量子力学の基礎
北野正雄 (京都大学大学院工学研究科)
kitano@kuee.kyoto-u.ac.jp　2007 年 10 月 16 日
この内容は京都大学工学部電気電子工学科における授業「電気電子工学のための量子論」の補助的資料として準備されたものです．個人使用以外の目的で利用される場合には著者の許諾を得てください．

第 2 章
量子の振舞

前章では光が微小なエネルギーの塊（光量子あるいは光子）であると考えざるをえない現象が 20 世紀冒頭に発見されたことを述べた．しかし, 光を単なる古典的な粒子だと考えてしまうと, 光が示すさまざまな波動現象を説明できなくなってしまう．この章では, 光の波動性と粒子性を両立させるためには, どのような考え方が必要かを考えてゆきたい．

2.1 微弱な光の検出 — フォトンカウンター

光子 1 個あたりのエネルギー $h\nu$ を求めておこう．簡単のために, $\lambda = 0.66\,\mu\mathrm{m}$ として,

$$h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6.6\times10^{-34}\,\mathrm{Js}\times\frac{3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}}{0.66\,\mu\mathrm{m}} = 3\times10^{-19}\,\mathrm{J} = 0.3\,\mathrm{aJ}. \tag{2.1}$$

a (アト) は 10^{-18} を表す．一方, レーザポインターや CD プレーヤーに使われているレーザの典型的な出力の大きさは 1 mW である．このようなレーザからは, 時間あたり $1\,\mathrm{mW}/0.3\,\mathrm{aJ} = 3\times10^{16}\,/\mathrm{s}$ ものおびただしい数の光子が放出されていることになる．

光電子増倍管 (フォトマルチプライヤー) やアバランシェフォトダイオード (APD) のような高感度光検出器は非常に感度が高く, 1 秒あたり光子が数個程度の微弱な光まで検出できる．

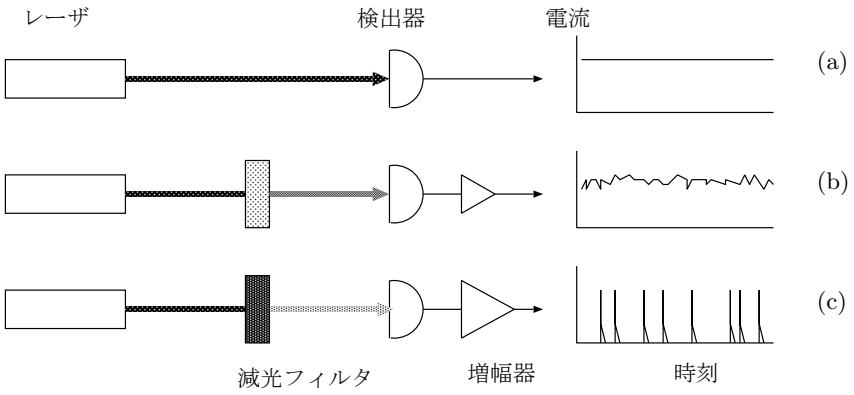

図 2.1　光検出

図 2.1 に光の検出の実験の概念図をしめす．一定のパワーの光を出し続けるレーザ光源からの光を可変減衰器を通して, 光検出器で検出する．光が比較的強い場合には, 光検出器からは光強度に比例した一定の電流が出力される [図 2.1(a)]．しかし, 光のパワーを弱くしてゆくと, 光検出器の出力電流はゆらぐようになり [図 2.1(b)], ついには, ポツポツとパルス的に出力される離散的な電流になる [図 2.1(b)]．パルスが出力されるタイミングはランダムであり, もとのレーザ光のパワーが完全に一定になるよう調整されている場合でも, 粗密が生じる．

