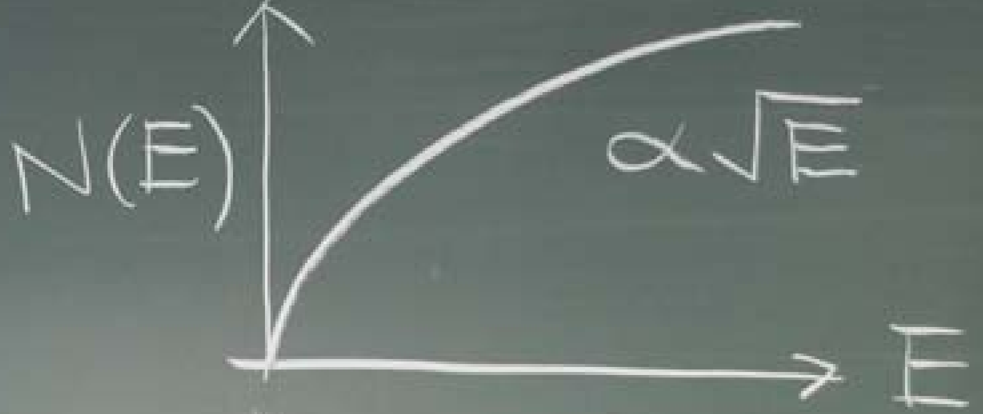
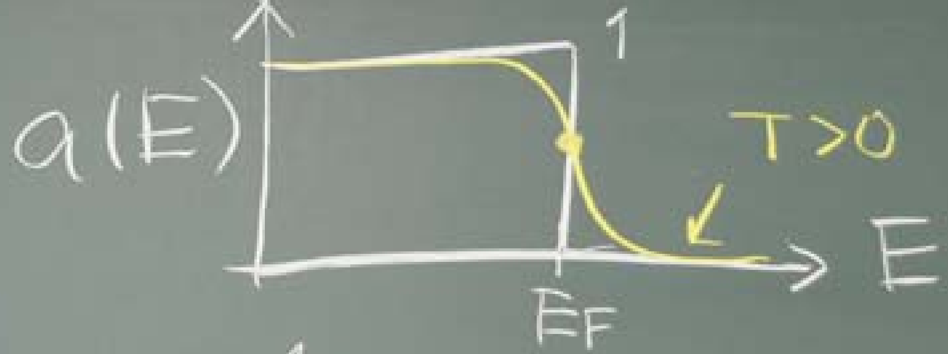
Fermi-Dirac統計

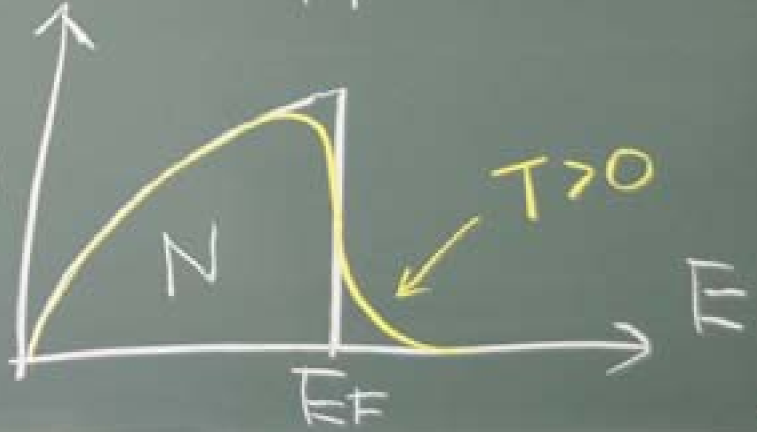
$$a(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)+1}$$

Fermi関数 (2.53)





$g(E)$
$= N(E)a(E)$



E_Fをどのように定めるか？

$$\int_0^\infty g(E)\, dE = N$$

$$\int_0^\infty N(E) \cdot a(E)\, dE = N$$

$T=0K$

$$\int_0^{E_F} N(E)\, dE = N$$

$$E_{F0} = \left(\frac{h^2}{2m}\right)\left(\frac{3N}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

(2,71).

Tが上昇するとどうなるか？

E_Fが一定だと仮定 → Nが増えてしまう.

