる集合とする．ここで，次のような形で書かれる $\mathscr{P}$ のすべての部分集合からなる集合について考えよう．

$$\langle P,f_1,\ldots,f_N,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N\rangle$$

まず $P\in\mathscr{P}$，$N$ は正の整数とする．任意の $n=1,\ldots,N$ について，$f_n$ は $C$ に定義された連続かつ有界な実数値関数とする．また，任意の $n=1,\ldots,N$ について，$\epsilon_n>0$ とする．次に，$\mathscr{P}$ の部分集合 $\langle P,f_1,\ldots,f_N,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N\rangle$ を $n=1,\ldots,N$ について，

$$\left|\int_C f_n(x)dP(x)-\int_C f_n(x)dQ(x)\right|<\epsilon_n$$

を満たすような，すべての $Q\in\mathscr{P}$ からなる集合と定義する．このように定義された集合 $\langle P,f_1,\ldots,f_N,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N\rangle$ の集合について，以下の命題が成立する．

**8.1 命題** $\mathscr{P}$ のすべての部分集合からなる集合 $\langle P,f_1,\ldots,f_N,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N\rangle$ は，条件 1 を満たす．

**証明**

1. 任意の $P, f_1, \ldots, f_N, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$ について明らかに

$$P \in \langle P, f_1, \ldots, f_N, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_N \rangle$$

が成立する．

2. 次のように $A_1$ と $A_2$ を定義する．

$$A_1 = \langle P, f_1, \ldots, f_N, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_N \rangle$$

$$A_2 = \langle Q, g_1, \ldots, g_M, \delta_1, \ldots, \delta_M \rangle$$

次に，$R \in A_1 \cap A_2$ とし，$n = 1, \ldots, N$ について，

$$\hat{\epsilon}_n = \epsilon_n - \left| \int_C f_n(x) dP(x) - \int_C f_n(x) dR(x) \right|$$

と定義する．同様に $m = 1, \ldots, M$ について，

$$\hat{\delta}_m = \delta_m - \left| \int_C g_m(x) dQ(x) - \int_C g_m(x) dR(x) \right|$$

と定義する．このとき，$\hat{\epsilon}_n$ と $\hat{\delta}_m$ は厳密に正であり，明らかに

$$R \in \left\langle R, f_1, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_M, \hat{\epsilon}_1, \ldots, \hat{\epsilon}_N, \hat{\delta}_1, \ldots, \hat{\delta}_M \right\rangle$$

が成立する．

3. 次に，$\left\langle R, f_1, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_M, \hat{\epsilon}_1, \ldots, \hat{\epsilon}_N, \hat{\delta}_1, \ldots, \hat{\delta}_M \right\rangle \subset A_1 \cap A_2$ が成立することを証明する．すなわち，$\left\langle R, f_1, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_M, \hat{\epsilon}_1, \ldots, \hat{\epsilon}_N, \hat{\delta}_1, \ldots, \hat{\delta}_M \right\rangle$ の任意の元 $T$ が $A_1 \cap A_2$ に属することを証明する．もし $T$ が $A_1 \cap A_2$ の元ならば，任意の $n = 1, \ldots, N$ および $m = 1, \ldots, M$ について

$$\left| \int_C f_n(x) dP(x) - \int_C f_n(x) dT(x) \right| < \epsilon_n$$

$$\left| \int_C g_m(x) dQ(x) - \int_C g_m(x) dT(x) \right| < \delta_m$$

が成立するので，以下ではこれを証明することにしよう．

4. $\left| \int_C f_n(x) dP(x) - \int_C f_n(x) dT(x) \right| < \epsilon_n$ が成立することを示す．

$$\begin{aligned}
&\left| \int_C f_n(x) dP(x) - \int_C f_n(x) dT(x) \right| \\
&= \left| \int_C f_n(x) dP(x) - \int_C f_n(x) dR(x) + \int_C f_n(x) dR(x) - \int_C f_n(x) dT(x) \right| \\
&\leq \left| \int_C f_n(x) dP(x) - \int_C f_n(x) dR(x) \right| + \left| \int_C f_n(x) dR(x) - \int_C f_n(x) dT(x) \right|
\end{aligned}$$

ここで $\hat{\epsilon}_n$ の定義より，

$$\left| \int_C f_n(x) dP(x) - \int_C f_n(x) dR(x) \right| = \epsilon_n - \hat{\epsilon}_n$$

が成立する．また，$T \in \left\langle R, f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_M, \hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_N, \hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_M \right\rangle$ なので，

$$\left| \int_C f_n(x) dR(x) - \int_C f_n(x) dT(x) \right| < \hat{\epsilon}_n$$

が成立する．したがって，$\left| \int_C f_n(x) dP(x) - \int_C f_n(x) dT(x) \right| < \epsilon_n$ が成立する．まったく同様にして，$\left| \int_C g_m(x) dQ(x) - \int_C g_m(x) dT(x) \right| < \delta_m$ が成立することも示すことができる．

□

したがって、$\langle P, f_1, \dots, f_N, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \rangle$ が条件 1 を満たすことがわかった．このとき、6.5 命題より、$\langle P, f_1, \dots, f_N, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \rangle$ は，$\langle P, f_1, \dots, f_N, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \rangle$ を含む最弱の位相の基底である．

**8.2 定義 (弱位相)** 確率測度全体の集合上に定めた位相を弱位相 (weak topology) または弱スター位相 (weak $*$ topology) と呼ぶ．

## 9 $C$ が無限集合である場合のくじの定義

これまで述べてきた概念を用いて，帰結の集合が無限集合である場合に，どのように複合くじを定義することができるだろうか．

位相空間 $(C, \mathscr{P})$ を結果の集合とすると，確率測度 $\mathscr{P}$ は単純くじの集合となる．このとき，位相空間 $(\mathscr{P}, \text{weak topology})$ に対して，ボレル $\sigma$-加法族を定めることができる．このようなボレル $\sigma$-加法族上に定義される確率測度が，結果の集合が無限集合である場合の複合くじとなる．

そのように定義された任意の複合くじに対して，単純化くじが定義できるかどうかは自明ではない．しかし，複合くじが与える単純くじが有限個の場合，必ず単純化くじを定義できる．

**9.1 命題** 単純くじの集合を $\mathscr{P}$ とする．$P_1, \dots, P_K \in \mathscr{P}$ を結果とするような複合くじ

$$\begin{pmatrix} P_1 & \cdots & P_K \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_K \end{pmatrix}$$

について，$\displaystyle\sum_{k=1}^{K} \alpha_k P_k : \mathscr{B} \to \boldsymbol{R}$ を

$$\left( \sum_{k=1}^{K} \alpha_k P_k \right)(A) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k P_k(A)$$

と定義すると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{K} \alpha_k P_k \in \mathscr{P}$ が成立する．

## 10 距離空間

帰結の集合 $C$ が単なる位相空間ではなく距離空間であると，分析がわかりやすくなることが多い．以下では，距離空間の一般論を概説する．

**10.1 定義 (距離空間)** $C$ を集合とし，関数 $d : C \times C \to \boldsymbol{R}$ が以下の 3 条件を満たすとする．

(1) 任意の $x \in C$，$y \in C$ について，$d(x,y) \geq 0$．等号が成立するのは $x=y$ のときかつそのときに限る．

(2) 任意の $x \in C$，$y \in C$ について，$d(x,y)=d(y,x)$．

(3) $d$ は三角不等式を満たす．すなわち任意の $x \in C$，$y \in C$，$x \in C$ について

$$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$$

このとき，$d$ を $C$ 上の距離 (metric または distance) といい，$(C,d)$ を距離空間 (metric space) という．

$x \in C$，$\epsilon > 0$ とするとき，

$$B(x;\epsilon)=\{y \in C | d(x,y) < \epsilon\}$$

は，中心 $x$，半径 $\epsilon$ の開球である．このような開球からなる集合 $\{B(x;\epsilon)|x \in C, \epsilon > 0\}$ は，$C$ の部分集合であり，条件 1 を満たす．