一定の時間間隔 Δt ごとに, その時間に含まれるパルスの数 n を計数して, ヒストグラムを作成すると, その相対確率の分布は

$$P(n) = \mathrm{e}^{-N}\frac{N^n}{n!} \tag{2.2}$$

に近づくことが知られている．$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$ である．

これはポアソン分布とよばれるもので, 電話の到来数など多くの現象に共通して見られるものである．平均と標準偏差を求めると,

$$\langle n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = N, \quad \sigma = \sqrt{\langle (n-\langle n\rangle)^2\rangle} = \sqrt{N} \tag{2.3}$$

となる．平均値 N が決まると標準偏差 $\sqrt{N}$ が自動的に決まることに注意する．相対的なゆらぎ

$$\frac{\sigma}{\langle n\rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{2.4}$$

も平均値 N だけできまる．

ポアソン分布は 2 項分布

$$P_{\mathrm{b}}(n) = {}_mC_n p^n (1-p)^{(m-n)} \tag{2.5}$$

に対して $p \to 0$, $m \to \infty$, $mp \to N$ の極限をとって得られる分布である．す

なわち, 非常にまれな事象 (確率 p) を多数 (m) 回独立試行した場合の成功回数 n の分布である. 具体的に計算すると,

$$
\begin{aligned}
P(n) &= \lim_{m\to\infty,\, p=N/m} p_{\mathrm{b}}(n) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\left(\frac{N}{m}\right)^n \left(1-\frac{N}{m}\right)^{m-n} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{m^n}\frac{N^n}{n!}\left(1-\frac{N}{m}\right)^m \left(1-\frac{N}{m}\right)^{-n} \\
&\to 1\cdot\frac{N^n}{n!}\mathrm{e}^{-N}\cdot 1 \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

問題 2.1 平均が 0.1, 1, 10, 100, 1000 の場合のポアソン分布を図示せよ.

検出器の効率を η とすると, 光パワー I と平均パルス数 N の間には

$$N = \eta\frac{I\Delta t}{h\nu} \qquad (2.7)$$

という関係が成り立つことが想像される. 実際の検出器において, この関係はよく確かめられている. このように微弱な光の検出においては, 離散性を考慮する必要があり, またそれに伴って分布関数といった確率的な考え方が必要になることが明らかになった.

このような離散性や確率性の起源を検出器に負わせることも原理的には可能であるが, さまざまな実験事実や, 上の式に検出器のパラメータが (η を除いて) 含まれないことから, 光が本質的に持っている性質の反映だと考える方が自然である. 通常, 光パワーとして扱っている量 I は時間あたりの平均パルス数 $N/\Delta t = I/h\nu$, すなわちパルスの出現確率を与えている. また, 検出パルス数という検出器寄りの名称を改めて, 検出光子数あるいは単に光子数とよぶことにする.

2.2 量子サイコロ — ビームスプリッタ

一定パワーの光ビームの時間あたりの光子数が, ポアソン分布にしたがうことを前節で述べた. 平均数が N の場合には標準偏差が自動的に $\sqrt{N}$ に定まり, N が小さい場合にはゆらぎが目立つことが明らかになった.

しかし, 近年になって, 量子光学の技術を用いて, このゆらぎを抑圧することが可能になってきた. 光子数スクイーズ状態または単一光子光源と呼ばれるものである. 図 2.2(a) のように, 検出器で受けると一定間隔 T でパルスが出力されるような理想的な光ビームが準備できたとしよう. このような規則性のある光ビームをビームスプリッタに通して 2 つに分けてみよう. ビームスプリッタは半透鏡ともよばれ, 光の一部分を透過, 残りは反射させる働きがある. ここでは簡単のために光のパワーをちょうど半分ずつに分ける, 反射率 50% のビーム