E_Fは T ↗ E_F ↘ 少しだけ↑る.

$$E_F = E_{F0}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_{F0}}\right)^2\right]$$

平均エネルギー $\langle E \rangle$

$$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E \cdot g(E)\, dE \Big/ \underbrace{\int_0^{\infty} g(E)\, dE}_{\text{個数 N で割る.}}$$

$T = 0K$

$$\langle E_0 \rangle = \int_0^{E_F} E \cdot N(E)\, dE \Big/ \int_0^{E_F} N(E)\, dE$$

$$= \frac{3}{5} E_{F0}$$

$T \nearrow \quad \langle E \rangle \nearrow$

$$\langle E \rangle = \langle E_0 \rangle \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_{F0}} \right)^2 \right] \quad (2.74)$$

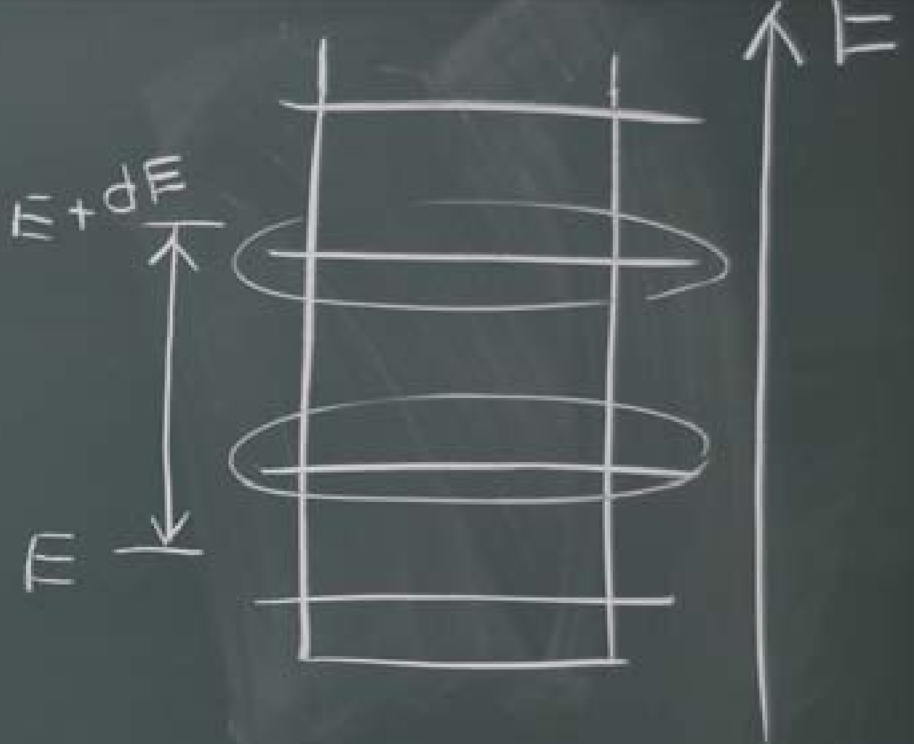
N(E)を求める p.73〜

$$N(E) = 8\pi\sqrt{2}\,\frac{m^{3/2}}{h^3}\sqrt{E} \quad (2.57)$$

エネルギー状態密度

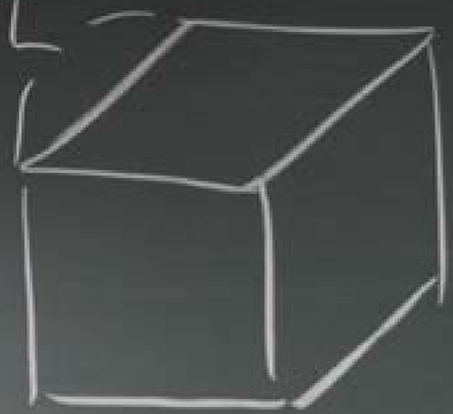
E〜E+dEの区間に

$N(E)\cdot dE$ 個の状態がある



3次元の量子井戸 → 量子箱

$$\Psi(x,y,z) = A\exp\{i\omega t - i2\pi(lx+my+nz)/\lambda\}$$



箱の中の電子

境界条件. $x=0,\ y=0,\ z=0$

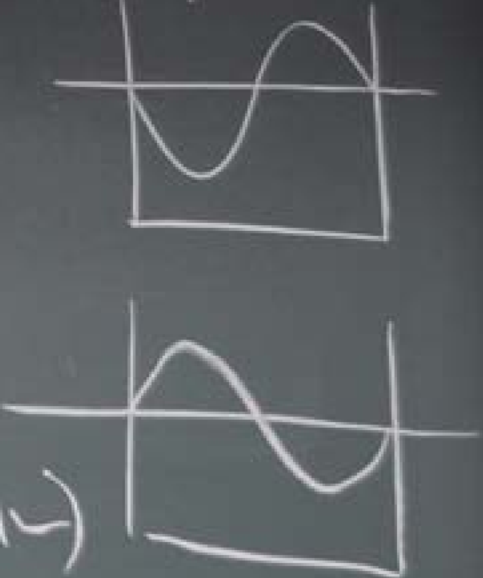
$x=L,\ y=L,\ z=L$ のとき $\Psi=0$ となる

↓

