古典統計 Maxwell-Boltzmann統計(M-B)

$a(E) = A \cdot \exp(-E/kT)$ を出発として

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \boxed{\exp\left(-m\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2\ kT}\right)}$$

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \boxed{\exp\left(-\frac{mv^2}{2\ kT}\right)} \cdot \underline{4\pi v^2}$$

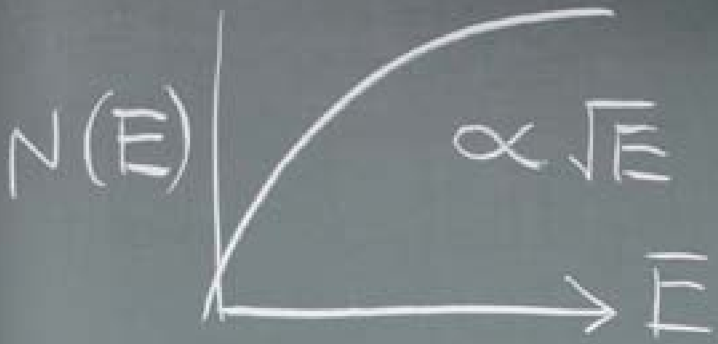
関数

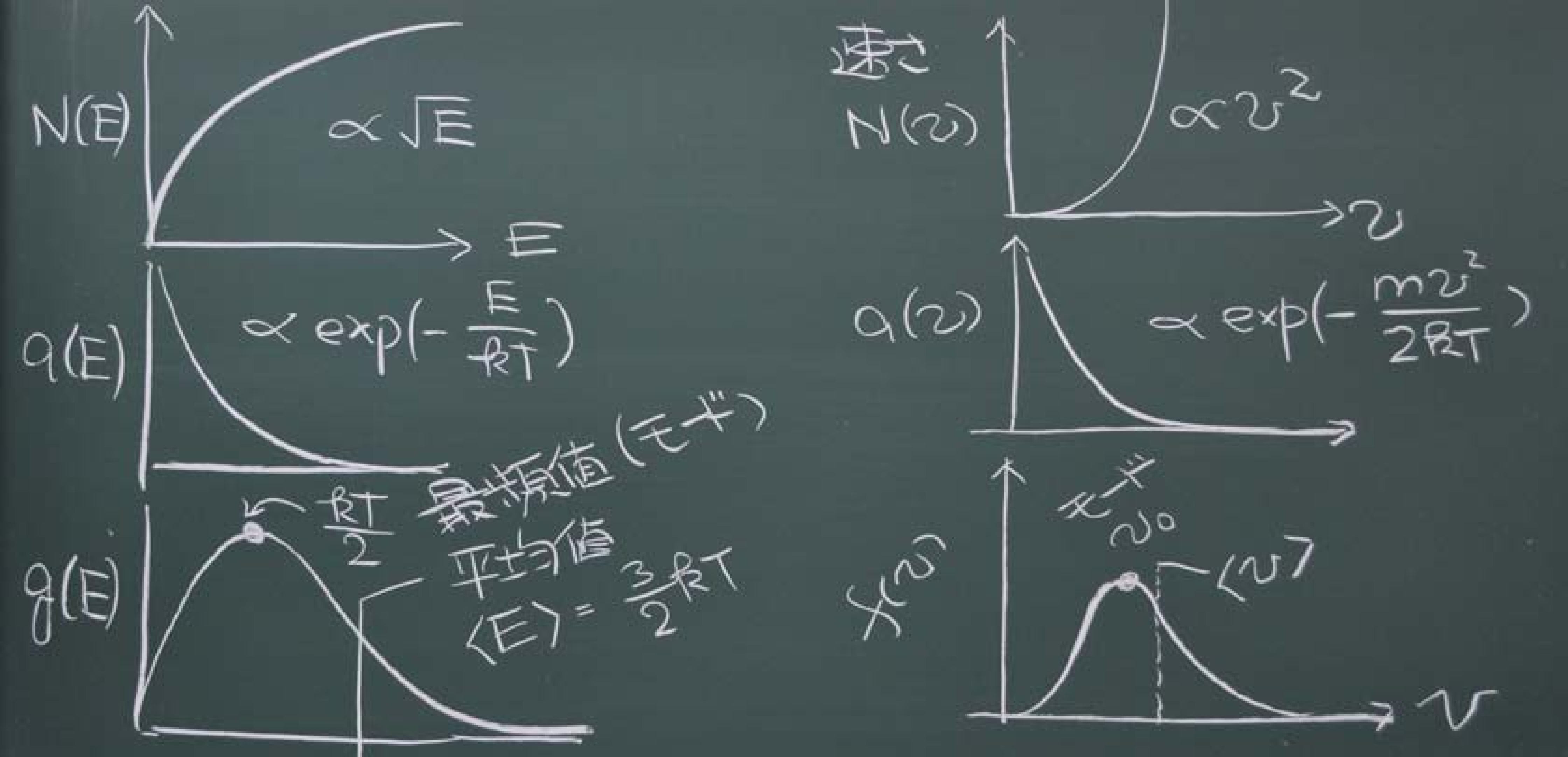
$$g(E) = \underbrace{2\pi\left(\frac{1}{\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}}_{\text{定数倍}}\ \underbrace{\sqrt{E}}_{\text{関数}}\ \underset{\text{占有確率}}{\boxed{\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)}}$$