**練習問題 5** 上の開球からなる集合 $\{B(x;\epsilon)|x \in C, \epsilon > 0\}$ は，条件 1 を満たすことを示せ．

集合 $\{B(x;\epsilon)|x \in C, \epsilon > 0\}$ が基底であるから，それが生む位相が与えられれば，$C$ は位相空間となる．よって距離空間は位相空間である．しかし，逆は必ずしも成り立たず，いかなる距離関数が生む位相も当初の位相 $\mathscr{O}$ とは一致しないような位相空間が存在する．

**10.2 定義 (距離づけ可能)** $(C,\mathscr{O})$ を位相空間とする．$d$ が $\mathscr{O}$ の基底となるように $d$ を選ぶことができれば，$(C,d)$ は距離づけ可能である (metrizable) という．

**10.3 例** $C=\boldsymbol{R}^L$，$d: C \times C \to \boldsymbol{R}$ とする．このとき $d(x,y)=\parallel x-y \parallel$ は距離の 3 条件を満たす．ここで，$\parallel \cdot \parallel$ は，ユークリッドのノルムを表す．

$\boldsymbol{Q}$ は有理数全体の集合とする．このとき，集合 $\{B(x;\epsilon)|x \in \boldsymbol{Q}^L, \epsilon \in \boldsymbol{Q}_{++}\}$ は条件 1 を満たす．この集合は先ほどの集合 $\{B(x;\epsilon)|x \in C, \epsilon > 0\}$ よりも小さい．しかし 2 つの集合が定める位相は同じである．

基底 $\{B(x;\epsilon)|x \in \boldsymbol{Q}^L, \epsilon \in \boldsymbol{Q}_{++}\}$ は可算集合である．このとき，位相空間 $(\boldsymbol{R}^L,\mathscr{O})$ は可算基底 (countable base) を持つという．

**10.4 事実** 位相空間 $(C,\mathscr{O})$ が距離づけ可能であり，かつ可算基底を持つとする．このとき $(\mathscr{P}, weak * topology)$ は，距離づけ可能な位相空間であり，したがって距離空間である．このことより，もし $C$ が可分 (separable) な距離空間ならば，$\mathscr{P}$ も距離空間であることがわかる．

**10.5 定義** 距離空間 $(C,d)$ における点列 $(x_n)$ と $x \in C$ について，$n \to \infty$ としたときに $d(x_n,x) \to 0$ となるならば，$(x_n)$ が $x$ に収束するという．

これは，距離 $d$ を用いた収束概念であるが，次の収束概念は，より広く位相空間一般に用いることができるものである．

**10.6 定義** $(C,\mathscr{O})$ が $d$ から定められたとする．このとき点列 $(x_n)$ が点 $x$ に収束するとは，$x$ を含む任意の開集合 $A \in \mathscr{O}$ について，任意の $n \geq N$ に対して $x_n \in A$ となるような自然数 $N$ が存在することである．

この収束概念は，$d$ から $\mathscr{O}$ を定めてはいるが，その後の条件に $d$ が出てこない．こちらの収束概念は位相空間一般に使うことができる条件である．

# 11　$\mathscr{P}$ における点列の収束

この節では，$\mathscr{P}$ が距離づけ可能であると仮定して (このためには事実 10.4 で見たように $C$ が可分な距離空間であると仮定すれば十分)，弱位相に関する確率測度の点列の収束を特徴づけるとする．

**11.1 命題** $(P_n)$ を $\mathscr{P}$ の点列，$P \in \mathscr{P}$ とする．このとき，$(P_n)$ が $P$ に弱位相に関して収束することと，任意の有界連続関数 $f : C \to \boldsymbol{R}$ に対し，$n \to \infty$ のとき

$$\int_C f(x)dP_n(x) \to \int_C f(x)dP(x)$$

が成立することは同値である．

**練習問題 6** この命題を証明せよ．

**11.2 例** $C = [0,1]$ とし，ユークリッド位相が与えられているとする．$\mathscr{P}$ の点列 $(P_n)$ は，任意の $n$ について，

$$P_n\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = P_n\left(\left\{\frac{2}{n}\right\}\right) = \cdots = P_n\left(\left\{\frac{n}{n}\right\}\right) = \frac{1}{n}$$

と定義されている．つまり，$P_n$ は，閉区間 $[0,1]$ を $n$ 等分する点のそれぞれに確率測度 $\dfrac{1}{n}$ を与え，それ以外には確率測度 0 を与えている．つまり $C$ のボレル $\sigma$-加法族を $\mathscr{B}$ とすると，任意の $A \in \mathscr{B}$ について，$A \cap \left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n}\right\} = \phi$ ならば $P_n(A) = 0$ が成立するとする．また $P$ をルベーグ測度，つまり $P((a,b)) = b - a$ とする．このとき，$n \to \infty$ とすると，$P_n$ は $P$ に弱収束することを以下で証明しよう．

$f : C \to \boldsymbol{R}$ を任意の有界連続関数とする．$f$ はリーマン積分可能であり，

$$\int_{[0,1]} f(x)dP(x) = \int_0^1 f(x)dx \tag{1}$$

が成立する．上の式の左辺はルベーグ積分，右辺はリーマン積分を表す．

また，任意の $n$ と $k = 1, \ldots, n$ に対して，$f\left(\left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]\right)$ は最大値と最小値を持つ．この最大値，最小値をそれぞれ以下のように定義する．

$$\overline{c}_{k,n} = \max f\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right)$$

$$\underline{c}_{k,n} = \min f\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right)$$

このとき，$f$ のリーマン積分可能性より，$n \to \infty$ とすると，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\overline{c}_{k,n} &\to \int_0^1 f(x)dx \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\underline{c}_{k,n} &\to \int_0^1 f(x)dx \end{aligned} \tag{2}$$

が成立する．ここで $P_n$ の定義により，

$$\int_{[0,1]} f(x)dP_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3}$$

が成立する．$\overline{c}_{k,n}$ と $\underline{c}_{k,n}$ の定義より，$\underline{c}_{k,n} \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \overline{c}_{k,n}$ が成立する．したがって，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\underline{c}_{k,n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\overline{c}_{k,n}$$

が成立する．(2) より，右辺と左辺はともに $\int_0^1 f(x)dx$ に収束するから，$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ も $\int_0^1 f(x)dx$ に収束する．したがって，(1) と (3) より，

$$\int_{[0,1]} f(x)dP_n(x) \to \int_{[0,1]} f(x)dP(x).$$

$F_n$，$F$ をそれぞれ $P_n$，$P$ の累積分布関数 (cumulative distribution function) とする．つまり，$F_n(x) = P_n((-\infty, x])$，$F(x) = P((-\infty, x])$ が任意の $c \in \boldsymbol{R}$ に対して成立するとする．このとき，

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{k-1}{n} & \left(\dfrac{k-1}{n} \leq x < \dfrac{k}{n} \text{のとき}\right) \\ 1 & (1 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ x & (0 \leq x < 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (1 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

任意の $n$ に対して $k$ を $\frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k}{n}$ を満たすように選ぶことができる．と，$x - \frac{1}{n} < \frac{k-1}{n} \leq x$ が成立する．ここで，$n \to \infty$ とすると，$x - \frac{1}{n} \to x$ だから，$\frac{k-1}{n} \to x$ となる．つまり，$n \to \infty$ とすると，$F_n(x) \to x$ である．よって，任意の $x \in \boldsymbol{R}$ について，$n \to \infty$ とすると，$F_n(x) \to F(x)$ となることが確かめられる．

集合 $A$ を $A = \left\{\frac{k}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots, n\right\}$ とすると，$A$ は $(0, 1]$ 上の有理数全体の集合であり，可算集合である．したがって $P(A) = 0$ である．ところが，任意の $n$ に対して $P_n(A) = 1$ が成立しているから，$P_n(A)$ は $P(A)$ に収束しない．