$$\Psi(x,y,z) = B\exp(i\omega t)\,\sin\left(\frac{2\pi lx}{\lambda}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi my}{\lambda}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi nz}{\lambda}\right)$$

$$\frac{2lL}{\lambda} = n_1 \quad \frac{2mL}{\lambda} = n_2 \quad \frac{2nL}{\lambda} = n_3$$

$n=2$



n_1, n_2, n_3 が 正の 整数.

$l^2 + m^2 + n^2 = 1$ (方向余弦 大きさ1の 単位ベクトル)

同じもの.

片方だけかぞえ

(2.60)
$$\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$$

電子波の波長λ

λから　$\lambda + d\lambda$の間に

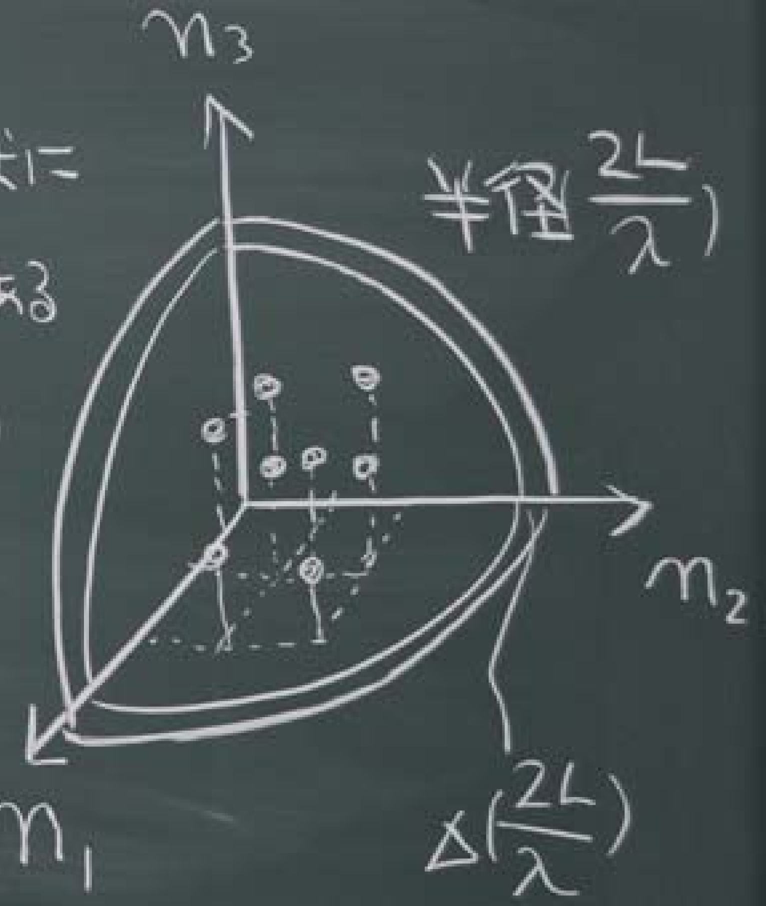
何個の点があるか？

n_1, n_2, n_3

空間に格子状に

電子状態がある

（正の整数）



$$\Delta n = \frac{1}{8}\,4\pi\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 \Delta\left(\frac{2L}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{4\pi L^3}{\lambda^2}\,\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{4\pi V}{\lambda^2}\,\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$E = \frac{P^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{1}{2m}\frac{h^2}{\lambda^2}$$

