例題：結合共振器

目 次

1 Spice

直列共振回路の発展として、2 つの等しい共振回路を結合させて、どのような現象が発生するか見てみよう[1]。図 1.1 のようにインダクタに相互誘導 (結合係数 $k = 0.1$) をもたせて結合させた等しい共振器において 2 つのキャパシタの電圧波形を見ると図 1.1 下のようになる。C_1 にのみ初期値を与えているため最初の 0.1ms 未満までは左側の共振器が大きく振動し (青線)、右側の共振器にはほとんどエネルギーが無い (赤線)。しかし、0.3ms 付近では右側の共振器にエネルギーが移り、逆に左側は振動しなくなる。このように 2 つの共振器で交互にエネルギーをやりとりしながら減衰していく様子が観察できる。

- 結合係数が 0 のときは独立した 2 つの共振回路になるので、共振回路 1 個のときと一致するはずであるが、確かめてみよう。
- 結合係数を変化させるとどのように現象は変化するか。
- どのような仕組みでエネルギーの交換がおきるか考えてみよう。
- 相互誘導ではなくインダクタで結合させた図 1.2 のようなかいろについても同様の現象が発生する。確認してみよう。
- キャパシタで結合させた図 1.3 のような回路についても同様の現象が発生する。確認してみよう。
- 位相平面の様子を観察してみよう。