上の例の集合 $A$ は，点の集まりであって区間ではない．一般に，区間ではない集合上に定義された確率測度に属する点列は収束しない．しかし，区間に与えられた確率測度に属する点列であっても収束しないことがある．以下ではそのような例を紹介する．

**11.3 例** $C = \boldsymbol{R}$ として，$P_n$ と $P$ を以下のように定義する．

$$P_n(A) = \begin{cases} 1 & \left(\dfrac{1}{n} \in A \text{ のとき}\right) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$P(A) = \begin{cases} 1 & (0 \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$n \to \infty$ のとき $P_n(A) \to P(A)$ が成立するが，このことを確かめるために，関数 $f : C \to \boldsymbol{R}$ を，有界かつ連続な関数とすると，

$$\int_C f(x)dP_n(x) = f\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\int_C f(x)dP(x) = f(0)$$

が成立する．$f$ の連続性より，$n \to \infty$ のとき $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \to f(0)$ なので

$$\int_C f(x)dP_n(x) \to \int_C f(x)dP(x) \quad (n \to \infty).$$

$F_n$，$F$ をそれぞれ $P_n$，$P$ の累積分布関数とすると，$x = 0$ のとき，$F_n(0) = 0$ かつ $F(0) = 1$ であるから，$F_n(0)$ は $F(0)$ に収束しない．つまり累積分布関数の値が収束しないこともある．また，$F_n(x) = P_n((-\infty, x])$，$F(x) = P((-\infty, x])$ なので，閉集合に与えられた確率測度であっても収束しないこともある．

ここで $A$ の補集合上に与えられた確率測度について考えると，$P_n((0,\infty)) = 1$，$P((0,\infty)) = 0$ となりやはり収束しない．つまり開集合に与えられた確率測度であっても収束しないことがある．

この例では $x = 0$ では収束をしないが，任意の $x \neq 0$ では，$n \to \infty$ のとき $F_n(x) \to F(x)$ である．$F$ は $x \neq 0$ において連続なので，換言すれば，$F$ が連続であるような．任意の $x$ においては，$F_n(x)$ は $F(x)$ に収束する．

より一般に以下の命題が成立する．

**11.4 命題** $C$ を距離空間とする．このとき $P_n$ が $P$ に弱収束することは，次の (1)，(2)，(3) とそれぞれ同値である．

(1) $A$ を $C$ の任意の閉部分集合とすると，$\limsup_n P_n(A) \leq P(A)$.

(2) $A$ を $C$ の任意の開部分集合とすると，$\liminf_n P_n(A) \geq P(A)$.

(3) $C = \boldsymbol{R}$ のとき，もし $F$ が $x$ において連続ならば，$F_n(x) \to F(x)$.

ここでは，(1)⇒(2) のみを証明しよう．$A$ を $C$ の任意の開部分集合とすると，$C \setminus A$ は，$C$ の閉部分集合である．(1) より，

$$\limsup_n P_n(C \setminus A) \leq P(C \setminus A)$$

が成立する．確率測度の定義より $P_n(C \setminus A) = 1 - P_n(A)$，$P(C \setminus A) = 1 - P(A)$ だから，

$$\limsup_n (1 - P_n(A)) \leq 1 - P(A)$$

したがって，

$$1 - \liminf_n P_n(A) \leq 1 - P(A)$$
$$\liminf_n P_n(A) \geq P(A)$$

よって (1) が成立するとき (2) が成立する．

弱収束は，確率測度の収束概念として一般的であるが，弱すぎるために不備があることが多い．そこで次のような台という概念を用いて，弱収束の不備を補うことがある．

**11.5 定義 (台（support））** $P$ を位相空間 $(C, \mathscr{O})$ 上のボレル確率測度とする．$P(A) = 1$ となるような $C$ のすべての閉部分集合 $A$ の共通部分を $P$ の台と呼ぶ．$P$ の台のことを $\mathrm{supp}\ P$ と書く．

$\mathrm{supp}\ P$ は，常に存在し，一意に定まる．またそれ自体，$C$ の閉部分集合である．もし $(C, \mathscr{O})$ が可算基底を持つならば，$P$（$\mathrm{supp}\ P$）=1 が必ず成立する．このとき，$\mathrm{supp}\ P$ は，$P(A) = 1$ を成立させる閉集合 $A$ のうち最小のものである．しかし $(C, \mathscr{O})$ が可算基底を持たないと $P$（$\mathrm{supp}\ P$）$< 1$ となることもあり，この場合，$P(A) = 1$ を成立させる閉集合 $A$ のうち最小のものは存在しない．このような測度の例は，C.D. Aliprantis and K.C. Border, "Infinite Dimensional Analysis," 3rd ed. (Springer 2006) の例 12.5 に挙げられている．

# 12　ハウスドルフ位相と閉収束位相

## 12.1　ハウスドルフ位相

位相空間を $(C, \mathscr{O})$ とし，$\mathscr{K}$ を $C$ に含まれるすべての非空のコンパクト集合からなる集合とする．ここで次のように定義される $\mathscr{K}$ の部分集合 $\langle G_0, G_1, \ldots, G_N \rangle$ ついて考えていく．

$$\langle G_0, G_1, \ldots, G_N \rangle = \{A \in \mathscr{K} \mid A \subset G_0, A \cap G_1 \neq \phi, \ldots, A \cap G_N \neq \phi\}$$

ここで，$N = 0, 1, 2, \ldots$ は，非負の整数であり，任意の $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ について，$G_n \in \mathscr{O}$ とする．

**12.1 注意** $N = 0$ のとき，$\langle G_0 \rangle = \{A \in \mathscr{K} \mid A \subset G_0\}$ である．

**12.2 注意** $G_0 = \phi$ でも構わない．

**12.3 注意** $\phi \in \mathscr{O}$ なので，$N = 0$ かつ $G_0 = \phi$ とすると，$\langle G_0 \rangle = \{\phi\}$ となる．このように，$\mathscr{K}$ には $\phi$ は含まれないが，上記の方法で $\{\phi\}$ を書くことができる．

**練習問題 7** 上のように定義されるすべての $\langle G_0, G_1, \ldots, G_N \rangle$ の集合は，条件 1 を満たすことを証明せよ．

以下に述べる理由により，$\langle G_0, G_1, \ldots, G_N \rangle$ の集合を基底とする位相をハウスドルフ位相もしくはハウスドルフ距離の位相 (Hausdorff metric topology) という．

**12.4 例** $C = \boldsymbol{R}$ とし，$N = 1$，$G_0 = (0, 1)$，$G_1 = (2, 3)$ とする．このとき，$A \subset (0, 1)$ と $A \cap (2, 3)$ を同時に満たす $A$ は存在しない．したがって，$\langle G_0, G_1 \rangle = \phi$ である．

**12.5 例** $C = \boldsymbol{R}$ とし，$N = 1$，$G_0 = (0, 1)$，$G_1 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ とする．このとき，$A = \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$ は $\langle G_0, G_1 \rangle$ に含まれるが，$A = \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$ や $A = \left[\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right]$ は $\langle G_0, G_1 \rangle$ に含まれない．

**12.6 定義 (孤立点 (isolated point))** 位相空間を $(C, \mathscr{O})$ とする．このとき $\{x\} \in \mathscr{O}$ ならば，$x \in C$ を孤立点 (isolated point) と呼ぶ．

$x$ が孤立点であるとは，$x$ のみより成る $x$ の近傍が存在することを意味する．

**12.7 注意** 整数全体の集合をユークリッドのノルムを使って位相づけると，すべての点は孤立点である．一方，実数直線や有理数全体の集合および無理数全体の集合は孤立点を持たない．

$\mathscr{K}$ の定義の中に $\phi$ を付け加えたとしても，12.3 の注意により $\phi$ は孤立点なので，議論に大差はない．

$C$ が距離空間であるとき，ハウスドルフ位相は以下の方法で距離づけられる．まず，$d$ を $C$ 上の距離とし，関数 $\rho : \mathscr{K} \times \mathscr{K} \to \boldsymbol{R}$ を

$$\rho(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid \forall y \in B, \exists x \in A; d(x, y) < \epsilon\}$$