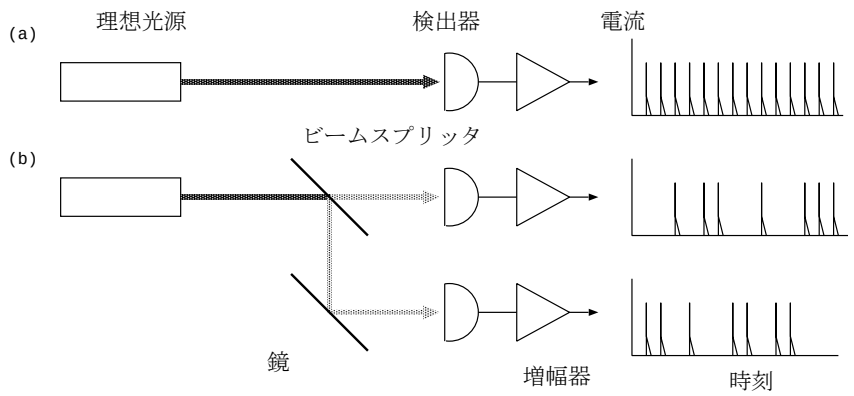

図 2.2　量子サイコロ

スプリッタを考える [図 2.2(b)]. 光検出器を 2 台準備し, 透過光と反射光のそれぞれを測定する. パワーが半分になるので, パルスの発生頻度も半分になるはずである. しかし, $2T$ 間隔で規則正しく出力されるのではなく, T ごとに 2 つの検出器のどちらがランダムに選択される形でパルスが出力されるようになる.

00101100100111...	透過側検出器	
11010011011000...	反射側検出器	(2.8)

つまり, 各パルスがどちら側に出るかを, いちいちコイン投げで決めるような状態になっている. たとえ秩序だった光を出す光源を用いても, 光を分岐させたり, 減衰させたりすると, 不規則性があらわになってくる. この現象はまったく制御あるいは予測不可能であるので, 乱数発生に利用することができる.

問題 2.2 十分多くの数のビームスプリッタを透過した後の光を検出すると, ポアソン分布が得られることを示せ.

2.3　光子の偏光

ここまでは, 光の粒子性とその確率的振舞に注目してきたが, これからは波動性との両立について考えて行こう. 光の偏光について考える. 偏光は電磁波がベクトル的な波動であることの反映である. 波の特徴である重ね合わせを用いて, 異なった偏光を重ねることで, 新しい偏光を作ることができる. たとえば, 位相の揃った水平偏光 (H) と垂直偏光 (V) を同じ重みで重ね合わすと 45° の偏光 (D) をつくることができる. また, 直線偏光子を用いて, その透過軸方向の成分を取り出すことができる. その際, 光のパワーは

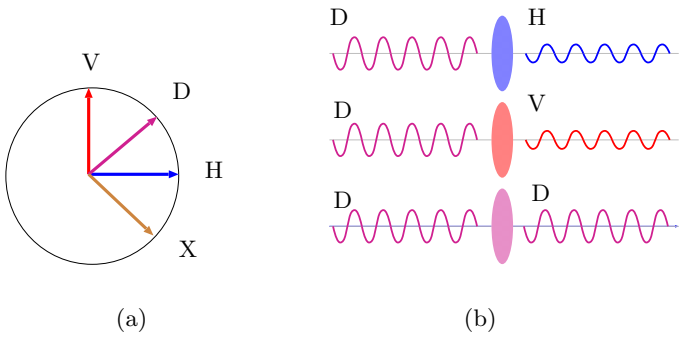

図 2.3　光波の偏光. (a) 0°, 90°, 45°, −45° の直線偏光をそれぞれ, H, V, D, X 偏光 と呼ぶことにする. (b) D 偏光を, H 偏光子に通すと, 波の振幅は $1/\sqrt{2}$ に減少する. したがって, パワーは 1/2 になる. 透過後は H 偏光に変化している. V 偏光子でも同様である. D 偏光子の場合は 100%透過し, 偏光は保存される.