$\downarrow$

状態密度.

分布関数 $\propto$ 状態密度 $\times$ 占有確率.





N(E)
$\propto \sqrt{E}$
E
q(E)
$\propto \exp(-\frac{E}{kT})$
$\frac{kT}{2}$
最頻値（モード）
平均値
$\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT$
g(E)
速さ
N(v)
$\propto v^2$
v
q(v)
$\propto \exp(-\frac{mv^2}{2kT})$
モード
v_0
$\langle v \rangle$
f(v)
v

準古典統計

調和振動子

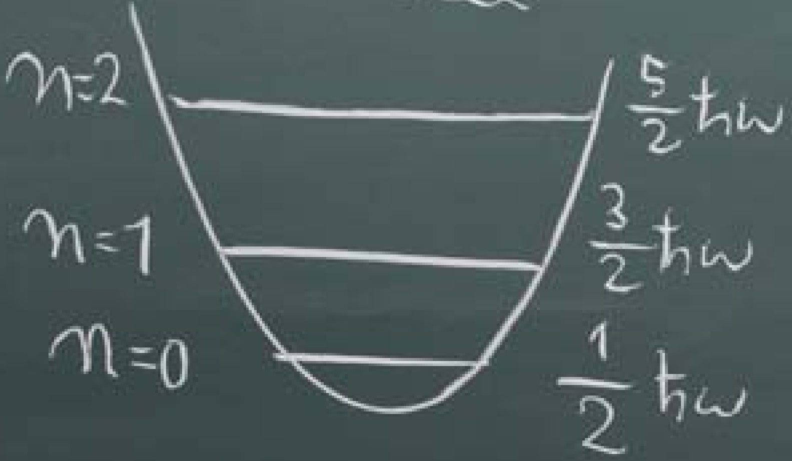
$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$h\nu$

量子 $E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

古典 $x : -\infty \sim \infty$

$v : -\infty \sim \infty$



自由度 2

$$\langle E \rangle = 2 \times \frac{1}{2}kT = kT$$

$\frac{1}{2}h\nu$は除外して考える.

$$P(E_n) = C \cdot \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n) = 1$ となるように C を定める.

$$\frac{1}{C} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right) = \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (2.47)$$