と定義する．ここで，$B \subset A$ のとき，$\rho(A, B) = 0$ であるが，$\rho(B, A) \neq 0$ であることから，$\rho(A, B) \neq \rho(B, A)$ であることがわかる．しかし，$\rho$ を用いて，関数 $\delta : \mathscr{K} \times \mathscr{K} \to \boldsymbol{R}$ を

$$\delta(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$$

と定義すると，$\delta(A, B) = \delta(B, A)$ が成立する．さらに $\delta$ は距離の 3 条件 (定義 11.1) を満たす．この $\delta$ はハウスドルフ距離（Hausdorff distance または Hausdorff metric) と呼ばれる．

**12.8 命題** $C$ が距離空間ならば，$\mathscr{K}$ 上のハウスドルフ位相は $\delta$ によって距離づけられる．

## 12.2　閉収束位相

$C$ がコンパクト集合でない場合は，多くの文献で，以下のような閉収束位相が使われることがある．

**12.9 定義 (閉収束位相)** 位相空間を $(C, \mathscr{O})$ とし，$\mathscr{K}$ を $C$ に含まれるすべての非空のコンパクト集合からなる集合とする．ここで，$\mathscr{K}$ の部分集合 $\langle G_0, G_1, \ldots, G_N \rangle$ を次のように定義する．

$$\langle G_0, G_1, \ldots, G_N \rangle = \{A \in \mathscr{K} \mid A \subset G_0, A \cap G_1 \neq \phi, \ldots, A \cap G_N \neq \phi\}$$

ここで $G_1, \ldots, G_N \in \mathscr{O}$ であり，かつ $C \setminus G_0$ はコンパクト集合であるとする．このとき，$\langle G_0, G_1, \ldots, G_N \rangle$ の集合を基底とする位相を閉収束位相 (closed convergence topology) と呼ぶ．

**12.10 例** $C = \boldsymbol{R}$，$G_0 = (0, 1)$ とする．このとき，$C \setminus G_0 = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ は，コンパクト集合ではない．したがって，この場合は，$\langle G_0, G_1, \ldots, G_N \rangle$ は閉収束位相の基底に属さない．

**12.11 例** $C = \boldsymbol{R}$，$G_0 = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ とする．このとき，$C \setminus G_0 = [0, 1]$ は，コンパクト集合である．したがって，この場合は，$\langle G_0, G_1, \ldots, G_N \rangle$ は閉収束位相の基底に属する．

閉収束位相の基底は，一般には数少ない元より成る．よって，一般には閉収束位相のほうが弱い位相である．ただし $C$ がコンパクト集合ならば，両者は一致する．これは，$C$ がコンパクト集合で $G_0$ が開部分集合ならば，$C \setminus G_0$ は必ずコンパクト集合であるからである．

**12.12 事実** $C$ が距離づけ可能で，かつ $C$ が可算個の基底を持つとする．このとき $\mathscr{K} \cup \{\phi\}$ は，閉収束位相に対してコンパクト集合である．

## 12.3　点列の収束

**練習問題 8** $C = \boldsymbol{R}$ とする．このとき整数 $n$ よりなる一点集合 $\{n\}$ の $\mathscr{K}$ における点列は，ハウスドルフ位相に関して収束するだろうか？

仮に，$\{n\}$ が $A$ に収束するとする．このとき，ある $N$ が存在して，任意の $n > N$ について $\delta(A, \{n\}) < 1$ が成立すると，$A \cup (N, N+2) \neq \phi$，$A \cup (N+1, N+3) \neq \phi$，$A \cup (N+2, N+4) \neq \phi$，$\cdots$ となる．よって $A$ は有界集合ではなく，コンパクト集合ではない．したがって，点列 $(\{n\})_n$ はどこにも収束しない．

**練習問題 9** $C = \boldsymbol{R}$ とする．このとき，整数 $n$ よりなる一点集合 $\{n\}$ の点列は閉収束位相に関して収束するだろうか？ 実は，閉収束位相の場合は，$\{n\}$ は $\{\phi\}$ に収束する．これを証明する場合，$\{\phi\}$ を含む任意の $\langle G_0, G_1, \ldots, G_M \rangle$ と任意の $n > N$ について，$\{n\} \in \langle G_0, G_1, \ldots, G_M \rangle$ となるような $N$ が存在することを示せば十分である．

まず，$\langle G_0, G_1, \ldots, G_M \rangle$ が $\{\phi\}$ を含むとする．このとき，$M = 0$ でなければならず，なおかつ $\langle G_0 \rangle = \{A \in \mathscr{K} \cup \{\phi\} \mid A \subset G_0\}$ が成立する．ここで，$C \setminus G_0$ はコンパクト集合なので，$C \setminus G_0 \subset [a, b]$ となるような $a, b$ が存在する．したがって，$G_0 \supset (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ である．そこで，$N > b$ ととれば，任意の $n > N$ について $n > b$ なので，$\{n\} \subset (b, \infty)$．ここで $(b, \infty) \subset G_0$ なので，$\{n\} \in \langle G_0 \rangle$．したがって，閉収束位相の場合は，$\{n\}$ は $\{\phi\}$ に収束する．

## 12.4　確率測度の台の収束

**12.13 例**　結果の集合 $C$ を $\boldsymbol{R}$ とする．これは $C = [-1, 1]$ であっても，以下の議論に違いはない．確率測度の集合 $\mathscr{P}$ に属する点列 $(P_n)$ と $\mathscr{P}$ に属するある確率測度 $P$ を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&P_n(\{1\}) = \frac{1}{n}\\
&P_n(\{-1\}) = \frac{1}{n}\\
&P_n(\{0\}) = 1 - \frac{2}{n}\\
&P(\{0\}) = 1
\end{aligned}
$$

このとき，$P_n$ は $P$ に弱収束する．ここで，$P_n$ と $P$ の台をそれぞれ求めると，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{supp} P_n = \{-1, 0, 1\}\\
&\operatorname{supp} P = \{0\}
\end{aligned}
$$

であり，明らかに，$\mathrm{supp}P_n$ は $\mathrm{supp}P$ に収束しない．つまり、弱位相に関して $P_n$ が $P$ に収束するからといって，それらの台が閉収束位相に関して収束するとは限らない．

**12.14 例**　$C = \boldsymbol{R}$ とする．また，$n \geq 2$ について，確率測度の集合 $\mathscr{P}$ に属する点列 $(P_n)$ と $\mathscr{P}$ に属するある確率測度 $P$ を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&P_n(\{1\}) = \frac{1}{2n}\\
&P_n(\{-1\}) = \frac{1}{2}\\
&P_n(\{0\}) = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + 1\right)\\
&P(\{-1\}) = \frac{1}{2}\\
&P(\{0\}) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

このとき，$P_n$ は $P$ に弱位相に関して収束する．ここで，$P_n$ と $P$ の台をそれぞれ求めると，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{supp} P_n = \{-1, 0, n\}\\
&\operatorname{supp} P = \{-1, 0\}
\end{aligned}
$$

である。ハウスドルフ位相に関しては、$\mathrm{supp}P_n$ は $\mathrm{supp}P$ に収束しないが，閉収束位相に関しては収束する．このことは，閉収束位相に関して一点集合 $\{n\}$ が $\{\phi\}$ に収束することを使って確かめることができる．