[1] 結合共振の特性は、共振を利用した無線電力伝送に利用される他、量子系の現象などにも対応している。

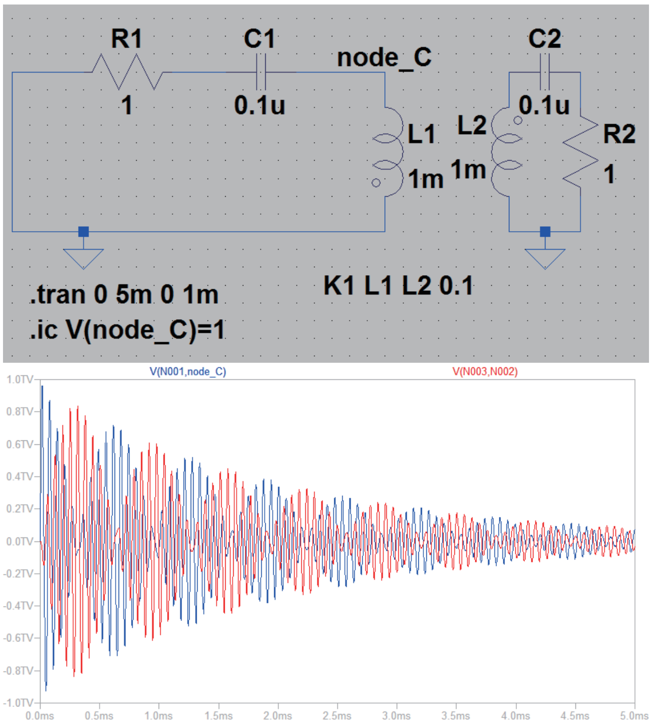

図 1.1: インダクタの相互誘導で結合した結合共振器

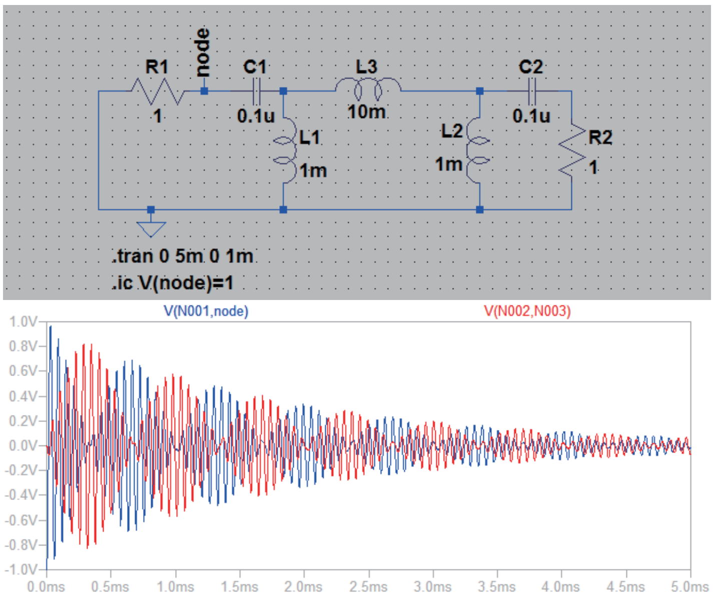

図 1.2: インダクタで結合した結合共振器

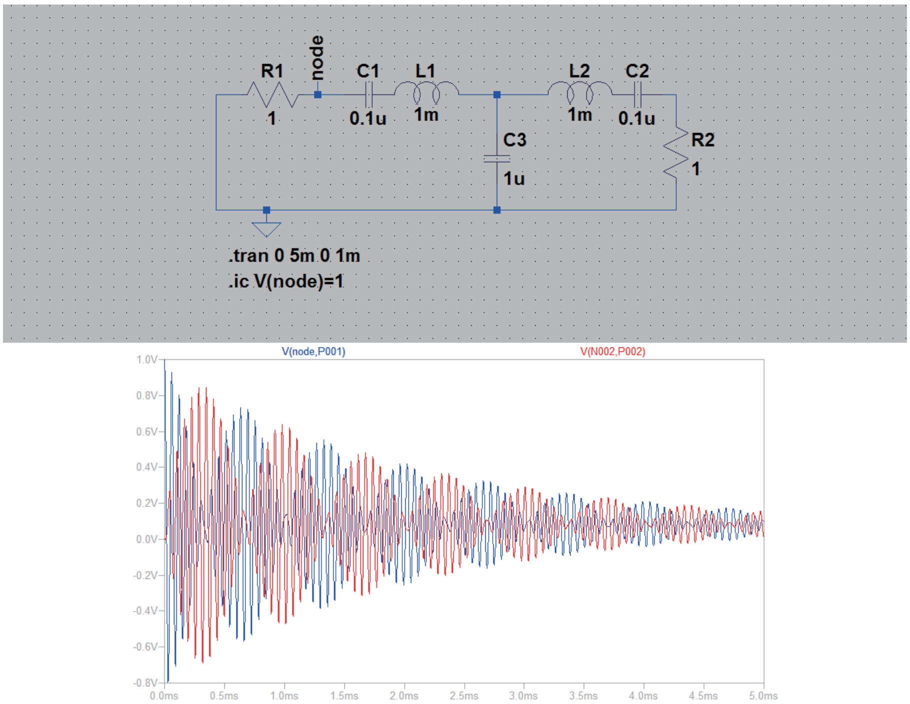

図 1.3: キャパシタで結合した結合共振器

2 Octave

結合共振回路の方程式は 2 次元+2 次元で 4 次元になり、行列で表現すると次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & M & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ M & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \\ i_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \\ i_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

ただし相互インダクタンスを M としている。右辺の行列はブロック対角になっており、結合がない共振回路を並べただけである。左辺の相互インダクタンスの項が結合を表している。対称なものを想定しているので実際は $L_1 = L_2, C_1 = C_2, R_1 = R_2$ とする。

左の行列の逆行列を左からかけてやると $D = L_1 L_2 - M^2$ として

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \\ i_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2/D & 0 & -M/D & 0 \\ 0 & 1/C_1 & 0 & 0 \\ -M/D & 0 & L_1/D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \\ i_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$
= \begin{bmatrix} -L_2R_1/D & -L_2/D & MR_2/D & M/D \\ 1/C_1 & 0 & 0 & 0 \\ MR_1/D & M/D & -L_1R_2/D & -L_1/D \\ 0 & 0 & 1/C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \\ i_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{2.3}
$$