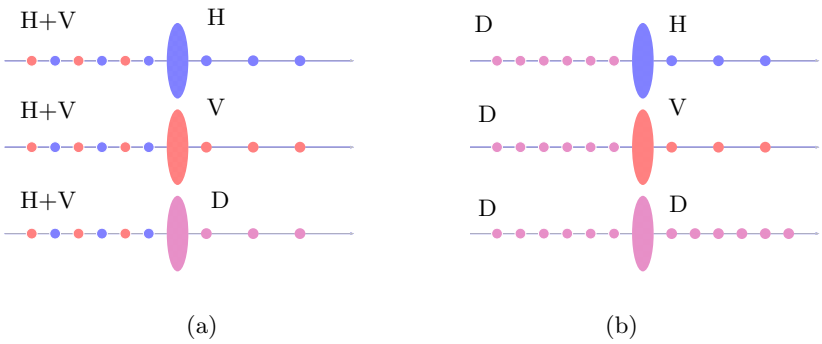

図 2.4　光子の偏光

$$I_{\mathrm{out}} = I_{\mathrm{in}} \cos^2(\theta - \theta_{\mathrm{pol}}) \tag{2.9}$$

のように減少する. θ は入射偏光の偏光方向, θ_{pol} は偏光子の透過軸の方向である. これは, 入力電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}$ が透過軸方向 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{pol}}$ に射影されたもの $\boldsymbol{E}_{\mathrm{out}} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{pol}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}$ が出力の電場となるからである.

図 2.3(b) のように 45° 方向の偏光 (D 偏光) をもったビームを透過軸が水平 (H), 45°, 垂直 (V) 方向に設定された偏光板を透過した場合を考えよう. 透過パワーに注目すると, D 偏光板は 100%透過するのに対して, H, V 偏光板は 50%しか透過しない. これは波の振幅が $\cos 45° = 1/\sqrt{2}$ に減少したということで説明できる.

この様子を粒子的な描像で考えてみよう [図 2.3]. D 偏光板の場合は, すべての粒子が透過するが, H, V の場合には半数の粒子が透過しているはずである. つまり確率 1/2 で透過するということである. 個々の光子が通過するかしないかは, どのようにして決定されるのであろうか?

D 偏光の光は, H 偏光と V 偏光の重ね合わせなので, H 偏光の光子 (H 光子)

と V 偏光の光子 (V 光子) が半分ずつ含まれていると考えてはどうだろう [図 2.3(a)]. H 偏光板の場合, H 光子はすべて透過, V 光子は全て阻止されるので, ちょうど半分の光子が透過することになる. V 偏光板の場合も同じである. これで問題解決のように見える. ところが D 偏光板に対して困った状態になる. H 偏光が D 偏光板を透過する確率, V 偏光が D 偏光板を透過する確率はいずれも 1/2 のはずなので, H 光子と V 光子が半分ずつからなる光子の流れは 1/2 に減衰することになる. これは図 2.3(b) の状況とは異なってしまう.

D 偏光板をすべての光子が通過するということは, 各光子が D の偏光をもっていると考えざるを得ない. これを D 光子とよぶことにしよう. D 光子が H 偏光板に入射すると, 1/2 の確率でランダムに透過するということ認めなければならない. つまり, 透過するか否かを決める要因は光子にも偏光板にも存在せず, その都度コイン投げをするかのように, 確率的に事象が起こるということである. さらに, H 偏光板を通過した D 光子は H 光子に変身していると考える必要がある. それは, 下流にもう一枚 H 偏光板を入れると, それを 100%の確率で透過するからである.

注意しないといけないのは, 「H 偏光板を通過した D 光子は, 実は最初から H 光子であったのだ」という考えはうまくゆかないということである. それでは図 2.3(a) に戻ってしまうからだ.

ここで量子論の奇妙な性質があらわになった.

1. コインなげのような本質的に確率的な過程が存在する.
2. しかし, 確率的な要素が現れない場合もある. (D 光子を D 偏光板に入れると 100%通過, X 偏光板に入れると 100%遮断される.)
3. 確率的な過程の後に状態 (偏光) が (確定的に) 変化する.

コインなげの場合には, 初期状態を精密に知ることができれば, 運動方程式を解くことで, 結果を予測することは可能であるが, 量子論の場合はそのような手だてはない. D 偏光は D 偏光板, X 偏光板に対しては, 確定的に振る舞うが, その他の偏光板に対してはランダムさを見せる. これも古典的には考えにくい状況である.