## 12.5　確率測度が与える $C$ の期待値の収束

次に，$(P_n)$ と $P$ が与える $C$ の期待値がハウスドルフ位相や閉収束位相に関して収束するかどうかについて見ていこう．$(P_n)$ と $P$ が与える $C$ の期待値は，それぞれ $\int_{\boldsymbol{R}} x dP_n(x)$，$\int_{\boldsymbol{R}} x dP(x)$ で求められる．もし，確率変数 $X$ が確率 $\frac{1}{2n}$，$\frac{1}{2}$，$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + 1\right)$ で，それぞれ $n$，$-1$，$0$ という値をとるとする．このとき，$\int_{\boldsymbol{R}} x dP_n(x)$ は，$X$ の期待値 $E(X)$ に他ならない．したがって

$$
\int_{\boldsymbol{R}} x dP_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot (-1) + \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + 1\right)\right\} \cdot 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0
$$

となる．同様に考えると，

$$\int_{\boldsymbol{R}} xdP(x) = \frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 0 = -\frac{1}{2}$$

となる．したがって，明らかに $\int_{\boldsymbol{R}} xdP_n(x)$ は $\int_{\boldsymbol{R}} xdP(x)$ に収束しない．つまり $(P_n)$ が $P$ に弱位相に関して収束するとしても，$(P_n)$ が与える期待値が $P$ が与える期待値に収束するとは限らない．

このことをさらに説明するために，関数 $\eta : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を恒等関数とする．恒等関数とは，$\eta(x) = x$ となるような関数である．この恒等関数を使うと，

$$\int_{\boldsymbol{R}} xdP(x) = \int_{\boldsymbol{R}} \eta(x)dP(x)$$

が明らかに成立する．ここで，弱収束の定義を思い出すと，$P_n(x)$ が $P(x)$ に弱収束するとは，任意の連続かつ有界な関数 $f$ について

$$\int_{\boldsymbol{R}} fdP_n(x) \to \int_{\boldsymbol{R}} fdP(x)$$

が成立することであった．しかし，恒等関数 $\eta$ は連続であるが有界ではない．

しかし，もし $C = \boldsymbol{R}$ であり，$\operatorname{supp} P_n$ と $\operatorname{supp} P$ がともにコンパクトであり，さらにハウスドルフ位相に関して $\operatorname{supp} P_n$ が $\operatorname{supp} P$ に収束するならば，

$$\int_{\boldsymbol{R}} xdP(x) = \int_{\boldsymbol{R}} xdP(x)$$

が成立して，期待値の収束が保証される．なぜなら，任意の $n$ について $\operatorname{supp} P_n \subset B$ かつ $\operatorname{supp} P \subset B$ となるようなコンパクト集合 $B$ が存在するならば，恒等関数が有界となるからである．

より一般には，$C$ が線形距離空間であるとき，$C$ のあるコンパクトな部分集合 $B$ が存在して，$\operatorname{supp} P_n \subset B$，$\operatorname{supp} P \subset B$，$\operatorname{supp} P_n \to \operatorname{supp} P$ が成立するならば，

$$\int_{\boldsymbol{R}} xdP(x) = \int_{\boldsymbol{R}} xdP(x)$$

が成立する．

以下では，$P_n$ が $P$ に弱位相に関して収束し，$\operatorname{supp} P_n$ と $\operatorname{supp} P$ がともにコンパクトであり，さらにハウスドルフ位相について $\operatorname{supp} P_n \to \operatorname{supp} P$ が成立するような状況に限定して，議論を進めることにする．

# 13　期待効用の定義可能性と効用関数の積分可能性

効用は賞金 (money，購買力) に対する満足度を表すとし、賞金の集合 $C$ は，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}_+$，$\boldsymbol{R}_{++}$ のうちのいずれかであるとする．また、ボレル確率測度を $\mathscr{P}$，効用関数を $u : C \to \boldsymbol{R}$ とすると，くじ $P \in \mathscr{P}$ から得られる期待効用は，$\int_C u(x)dP(x)$ と書くことができる．

## 13.1　相対的リスク回避度一定の効用関数

**13.1 例** $C = \boldsymbol{R}_{++}$，$u(x) = \log x$ とする．$u(x)$ は $x = 0$ では定義されないことに注意しよう．ここで，$n \geq 1$ について，

(1) $P(\{e^{2^n}\}) = \dfrac{1}{2^n}$

(2) $P(\{e^{-2^n}\}) = \dfrac{1}{2^n}$

とする．このとき，(1)，(2) の期待値をそれぞれ求めると，次のようになる．

(1) $\displaystyle\int_C u(x)dP(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cdot\log(\{e^{2^n}\})\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cdot 2^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$

(2) $\displaystyle\int_C u(x)dP(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cdot\log(\{e^{-2^n}\})\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cdot(-2^n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1) = -\infty$

効用関数が $u(x) = \log x$ のときは，効用水準は $-\infty$ にも $\infty$ にも発散し，分析上，不都合が生じることがある．$u(x) = \log x$ は相対的リスク回避度一定 (constant relative risk aversion) の効用関数であり，相対的リスク回避度は 1 である．

**13.2 例** $C = \boldsymbol{R}_{++}$ とし，$0 < \gamma < 1$ について $u(x) = x^{1-\gamma}$ とする．このとき $u(x) = x^{1-\gamma}$ は相対的リスク回避度一定の効用関数であり，相対的リスク回避度は $\gamma$ である．

$u(x)$ は $x = 0$ でも定義されるため，$C = \boldsymbol{R}_{+}$ に拡張することが可能である．$u(0) = 0$ であるから，log 効用関数のように，$-\infty$ に発散することはなく，期待値についても $0 \leq \displaystyle\int_C u(x)dP(x)$ が成立し，$-\infty$ に発散することはない．しかし $\displaystyle\int_C u(x)dP(x) = \infty$ になる可能性はある．

**13.3 例** $C = \boldsymbol{R}_{++}$ とし，$1 < \gamma$ について $u(x) = -\dfrac{1}{x^{\gamma-1}} = -x^{1-\gamma}$ とする．この例でも，$u(x)$ は $x = 0$ では定義されないことに注意しよう．$u(x) = -\dfrac{1}{x^{\gamma-1}}$ は相対的リスク回避度一定の効用関数であり，相対的リスク回避度は $\gamma$ である．

$u(0)$ が 0 を越えることはなく，$\displaystyle\int_C u(x)dP(x) \leq 0$ が成立し，$\infty$ に発散することはない．しかし $\displaystyle\int_C u(x)dP(x) = -\infty$ になる可能性はある．

上の 3 つの例を統合すると，$u(x) = \dfrac{x^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ となる．このことを確認しよう．まず，$u(x) = \dfrac{x^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ は $u(x) = x^{1-\gamma}$ のアフィン変換であり，同等の効用関数を表す．また $u(x) = \dfrac{x^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ は $u(x) = -x^{1-\gamma}$ のアフィン変換でもあるが，$u(x) = -x^{1-\gamma}$ の符号は，$\dfrac{x^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ の分母で対応している．最後に，$\dfrac{x^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ はロピタルの定理を使うと，$\gamma \to 1$ とすると，$\log x$ に収束する．

## 13.2　効用関数の正部分・負部分と積分可能性

帰結の集合を $C = \{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}_{+}, \boldsymbol{R}_{++}\}$，効用関数を $u : C \to \boldsymbol{R}$，くじを $P \in \mathscr{P}$ とすると期待効用は $\displaystyle\int_C u(x)dP(x)$ と書ける．分析のためには，$-\infty < \displaystyle\int_C u(x)dP(x) < \infty$ が満たされること，つまり $u$ が $P$ について積分可能であることが望ましい．しかし実際には，$\displaystyle\int_C u(x)dP(x)$ が $-\infty$ や $\infty$ の値をとることがある．一般には $\displaystyle\int_C u(x)dP(x) = \infty$ は排除しやすいものの，$\displaystyle\int_C u(x)dP(x) = -\infty$ を排除することは難しい．