となる。これが結合共振回路を表現する微分方程式となる。2.2 節にあるように、この行列の固有値が特性方程式の解と一致する。

回路パラメータを図 1.1 のように設定し、Octave の関数 eig() を用いて固有ベクトルと固有値を計算すると次のようになる。

```
  0.00000 - 0.00745i   0.00000 + 0.00745i  -0.00000 + 0.00674i  -0.00000 - 0.00674i
 -0.70707 + 0.00000i  -0.70707 - 0.00000i   0.70707 + 0.00000i   0.70707 - 0.00000i
  0.00000 + 0.00745i   0.00000 - 0.00745i  -0.00000 + 0.00674i  -0.00000 - 0.00674i
  0.70707 - 0.00000i   0.70707 + 0.00000i   0.70707 + 0.00000i   0.70707 - 0.00000i
```

```
-5.5556e+002 + 1.0541e+005i                          0                          0                          0
                          0  -5.5556e+002 - 1.0541e+005i                          0                          0
                          0                          0  -4.5455e+002 + 9.5345e+004i                          0
                          0                          0                          0  -4.5455e+002 - 9.5345e+004i
```

上の行列は縦ベクトルとして 4 個の固有ベクトルが書かれており、下の行列は対応する固有値が対角成分に書かれている。固有値、固有ベクトルともに複素共役のものが 2 組で構成されている。つまり、1 個の共振回路では 1 個の振動解が得られたが、2 個の結合共振器では 2 つの振動の重ね合わせになる。

固有値 λ は特性方程式の解なので、$e^{\lambda t}$ が減衰振動を表現する。つまり、固有値の実部 Re[λ] が減衰に、虚部 Im[λ] が振動に対応する。結合が無いときの角周波数 (虚部) は $\lambda = 1/\sqrt{LC} = 1.0\times10^5$ 程度であるのに対して、結合があると角周波数(虚部) が 1.0541×10^5 と 0.95345×10^5 に分かれる。このように、等しい共振回路でも結合させると、結合共振回路の共振周波数は元の共振周波数よりも高い振動 (モード) と低い振動 (モード) に分かれることがわかる。

どのような振動 (モード) が表れているかは固有ベクトルから情報が得られる。固有ベクトルは複素数になっていて少しわかりにくいが、固有値 $-5.5556e+002 \pm 1.0541e+005\mathrm{i}$ に対応する左の 2 個のベクトルは

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}
$$

によって張られる 4 次元空間中の 2 次元平面上にある。つまり、この平面上に初期値を与えると、ずっとこの平面上に存在し続ける。一方、固有値 $-4.5455e+002 \pm 9.5345e+004\mathrm{i}$ に対応する右の 2 個のベクトルは

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

によって張られる平面にある。これらの平面は回路の対称性から決まるので、結合係数を替えても変化しない。

2 つの振動モードは次の図のような 2 つの振動に対応している。左の振動モードはキャパシタの電圧もインダクタの電流も等しい偶対称モード、右の振動モードはキャパシタの電圧もインダクタの電流もちょうど逆になる奇対称モードである固有値や固有ベクトルで分解して考えることにより、4 次元のシステムもそれぞれの振動の重ね合わせとしてとらえることができる。

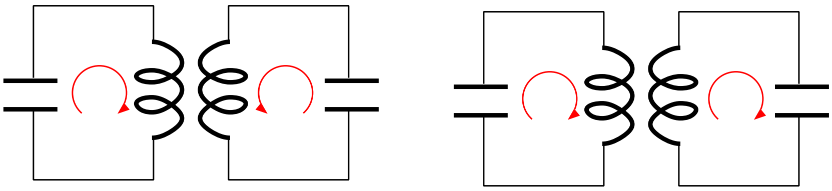

図 2.1: 結合共振器の 2 つのモード

2 個の振動モードの周波数が近いために、Spice によるシミュレーションでは唸りの波形が得られていたことになる。

- 固有モードだけを発生させて唸りの無い振動を発生させてみよう。
- 結合係数を変化させたときに固有周波数がどのように変化するかをグラフで表現してみよう。
- 上の 4 つの固有ベクトルで座標変換してみよう。手計算で文字のまま固有周波数を計算できる。