アインシュタインは量子論に現れたこの確率性を嫌った. 物理世界を記述するもっとも基本的な法則に確率などが入る余地はない考えたからである. それはニュートン的世界観, つまり初期値が定まれば, 微分方程式を解くことで, 未来が (あるいは過去をも) 確実に予測できるという信念に反するからである. (実際, 天体の運動方程式を解くことで, 1000 年以上も前の日蝕の日時や場所をいいあてることができるのである.) しかし, よい代案を考え出せず, 「神はサイコロを振らない」と負け惜しみをいったのであった[*1)].

*1) とはいえ, 勝敗が決まったわけではない. 確率性を取り除く試みは多くなされている. 特に Everett の多世界解釈 (many-worlds interpretation) は支持者が多い.

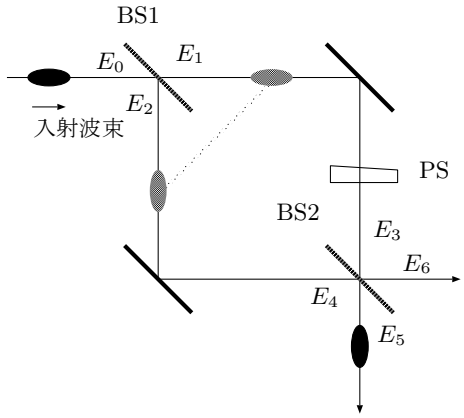

図 2.5　マッハツェンダー干渉計による光子の干渉

その後も, 偏光板を「通る」, 「通らない」を決定する因子が光子に付随しているに違いないと考え, それを探索する試みが多くの研究者によって行われた. しかし, これらのほぼすべてが, Bell の不等式 (13.10 節参照) という判別基準を利用して却下されている.

結論的には, 「θ 方向に偏光した光子が, 透過軸が Θ 方向に設定された偏光板を通過する確率は $\cos^2(\theta-\Theta)$ である.」また, 「光子が透過した場合には必ず Θ 方向に偏光した光子に変換される.」ということがいえる. そして, 「個々の光子が通過するか, しないか, に関しては何もいえない.」

2.4　光子の干渉

光子は波動としての性質も持っている. したがって, 粒子性と波動性の両立を考える必要がある. 偏光は波のしての性質の現れであるが, ここではより直接的な波の性質に注目しよう. 図 2.4 はマッハツェンダー干渉計とよばれる装置である. 2 枚の半透鏡（ビームスプリッタ; BS1, BS2）と 2 枚の全反射鏡からなっており, 光線を 2 つの光路に分け, ふたたび合流させるようになっている. 一方の光路には位相をずらすための移相板が置かれている. まず, 光を波と考えてその動作を確認しておく.

一つめのビームスプリッタ 1 直前の電場を複素振幅 E_0 で表す. ビームスプリッタで分けられた直後の電場は $E_1 = E_0/\sqrt{2}$, $E_2 = E_0/\sqrt{2}$ と表すことができる. パワーが 2 分されるので振幅は $1/\sqrt{2}$ になるのである. ふたつめのビームスプリッタ 2 で合流する直前の電場は, それぞれ, $E_3 = E_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}$, $E_4 = E_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}$ と表される. ϕ_1, ϕ_2 はそれぞれの光路での位相ずれである. ビームスプリッタ 2 の作用は

$$E_5 = \frac{E_3 + E_4}{\sqrt{2}}, \quad E_6 = \frac{E_3 - E_4}{\sqrt{2}}, \tag{2.10}$$

と表すことができる*2). パワーの保存 $|E_3|^2 + |E_4|^2 = |E_5|^2 + |E_6|^2$, が成り立っていることに注意する. それぞれの出口のパワーは

$$|E_5|^2 = \frac{|E_0|^2}{2}(1+\cos\phi), \quad |E_6|^2 = \frac{|E_0|^2}{2}(1-\cos\phi), \tag{2.11}$$

に比例する. 位相差 $\phi = \phi_1 - \phi_2$ に依存して, 2 つの出口にパワーが配分されることが分かる. 移相板を調整した ϕ を変化させると, $|E_5|^2$, $|E_6|^2$ は 0, $|E_0|^2$ の間で相補的に振動する. これは干渉縞の一種である.