ここで，効用関数を $u : C \to \boldsymbol{R}_{+}$ とし，任意の $x \in C$ について，関数 $u^{+} : C \to \boldsymbol{R}$ と $u^{-} : C \to \boldsymbol{R}$ を，

$$u^{+} = \max\{u(x), 0\}$$
$$u^{-} = \max\{-u(x), 0\} = \min\{u(x), 0\}$$

と定義する．このとき，任意の $x \in C$ について

$$u(x) = u^{+} - u^{-}$$

と表すことができる．$u^{+}$ は $u$ の正部分 (positive part)，$u^{-}$ は $u$ の負部分 (negative part) と呼ばれる．

$u$ が $P$ について積分可能であることは，$u^+$ が $P$ について積分可能かつ $u^-$ が $P$ について積分可能であることと同値である．このことはまた，次の 2 つの条件

$$-\infty < \int_C u^+ dP(x) < \infty$$

$$-\infty < \int_C u^- dP(x) < \infty$$

が同時に成立することと同値である．$u^+$ と $u^-$ の定義により，これら条件は

$$0 \leq \int_C u^+ dP(x) < \infty$$

$$0 \leq \int_C u^- dP(x) < \infty$$

と書きかえることができる．実は，$0 \leq \int_C u^+ dP(x) < \infty$ よりも $0 \leq \int_C u^- dP(x) < \infty$ を保証することのほうが難しい．

**13.4 命題** (**$u^+$ の積分可能性**) 効用関数 $u$ が非減少関数であり，かつ凹関数であるとする．またくじ $P$ は，有限の期待値を持つとする．すなわち，賞金を $z$ とすると $-\infty < \int_C z dP(x) < \infty$ が成立するとする．このとき，$u^+$ は $P$ について積分可能である．

**証明** $u$ が凹関数なので，あるアフィン関数 $v : C \to \boldsymbol{R}$ が存在して，任意の $x \in C$ について，$u(x) \leq v(x)$ が成立する．よって任意の任意の $x \in C$ について，$u^+(x) \leq v^+(x)$ が成立する．$v$ はアフィン関数なので，$v(x) = \alpha x + \beta$ と書ける．ここで $u$ は非減少関数なので $\alpha \geq 0$ としてもよい．もし $\alpha = 0$ ならば，$v^+$ は一定である．このとき $u^+$ は有界であり，積分可能である．

次に，$\alpha \geq 0$ であるとする．このとき，

$$v^+ = \begin{cases} \alpha x + \beta & (x \geq -\dfrac{\beta}{\alpha} \text{のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

である．恒等関数 $id$ は区間 $\left[-\dfrac{\beta}{\alpha}, \infty\right)$ 上で積分可能なので $\alpha x + \beta$ も積分可能である．したがって，$v^+$ も $u^+$ も積分可能である． □

**13.5 命題** (**$u^-$ の積分可能性**) 効用関数 $u$ が非減少関数であるとする．このとき $\inf C < \inf \operatorname{supp} P$ ならば，$u^-$ は $P$ について積分可能である．

$C \in \{\boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}_{++}\}$ のとき，$\inf C = 0$，$\inf \operatorname{supp} P = \min \operatorname{supp} P$ である．このとき $0 < \inf \operatorname{supp} P$ が成立するので，$u^-$ は $P$ について積分可能である．

**13.6 例** $P\left(\left\{e^{-2^n}\right\}\right) = \dfrac{1}{2^n}$ とすると $\operatorname{supp} = \left\{0, e^{-2}, e^{-4}, e^{-8}, \cdots\right\}$ であり，$\inf \operatorname{supp} P = 0$ である．したがって $0 = \inf \operatorname{supp} P$ が成立するので，$u^-$ は $P$ について積分可能ではない．

$C \in \{\boldsymbol{R}\}$ のとき，$\inf C = -\infty$，$-\infty < \inf \operatorname{supp} P$ である．このとき $\inf C < \inf \operatorname{supp} P$ が成立するので，$u^-$ は $P$ について積分可能である．このことは次のように証明することができる．$x^* \in (\inf C, \operatorname{supp} P)$ とすると，$u$ は非減少関数だから，任意の $x \in \operatorname{supp} P$ について $u(x) \geq u(x^*)$ が成立する．よって，任意の $x \in \operatorname{supp} P$ について $0 \leq u^-(x) \leq u^-(x^*)$ が成立する．したがって $u^-$ は $\operatorname{supp} P$ 上で積分可能である．ところで，$\operatorname{supp} P$ の外側はどこをとっても確率 0 であり，積分可能である．したがって $u^-$ は $C$ 上で積分可能であると言える．

**13.7 例** $C = \boldsymbol{R}_+$ であり，$P$ は $[0,1]$ 上の一様分布に従うとする．このとき，$\inf C = 0$，$\inf \operatorname{supp} P = 0$ であり，$\inf C < \inf \operatorname{supp} P$ が満たされないので，$u^-$ は $P$ について積分可能ではない．

**13.8 例** $C = \boldsymbol{R}_{++}$ であり，$P$ は log 正規分布に従うとする．このとき，$\inf C = 0$，$\inf \operatorname{supp} P = 0$ であり，$\inf C < \inf \operatorname{supp} P$ が満たされないので，$u^-$ は $P$ について積分可能ではない．log 正規分布に従う $P$ について $u$ の積分可能性が保証されないことは，とても不都合である．

## 13.3 限界効用の積分可能性

これまでは，期待効用が定義できるかどうか，つまり効用関数 $u$ の積分可能性について話をしてきたが，これからは限界効用 $u'$ の積分可能性について話をしていくことにする．実際に，$u$ が積分可能であっても，$u'$ が積分可能であるとは限らない．

**13.9 例** $C = \boldsymbol{R}_{++}$，$u(x) = \sqrt{x}$ とする．このとき $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ である．また，$n = 1, 2, \ldots$ について $P\left(\left\{\dfrac{1}{4^n}\right\}\right) = \dfrac{1}{2^n}$ とすると，$\operatorname{supp} P = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right\}$ より，$\inf C < \inf \operatorname{supp} P$ は満たされない．

$\operatorname{supp} P$ 上では $0 \leq u(x) \leq 1$ であり，$0 \leq \displaystyle\int u(x) dP(x) \leq 1$ が成立する．したがって $u$ は $\operatorname{supp} P$ 上で積分可能である．ところが $u'(x)$ については，$0 \leq \displaystyle\int u'(x) dP(x) \leq \infty$ であるから、有限であるとは限らない．なぜなら $\operatorname{supp} P$ 上では，

$$\begin{aligned}\int u'(x) dP(x) &= \sum_n \frac{1}{2^n} u'\left(\frac{1}{4^n}\right) = \sum_n \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^n}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_n \frac{1}{2^{n+1}} \left(2^{-2n}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_n \frac{2^n}{2^{n+1}} = \sum_n \frac{1}{2} \\ &= \infty\end{aligned}$$

が成立するからである．

$u$ が積分可能であることは，$u'$ が積分可能であるための必要条件ではあるが十分条件ではない．しかし，分析をする上では，$u'$ も積分可能であることが望ましい．

**13.10 命題** $\mathscr{P}$ をボレル確率測度とし，$\mathscr{P}^* \subset \mathscr{P}$ は，$\operatorname{supp} P$ がコンパクトかつ $\operatorname{supp} P \subset C$ であるような $P$ から成るボレル確率測度とする．このとき $C = \boldsymbol{R}_{++}$，$P \in \mathscr{P}^*$ で，$u$ が連続微分可能であるならば，

$$-\infty < \int u dP < \infty$$

$$-\infty < \int u' dP < \infty$$

がともに成立する．

# 14 リスク回避度の比較

## 14.1 確実同値額とリスク回避度の比較

**14.1 命題 (確実同値額 (certainty equivalent))** $C \in \{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}_{++}\}$ とする．連続で厳密に増加関数であるようなすべての $u$ からなる集合を $u^\circ$，また，コンパクトな台を持つすべてのボレル確率測度からなる