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \times C \cdot \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)$$

$$= \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (2.48)$$

$\langle E \rangle = kT$
古典

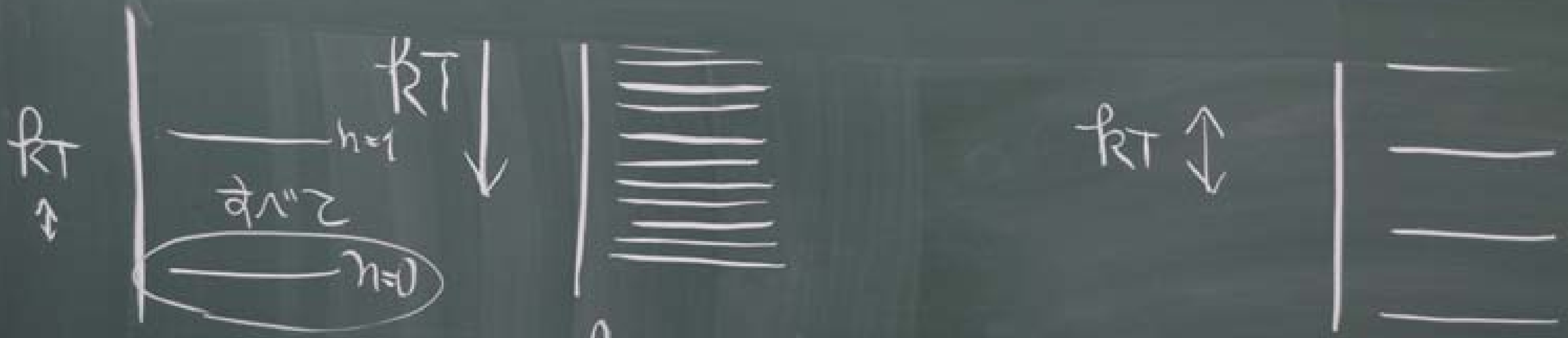
$x \sim 0$

$\exp(x) \simeq 1 + x$

$kT \gg h\nu$ (温度が高いとき) $\frac{h\nu}{kT} \sim 0$

$$\langle E \rangle \sim \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = kT,$$

古典と一致



$h\nu \gg kT$

$kT \gg h\nu$

$h\nu \sim kT$

$\langle E \rangle \sim 0$ すべて最低エネルギー 寄与しない

固体の比熱

1つ1つの原子が振動子 3方向ある

Dulong-Peitの法則

$$\langle E \rangle = 3 \underline{N_0} k T$$

1モルあたり　　アボガドロ数

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = 3N_0 k = 3\underline{R}$$

気体定数

高温では成立

低温では比熱減少

$$C_v = 3N_0 \frac{\partial \langle E \rangle^{\leftarrow (249)}}{\partial T} = 3N_0 k \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (2.50)$$

Einsteinが提案　　↓ 図2.2

↓

Debyeが改良モデル → 非常によく合う

量子統計 Fermi-Dirac統計 (F-D)