3　実験

下図のような回路を組み、左の共振器に矩形波を加えてみよう[2]。2 つのインダクタをできる限り接して配置することで結合を作ることができる。下図は右側の共振器のキャパシタ電圧の実験観測波形例である。

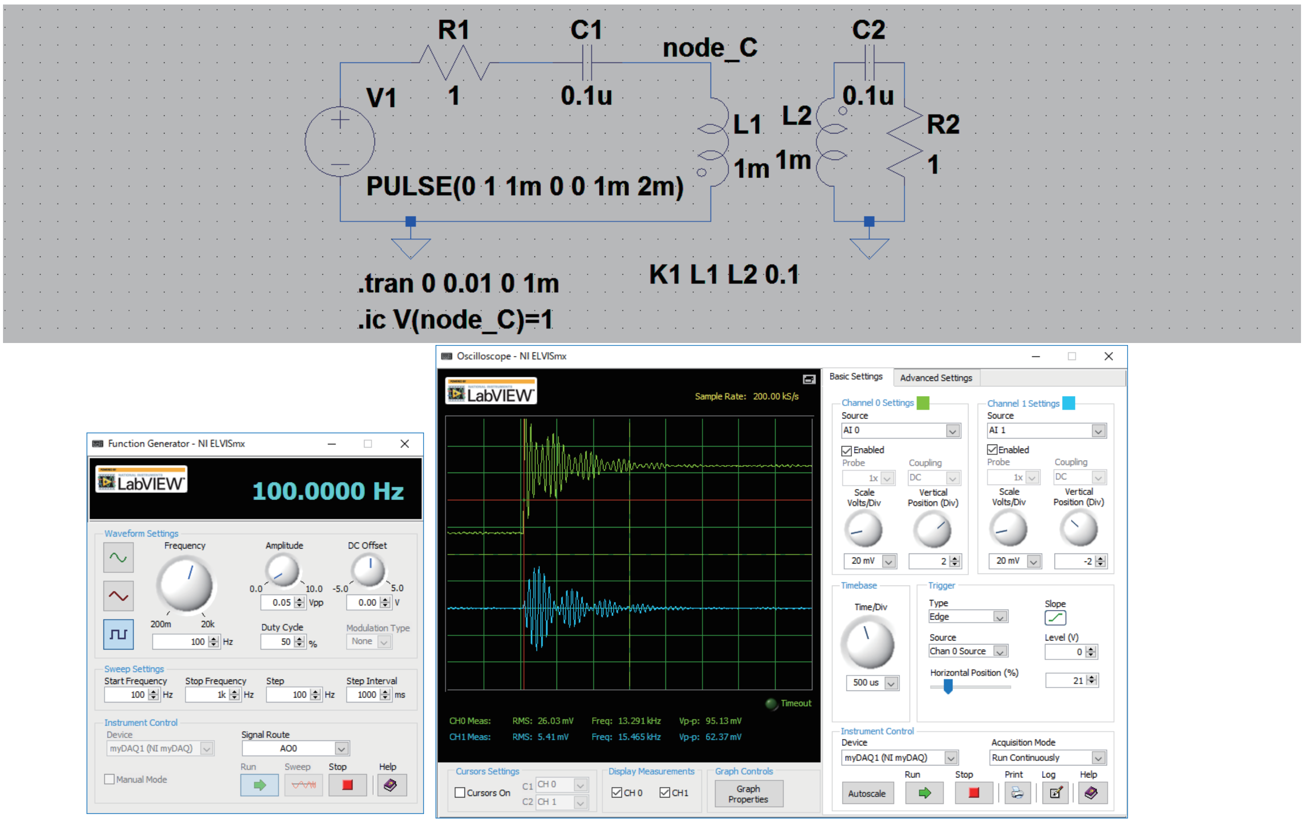

図 3.1: インダクタで結合させた結合共振器のキャパシタ電圧 (実験). 緑が C1, 水色が C2

相互誘導ではなくインダクタで結合させた場合も同様にして次のような波形が得られる。パラメータは図 1.2 のとおり。

[2]コンデンサは極性のないセラミックコンデンサを使う。もう 1 個の 1mH のインダクタは教員控室で借りられる。抵抗は内部抵抗を表現しているだけで、実際にはつなぐ必要は無い。2mA の制約にひっかからないためには入力振幅を小さくすることが重要。