集合を $\mathscr{P}^*$ とする．このとき，任意の $u \in u^\circ$ と任意の $P \in \mathscr{P}$ について，

$$u(x) = \inf_C u(z)dP(z)$$

を満たすような $x \in C$ がただ 1 つだけ存在する．このとき $x$ は，$P$ の $u$ に対する確実同値額と呼ばれる．

**証明**

$$\bar{c} = \max \operatorname{supp} P \in C$$

$$\underline{c} = \min \operatorname{supp} P \in C$$

とする．このとき，

$$u(\underline{c}) \leq \int_C u(z)dP(z) \leq u(\bar{c})$$

が成立する．$u$ が連続だから，中間値の定理より $u(x) = \displaystyle\int_C u(z)dP(z)$ を満たすような $x \in [\underline{c}, \bar{c}]$ が存在する．また $u$ は厳密な増加関数であるから，そのような $x$ は一意に定まる． □ 確実同値額は，

$x = c(P, u) = u^{-1}\left(\displaystyle\int_C u(z)dP(z)\right)$ と書くことができる．

**14.2 定義** 連続で厳密に増加関数であるようなすべての $u$ からなる集合を $u^\circ$ とし，$u_1 : C \to \boldsymbol{R}$ と $u_2 : C \to \boldsymbol{R}$ がともに $u^\circ$ に属するとする．また，コンパクトな台を持つすべてのボレル確率測度からなる集合を $\mathscr{P}^*$ とする．このとき，任意の $P \in \mathscr{P}$ について，$c(P, u_1) \leq c(P, u_1)$ が成立するならば，$u_1$ は $u_2$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的である ($u_1$ is at least as risk aversre as $u_2$) と言う．

**14.3 注意** $u_1$ と $u_2$ のうちの一方が，もう一方よりも必ず少なくとも同程度にリスク回避的であるとは限らない．$u_1$ が $u_2$ より少なくとも同程度にリスク回避的ではなく，かつ $u_2$ が $u_1$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的でないような状況がありうる．次の例では，そのような状況が成立している．

**14.4 例** $C \in \{\boldsymbol{R}_+\}$ とし，2 つのくじを

$$P_1(\{1\}) = P_1(\{3\}) = \frac{1}{2}$$

$$P_2(\{3\}) = P_2(\{5\}) = \frac{1}{2}$$

と定義する．また，効用関数 $u_1$ と $u_2$ を

$$u_1(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}x + 1 & (2 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$u_2(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 4 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}x + 2 & (4 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．このとき，くじ $P_1$ が与える期待効用は，それぞれ

$$\int_C u_1(z)dP_1(z) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{7}{4}$$

$$\int_C u_2(z)dP_1(z) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$$

であり，したがって確実同値額はそれぞれ $c(P_1,u_1)=\dfrac{7}{4}$，$c(P_1,u_2)=2$ であり，$c(P_1,u_1)<c(P_1,u_2)$ が成立する．同様にして，くじ $P_2$ が与える確実同値額を求めると，$c(P_2,u_1)=4$，$c(P_2,u_2)=\dfrac{15}{4}$ であり，$c(P_2,u_1)>c(P_2,u_2)$ が成立する．

$u_1$ が $u_2$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的であるためには，任意の $P\in\mathscr{P}$ について，$c(P,u_1)\leq c(P,u_1)$ が成立する必要がある．しかしこの例では，$P=P_1$ のときは $c(P,u_1)<c(P,u_2)$ が成立し，$P=P_2$ のときは $c(P,u_1)>c(P,u_2)$ が成立している．したがって，$u_1$ と $u_2$ のいずれについても，もう一方より少なくとも同程度にリスク回避的であるとは言えない．

もし $u$ が恒等関数であるならば,

$$\int_C u(z)dP(z)=\int_C z dP(z)=P\text{ の平均}=c(P,u)$$

が成立する．

**14.5 注意** $u(x)=\alpha x+\beta$ の形をとる任意の効用関数 $u$ に対して，$c(P,u)$ は $P$ の平均である．

**14.6 定義** $u\in u^\circ$ とする．もし $u$ が $id$ より少なくとも同程度にリスク回避的であるならば，単に，$u$ はリスク回避的であると言う．つまり任意の $P\in\mathscr{P}$ について，$c(P,u)\leq P$ の平均 が成立するならば，$u$ はリスク回避的 (risk-averse) であると言う．

また任意の $P\in\mathscr{P}$ について，$c(P,u)\geq P$ の平均 が成立するならば，$u$ はリスク愛好的 (risk-laving) であると言い，$c(P,u)=P$ の平均 が成立するならば，$u$ はリスク中立的 (risk-neutral) であると言う．

**14.7 命題** $u_1$ が $u_2$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的であることは，以下のことと同値である．任意の $x\in C$ と任意の $P\in\mathscr{P}$ について，$u_1(x)\leq\int_C u_1(z)dP(z)$ ならば $u_2(x)\leq\int_C u_2(z)dP(z)$ が成立する．

関数 $U_1:\mathscr{P}\to\boldsymbol{R}$ と $U_2:\mathscr{P}\to\boldsymbol{R}$ を次のように定義する．

$$U_1(P)=\int_C u_1(z)dP(z)$$

$$U_2(P)=\int_C u_2(z)dP(z)$$

また $\delta_x(\{x\})=1$ を確率測度とする．このとき，$U_1(\delta_x)\leq U_1(P)$ ならば $U_2(\delta_x)\leq U_2(P)$ が成立する．ここで，$U_1(\delta_x)\leq U_1(P)$ は $P\succsim_1\delta_x$ を $U_2(\delta_x)\leq U_2(P)$ は $P\succsim_2\delta_x$ をそれぞれ意味している．これは，リスク回避度の比較を期待効用を使わない形に一般化したものである．ただし，もし $\mathscr{P}$ 上の選好関係 $\succsim$ が独立性公理を満たさないならば，$\succsim$ を表現する $U$ を $u$ の期待値として定義することはできない．

## 14.2 確実同値額を使わないリスク回避度の比較方法

確実同値額を使ってリスク回避度を比較する場合，例えば $u_1$ が $u_2$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的であると言うためには，すべての $P\in\mathscr{P}$ について $c(P,u_1)\leq c(P,u_1)$ が成立することを確かめなければならず，とても大変である．以下では，確実同値額を使わずにリスク回避度を比較するひとつの方法を見ていくことにしよう．

まず，$u_1\in u^\circ$ と $u_2\in u^\circ$ とし，関数 $\psi:u_2(C)\to u_1(C)$ を $\psi=u_1\circ u_2^{-1}$，つまり $\psi(z)=u_1(u_2^{-1}(z))$ と定義する．また，$P\in\mathscr{P}^*$ とする．ここで，$Q=P\circ u_2^{-1}$ と定義すると，$u_2(C)$ の任意のボレル部分集合 $A$ について，

$$Q(A)=P\left(u_2^{-1}(A)\right)$$

が成立する．

**練習問題 10** $Q$ は $u_2(C)$ 上のボレル確率測度であることを証明せよ.

**14.8 定義 (変数変換の法則 (Change of Variable Formula))** $f : u_2(C) \to \boldsymbol{R}$ が, $Q$ に対して積分可能であるとする. このとき $f \circ u_2 : C \to \boldsymbol{R}$ は $P$ に対して積分可能であり,

$$\int_{u_2(C)} f(z)dQ(z) = \int_C (f \circ u_2)(x)dP(x)$$

が成立する. ここで $(f \circ u_2)(x) = f(u_2(x))$ である.

**14.9 命題** もし $\psi$ が凹関数ならば,

$$\int_{u_2(C)} \psi(z)dQ(z) \leq \psi\left(\int_{u_2(C)} zdQ(x)\right) \tag{4}$$

が成立する. また, もし $\psi$ が凸関数ならば,

$$\int_{u_2(C)} \psi(z)dQ(z) \geq \psi\left(\int_{u_2(C)} zdQ(x)\right) \tag{5}$$

が成立する.