<u>電子</u>

① エネルギー準位が量子化されていて

$E \sim E + dE$の間の準位の数が有限である

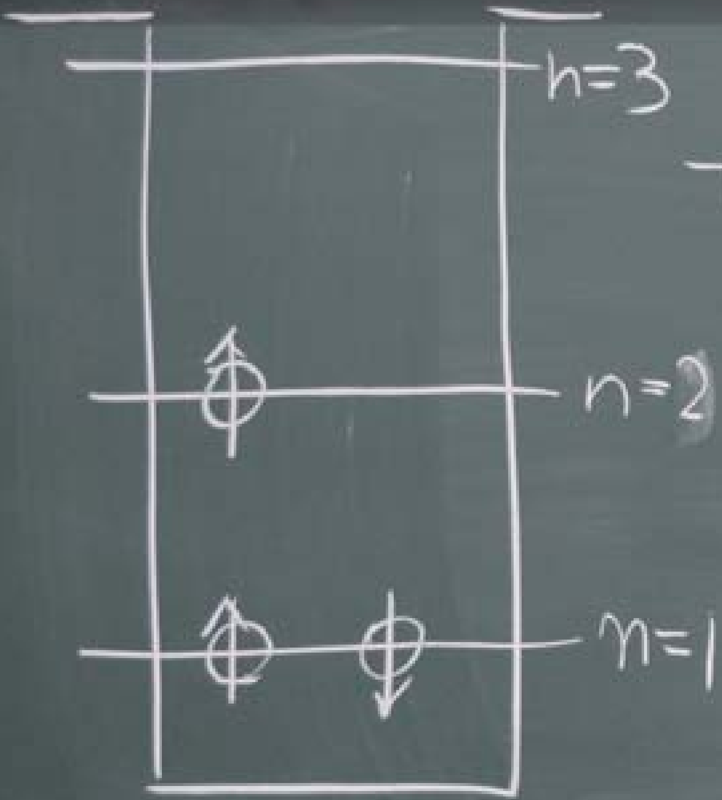
② Pauliの排他原理により1つの状態には

スピン↑, スピン↓の計2つの粒子しか入りえない

$$a(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}$$

Fermi関数

E_F: フェルミエネルギー



エネルギー状態密度

$$T=0\mathrm{K}\quad N(E)=8\pi\sqrt{2}\,\frac{m^{\frac{3}{2}}}{h^{3}}\sqrt{E}\qquad(2.57)$$