$$\lambda^2 = \frac{h^2}{2mE} \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{2mE}}{h}$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{dE} = \frac{d}{dE}\left(\frac{\sqrt{2mE}}{h}\right) = \frac{\sqrt{2m}}{h}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}\,h}\frac{1}{\sqrt{E}}\,dE$$

$$\Delta n = 4\pi V \frac{2mE}{h^2} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}\,h} \frac{1}{\sqrt{E}} \Delta E$$

$$= \frac{8\pi V m^{3/2}}{h^3 \sqrt{2}} \sqrt{E}\, \Delta E$$

スピンを考える。上記×2が$N(E)$である。単位体積あたり $N(E)$

$$N(E) = 8\pi\sqrt{2} \frac{m^{3/2}}{h^3} \sqrt{E}$$

単位体積あたり

単位エネルギーあたりの状態数

3次元の量子井戸 → 量子箱

波長λの電子波

$$\Psi(x,y,z) = A\exp\left\{i\omega t - i2\pi\left(lx+my+nz\right)/\lambda\right\}$$

箱の中の電子

境界条件. $x=0, y=0, z=0$

$x=L, y=L, z=L$ のとき $\Psi=0$ となる

↓

$$\Psi(x,y,z) = B\exp(i\omega t)\sin\left(\frac{2\pi l x}{\lambda}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi m y}{\lambda}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi n z}{\lambda}\right)$$

Bose-Einstein統計

Fermi粒子 … 1つの状態に1つしか入らない。 0か1か。

Bose粒子 … 1つの状態にいくらでも粒子が入る。 0, 1, 2, …

→ 光子、音子(フォノン)

光波 − 電磁波 → 鏡の箱 定在波(モード)

古典 振幅 任意

量子 $E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

Bose統計

$$a(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{kT}\right) - 1} \quad (2.81)$$

$\downarrow$

$0 \sim \infty$ の値

符号

$$\langle n \rangle = \frac{\langle E \rangle - \frac{1}{2}h\nu}{h\nu}$$

$$= \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

(2.49)

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}h\nu + \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

$h\nu = E$

P.66 Boltzmann因子を求める

$$E_1, E_2 \underset{P}{\overset{P'}{\rightleftarrows}} E_1' E_2'$$

2つの粒子　衝突　になる.

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$$

$$P = C \cdot a(E_1)\, a(E_2)$$

比例

$$P' = C \cdot a(E_1')\, a(E_2')$$

熱平衡 → 分布が不変

↳ $P = P'$ でなければならない

詳細釣り合いの原理

$$a(E_1)\,a(E_2) = a(E_1')\,a(E_2')$$

$$= a(E_1 - x)\,a(E_2 + x)$$

$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$ を考えると

これが任意の E_1, E_2, x に対して成立するような関数

$$a(E) = A \cdot \exp(-\beta E).$$

のみが満足する.

$$\beta = \frac{1}{RT}$$ とすればよい

電子の場合

$$P = C \cdot a(E_1) \cdot a(E_2) \left[1 - a(E_1')\right]\left[1 - a(E_2')\right]$$

パウリの排他原理

波長 400 nm の光子のエネルギーは？

eV？

3,1 eV.

$$\cancel{E = \frac{1240}{\lambda}\,[\mathrm{eV}]}$$

$$\lambda \cancel{= 400}$$

$$\lambda = 400\,\underline{\mathrm{nm}}$$

$$E = \frac{1240\ \mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{\lambda} = \frac{\overset{3,1}{\cancel{1240}}\ \cancel{\mathrm{nm}}\cdot \mathrm{eV}}{\cancel{400}\ \cancel{\mathrm{nm}}}$$

$$(1.46) \quad \lambda = \cancel{\sqrt{\frac{150}{V}} \times 10^{-10}} \ [\mathrm{m}]$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{150\,\mathrm{V}}{V}} \times 1\,\mathring{A}$$