ここでは移相板 (PS) を調整して $\phi = 0$ として, 光路 5 の側に全パワーが現れるようにしておこう. この状態で, 干渉計に入射する光をずっと弱くして, 光子が 1 つずつ入ってくる状態にしてみよう. もし, 位置 1, 2 に光検出器を挿入すると, 必ずどちらか片方の検出器が光子を検出し, 両方同時に検出することはない. つまり, 光子は最小単位なので分割されて 2 つの光子になることはないのである. では, 入射光子はビームスプリッタで確率 1/2 で光路 1, 2 にランダムに振り分けられているのだろうか. とりあえず, そう仮定して議論を進めよう. 光路 1 の方に光子が入った場合, この光子は 2 つめのビームスプリッタ (BS2) で再度確率 1/2 で光路 5, 6 に振り分けられる. 光路 2 に入った場合も同様である. したがって, 干渉計全体として見た場合, (ϕ に無関係に) 入射光子の半分が光路 5 に, 残りの光路 6 に現れることになる. 光子レベルでは干渉がおきないという奇妙な結果になってしまった.

干渉が生じるためには光路 3, 4 の両方から波が入ってくる必要がある. したがって, BS1 で光子がどちらか一方の光路に排他的に振り分けられるのではなく, 両方に分配されると考えざるを得ない. ただし, 1 つの光子が 2 個の光子になるはずがないので, それぞれの光路にあるのは検出される確率が 1/2 の「灰色」の光子であって, 光路 1,2 の 2 つの「灰色」の光子を合わせて, 一人前の光子だと思うのである. BS2 ではこの 2 つの「灰色」光子が光路 5 に足し算されて現れて一人前の光子として, 確率 1 で検出され, 光路 6 で引き算されて消えてしまうことになる. 光路 1,2 の 2 つの「灰色」の光子は独立なものではなく, 一方が検出された場合には他方は決して検出されないという強い相関をもっている.

光子というものは, 通常の意味での粒子とは大きく異なっており, 「灰色化」することにより, 空間, 時間的に広がりを持つことができる. 「検出される可能性」が波動の性質をもっており, 分割されたり, 合成されて干渉したりすることができる. しかし, 通常の波とは異なっていて, ある時刻にどこかで検出されると, 全体が消えてなくなってしまうのである.

---

*2) 一般には, $E_5 = (E_3 + \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\beta}E_4)/\sqrt{2}$, $E_6 = (\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\beta}E_3 + E_4)/\sqrt{2}$ である. β は入出力の基準位置の決めかたによるパラメータである. ここでは, $\beta = -\mathrm{i}$ とした.

光子レベルのヤングの干渉実験

前節で説明した光子の干渉はヤングのダブルスリットの実験においても見られる. 1つの光子が灰色化して両方のスリットを通過して, スクリーンで干渉し, 強めあう場所では高い確率で, 弱めあう場所では小さい確率で検出される. 特に, 完全に打ち消される場所では, 全く検出されない.

デモ実験の動画が下記のウエッブサイトにある.

http://www.physique.ens-cachan.fr/franges_photon/interference.htm

最初はランダムに打たれているように見えている点々から, 縞模様が浮かびあがってくる. スリットの一方を閉じるとこのような縞模様は現れない.

問題 2.3 一方のスリットに減光フィルターを入れて, パワーを減らした場合, 干渉縞はどのようになるか.

問題 2.4 一方のスリットに偏光を回転する素子を入れて, 偏光を 90° 回転させると, 干渉縞はどのようになるか.

参考文献

高橋 康: 古典場から量子場への道 (講談社, 1979).