Fermi関数の特徴

$0 \leqq a(E) \leqq 1$ である。

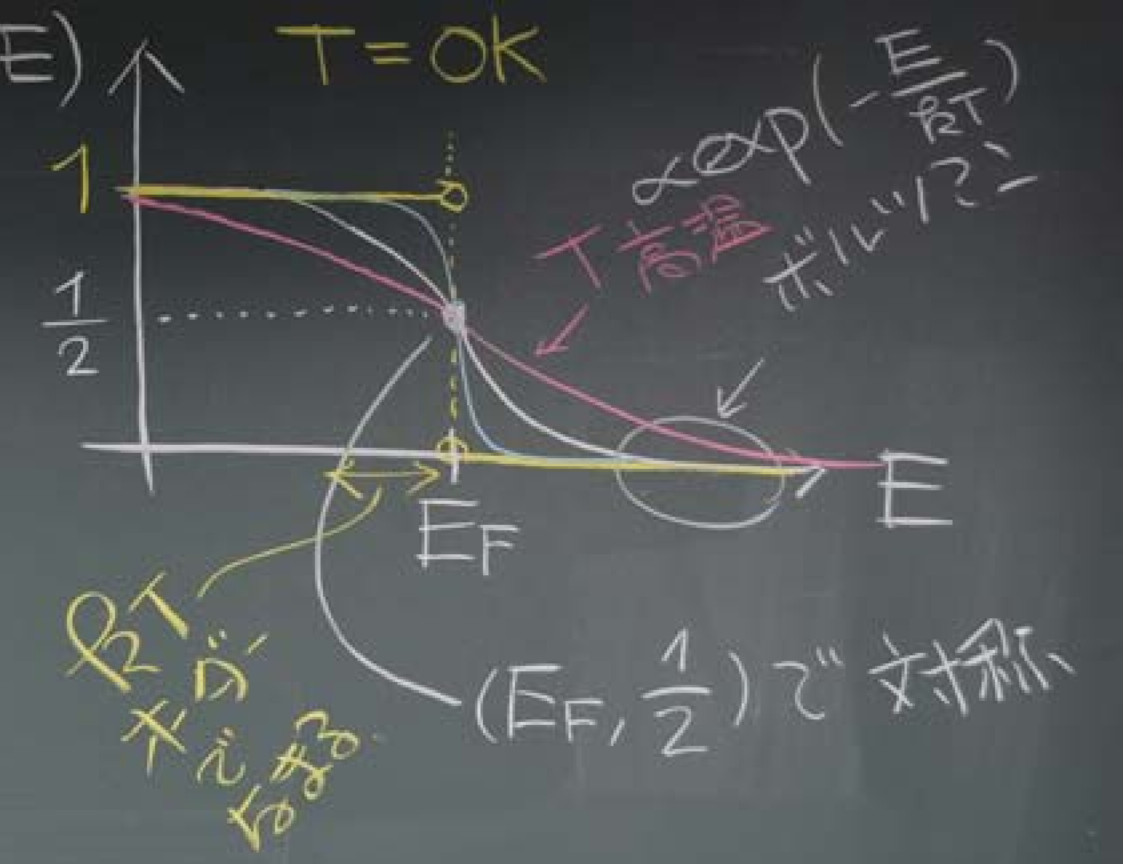
$T = 0\,\mathrm{K}$ のとき

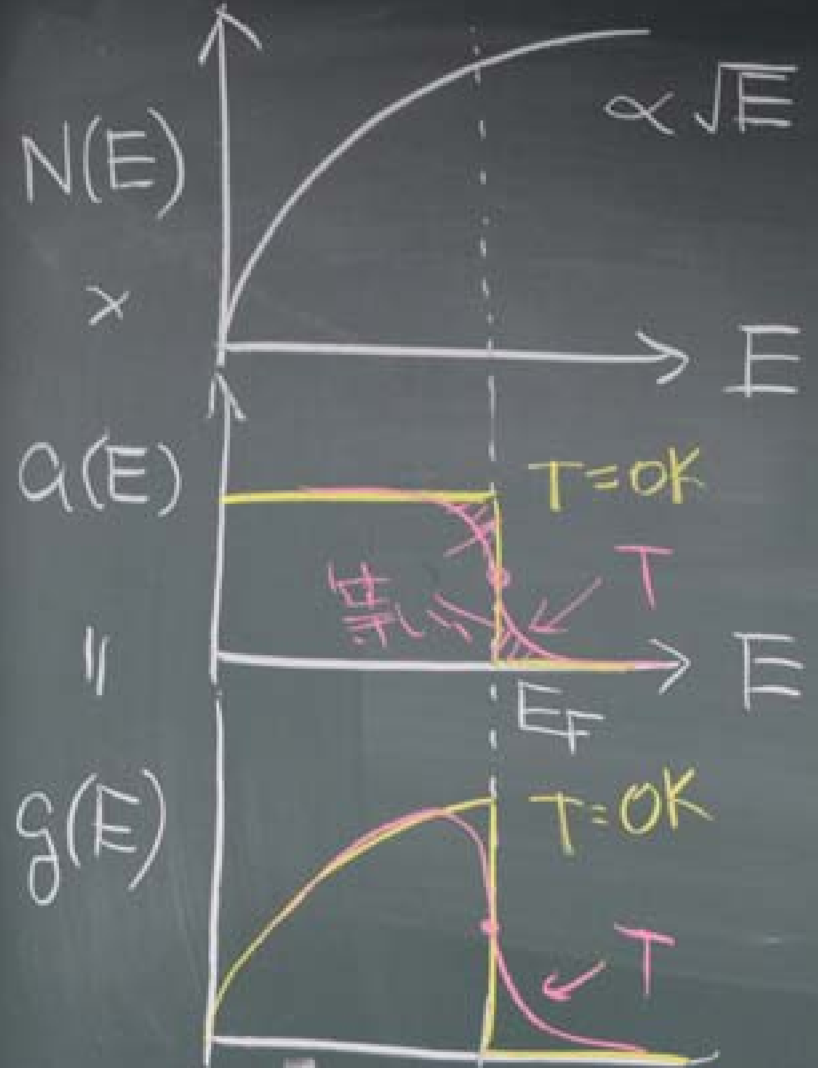
階段関数 $E > E_F$ で 0，$E < E_F$ で 1

$T =$ 有限

$E = E_F$ のとき $\frac{1}{2}$

$E \gg E_F \quad a(E) \sim \dfrac{1}{\exp(E - E_F)}$ ボルツマン分布と一致





$$\int_0^\infty g(E)\,dE = N$$

規格化（E_F 決定）

電子の総数

$$\int_0^\infty N(E)\,a(E)\,dE$$

(2.70)

T=0Kのとき
$$\int_0^{E_F} N(E)\,dE = N$$

$\langle E \rangle$は

T↑ $\langle E \rangle$↑ E_F 一定だと

電子数増えてしまう!!

T↑したら E_F↓ する.

$$E_{f0} = \left(\frac{h^2}{2m}\right)\left(\frac{3N}{8\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (T=0K)$$

$$E_F(T) = E_{F0}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_{F0}}\right)^2\right]$$

演習問題

2章　すべて範囲

1章　1, 2, 3, 4, 5, 8, 9,
10, 11, 13, 15, 16, 18, 19

除外 6, 7,
12, 14
17, 20,
21