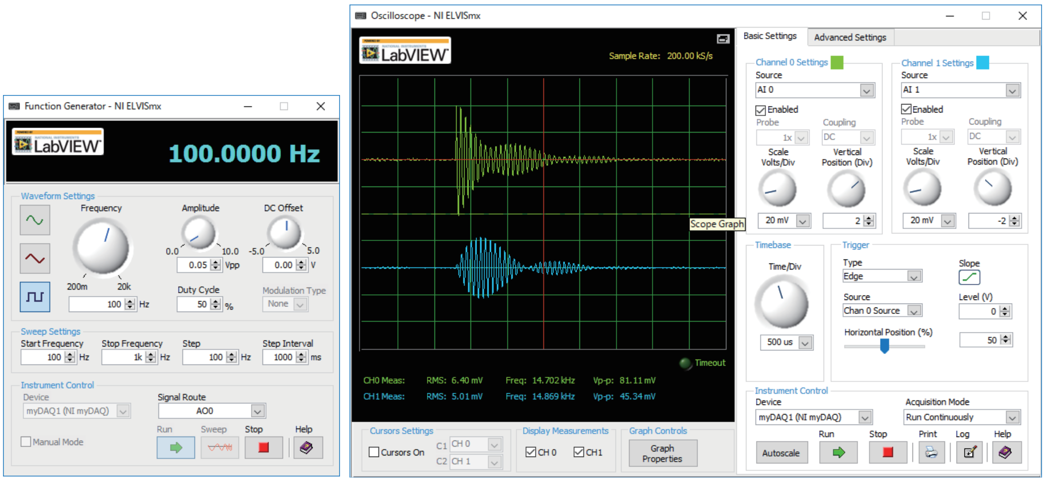

図 3.2: インダクタで結合させた結合共振器のキャパシタ電圧 (実験)

キャパシタで結合させた場合も同様にして次のような波形が得られる。パラメータは図 1.3 のとおり。

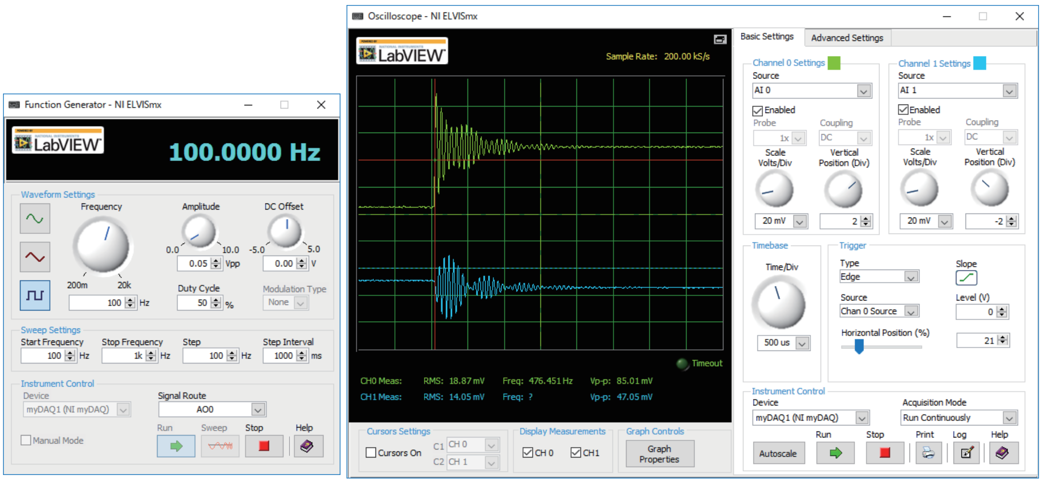

図 3.3: キャパシタで結合させた結合共振器のキャパシタ電圧 (実験)