まずは左辺を変数変換の公式を使って変形すると,

$$\begin{aligned}\int_{u_2(C)} \psi(z)dQ(z) &= \int_C (\psi \circ u_2)(x)dP(x) \\ &= \int_C u_1(x)dP(x).\end{aligned}$$

次に右辺は, 恒等関数 $id(z) = z$ と変数変換の公式を使って変形すると,

$$\begin{aligned}\psi\left(\int_{u_2(C)} zdQ(x)\right) &= \psi\left(\int_{u_2(C)} id(z)dQ(x)\right) \\ &= \psi\left(\int_C (id \circ u_2)(x)dP(x)\right) \\ &= \psi\left(\int_C u_2(x)dP(x)\right)\end{aligned}$$

したがって, (4) は,

$$\int_C u_1(x)dP(x) \leq \psi\left(\int_C u_2(x)dP(x)\right)$$

と同値である. これは $\psi = u_1 \circ u_2^{-1}$ より,

$$u_1^{-1}\left(\int_C u_1(x)dP(x)\right) \leq u_2^{-1}\left(\int_C u_2(x)dP(x)\right)$$

ここで, 確実同値額の定義より, $u_1^{-1}\left(\int_C u_1(x)dP(x)\right) = c(P, u_1)$, $u_2^{-1}\left(\int_C u_2(x)dP(x)\right) = c(P, u_2)$ と書くことができるから, (4) は $c(P, u_1) \leq c(P, u_2)$ と同値である. 同様に (5) は $c(P, u_1) \geq c(P, u_2)$ と同値である. したがって命題はつぎのように書き換えることができる.

**14.10 命題** もし $\psi$ が凹関数ならば, $u_1$ は $u_2$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的である. また $\psi$ が凸関数ならば, $u_2$ は $u_1$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的である.

実は逆の関係も成立する. したがって, $\psi$ が凹関数であることと, $u_1$ が $u_2$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的であることは同値であり, また $\psi$ が凸関数であることと、$u_2$ が $u_1$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的であることは同値である.

逆の関係が成立することを示すには，$u_1$ が $u_2$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的であるならば，任意の $z \in u_2(C)$，$z' \in u_2(C)$，および任意の $\alpha \in [0,1]$ について，

$$\psi(\alpha z + (1-\alpha)z') \geq \alpha\psi(z) + (1-\alpha)\psi(z')$$

が成立することを示せばいい．今，$x = u_2^{-1}(z)$，$x' = u_2^{-1}(z')$ と定義し，それらが与える確率測度を $P(\{x\}) = \alpha$，$P(\{x'\}) = 1-\alpha$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} c(P, u_1) &= u_1^{-1}\left(\int_C u_1(x)dP(x)\right) \\ &= u_1^{-1}\left(\alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_1(x')\right) \\ &= u_1^{-1}\left(\alpha\psi(z) + (1-\alpha)\psi(z')\right) \end{aligned}$$

が得られ，同様に

$$c(P, u_2) = u_2^{-1}\left(\alpha z + (1-\alpha)z'\right)$$

が得られる．ここで，$u_1$ が $u_2$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的であるならば $c(P,u_1) \leq c(P,u_2)$ が成立するので，

$$u_1^{-1}\left(\alpha\psi(z) + (1-\alpha)\psi(z')\right) \leq u_2^{-1}\left(\alpha z + (1-\alpha)z'\right)$$

$\psi = u_1 \circ u_2^{-1}$ より，

$$\alpha\psi(z) + (1-\alpha)\psi(z') \leq \psi\left(\alpha z + (1-\alpha)z'\right)$$

したがって $\psi$ が凹関数であることが示せた．

効用関数 $u$ がリスク回避的であることは，$u$ が恒等関数 $id$ より少なくとも同程度にリスク回避的であることと同値である．このとき，命題より $\psi$ は凸関数である．ところで $\psi = u \circ id^{-1} = u$ であるから，効用関数 $u$ がリスク回避的であることは，$u$ が凸関数であることと同値であると言える．

## 14.3　絶対的リスク回避度

$u^2$ を 2 回連続微分可能で，$u_i' > 0$ であるような効用関数の集合とし，$u_1 \in u^2$，$u_2 \in u^2$ とする．このとき，$\psi = u_1 \circ u_2^{-1}$ も 2 回連続微分可能である．

命題より，$u_1$ は $u_2$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的であることは $\psi$ が凸関数，つまり $\psi'' \leq 0$ が成立することと同値である．ところで，$\psi$ は $u_1$ と $u_2$ を使って定義したのだから，$\psi'' \leq 0$ という条件を $u_1$ と $u_2$ を使って表すことはできないだろうか．実は $\psi'' \leq 0$ は，任意の $x \in C$ について

$$-\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} \geq -\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)}$$

が成立することと同値である．このことを以下で確認しよう．まず，$\psi'(z)$ と $\psi''(z)$ は次のように $u_1$ と $u_2$ を使って表すことができる．

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= (u_1 \circ u_2^{-1})'(z) \\ &= u_1'(u_2^{-1}(z))(u_2^{-1})'(z) \\ &= u_1'(u_2^{-1}(z))\frac{1}{u_2'(u_2^{-1}(z))} \\ &= \frac{u_1'(u_2^{-1}(z))}{u_2'(u_2^{-1}(z))} \end{aligned}$$

$$\psi''(z) = \frac{u_1'(u_2^{-1}(z))}{\left\{u_2'(u_2^{-1}(z))\right\}^2}\left(\frac{u_1''(u_2^{-1}(z))}{u_1'(u_2^{-1}(z))} - \frac{u_2''(u_2^{-1}(z))}{u_2'(u_2^{-1}(z))}\right)$$

ここで $\dfrac{u_1'(u_2^{-1}(z))}{\left\{u_2'(u_2^{-1}(z))\right\}^2} \geq 0$ より，$\psi'' \leq 0$ ならば，またそのときに限り，任意の $z \in u_2(C)$ について

$$\frac{u_1''(u_2^{-1}(z))}{u_1'(u_2^{-1}(z))} \leq \frac{u_2''(u_2^{-1}(z))}{u_2'(u_2^{-1}(z))}$$

が成立する．この関係は $u_2^{-1}(z) = x$ と置き換えれば，任意の $x \in C$ について

$$-\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} \geq -\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)}$$

が成立することと同値である．

**14.11 定義 (アロー・プラットの絶対リスク回避度)** $u \in u^2$，$x \in C$ とする．このとき

$$r(x,u) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

は，$u$ の $x$ におけるアロー・プラットの絶対リスク回避度 (Arrow-Pratt measure of absolute risk aversion of $u$ at $x$) と呼ばれる．

**14.12 命題** $u_1$ は $u_2$ よりも少なくとも同程度にリスク回避的であることは，任意の $x \in C$ について

$$r(x,u_1) \geq r(x,u_2)$$

が成立することと同値である．

**14.13 注意** $u \in u^2$，$x \in C$，$x > 0$ とする．このとき

$$-\frac{u''(x)x}{u'(x)}$$

は，$u$ の $x$ における相対的リスク回避度と呼ばれる．

ところでアロー・プラットの絶対リスク回避度は，

$$r(x,u) = -\frac{d}{dx}\log u'(x)$$

と書くことができる．右辺の $\dfrac{d}{dx}\log u'(x)$ は，$u'(x)$ がどのような率で上昇しているかを表している．マイナスの符号を考慮すると，$r(x,u)$ は，$x$ が 1 単位増えたときに，限界効用が何 % 減ったかを表している．

一方，相対的リスク回避度は，

$$-\frac{u''(x)x}{u'(x)} = \frac{du'(x)}{dx}\bigg/\frac{u'(x)}{x}$$

と変形すると，右辺は $u'(x)$ の弾力性を表していることがわかる．つまり相対的リスク回避度は，$x$ が 1% 増えたときに，限界効用が何 % 減ったかを表している．