- 結合の強さを変えて実験してみよう。
- 初期値を適切に与えて固有振動モードを発生させることはできるか。

4 周波数特性

1 個の共振回路では 1 個の共振特性が表れたが、結合共振回路の場合はどうなるだろうか。等しい共振周波数をもつ共振回路を結合させてみよう。下図のように正弦波で駆動し

て周波数特性を観察する。

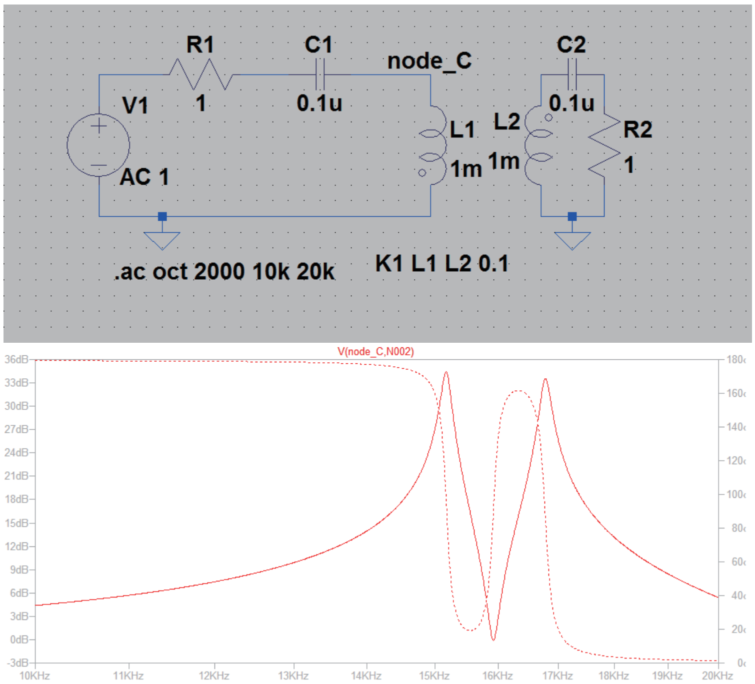

図 4.1: インダクタで結合させた結合共振器のキャパシタ C1 の電圧の周波数特性

共振器 1 個の場合はピークが 1 個であったが、この場合は 2 個のピークをもつ。

- 結合係数を変えて周波数特性の変化を見てみよう。
- それぞれのピークに対応する周波数で励振した時の C_1, C_2 の電圧波形を見てみよう。どの振動モードが発生しているか。
- 抵抗を変えて周波数特性の変化を見てみよう。

実験でも次のような周波数特性が得られる。

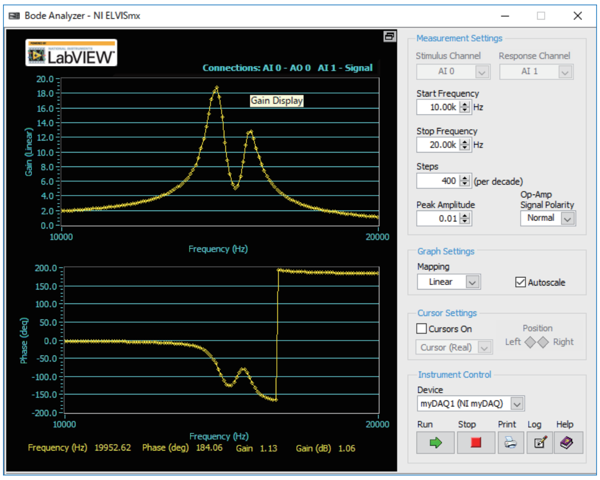

図 4.2: インダクタで結合させた結合共振器のキャパシタ C1 の電圧の周波数特性の実験結果