正弦波の電力–すなわち複素電力について

北野正雄

平成 19 年 3 月 30 日

1　いろいろな電力の定義

直流の場合の電力 P は, 電圧を E, 電流を I とすると, $P = EI$ と簡単に表すことができる. 正弦波 (交流) の場合にはやや複雑になる.

正弦波を扱う上で, 複素振幅すなわちフェーザは非常に有効な概念である. フェーザの導入に伴って電力も複素数で表されるようになる. たとえば, 平均電力は $\tilde{E}\tilde{I}^*$ の実部であるとされているが, この物理的な意味について考えてみる. また, その虚部は無効電力と名付けられているが, その意義に関しても考察する.

正弦波電圧を $e(t)$, 電流を $i(t)$ と表す;

$$e(t) = 2^{-1/2}(\tilde{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \tilde{E}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}), \quad i(t) = 2^{-1/2}(\tilde{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \tilde{I}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}), \tag{1}$$

ただし, $\tilde{E} = E\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_E}$, $\tilde{I} = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_I}$ は複素振幅 (phasor) である.

時刻 t における瞬時電力 $p(t)$ は,

$$p(t) = e(t)i(t) = 2^{-1}(\tilde{E}\tilde{I}^* + \tilde{E}^*\tilde{I}) + 2^{-1}(\tilde{E}\tilde{I}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t} + \tilde{E}^*\tilde{I}^*\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega t}) \tag{2}$$

であり, 変形すると

$$\begin{aligned} p(t) &= P_\mathrm{A}\cos(\phi_E - \phi_I) + P_\mathrm{A}\cos(2\omega t + \phi_E + \phi_I) && (3) \\ &= P + P_\mathrm{A}\cos 2\left(\omega t + \frac{\phi_E + \phi_I}{2}\right) && (4) \end{aligned}$$

となる. $P_\mathrm{A} = EI$ は皮相電力あるいは, 見かけの電力と呼ばれる.

右辺 1 項は時間変化しない成分で, 電力の平均値を表している. 実際, 電力 $p(t)$ の時間平均 (1 次モーメント) をとると, 2ω の項は消えて,

$$\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = P \tag{5}$$

ここで, $P = P_\mathrm{A}\cos(\phi_E - \phi_I) = \mathrm{Re}\,\tilde{E}\tilde{I}^*$ は有効電力とよばれる量である.

右辺 2 項は 2ω で振動する成分になっている. その振幅は, P_A である.

電流と電圧が同位相または逆位相 ($\phi_E - \phi_I = n\pi$, n: 整数) の場合には, $P_\mathrm{A} = |P|$ であり, 式 (4) から, $p(t)$ の符号が変化することはない. すなわち, 電力の大きさは, 大きく振動しているが, 電力は常に 1 方向に流れている.

ところが, $\phi_E - \phi_I \neq n\pi$ の場合には, $P_\mathrm{A} > |P|$ であり, $p(t)$ の符号が時間とともに変化する. ここでは, 電力の一部が往復していることになる. 戻りの電力は, 半周期前の電力の正のピーク付近で

名称	定義	単位
瞬時電力	$p(t) = e(t)i(t)$	W
皮相電力	$P_\mathrm{A} = \lvert\tilde{E}\rvert\lvert\tilde{I}\rvert$	W, VA (非 SI)
有効電力	$P = \mathrm{Re}\,\tilde{E}\tilde{I}^*$	W
無効電力	$Q = (-)\,\mathrm{Im}\,\tilde{E}\tilde{I}^*$	W, VAR (非 SI)

表 1: 正弦波に対するさまざまな電力

負荷側に蓄えられたものである. この状況では, 平均電力 P の輸送に対応する振動振幅 ($|P|$) 以上に過剰に変動している.

変動を調べるために, 瞬時電力 $p(t)$ の 2 次の中心モーメント (分散) を求める;

$$\frac{1}{T}\int_0^T [p(t) - P]^2 \mathrm{d}t = \frac{P_\mathrm{A}^2}{2} = \frac{P^2 + P_\mathrm{A}^2 - P^2}{2} = \frac{P^2 + Q^2}{2} \tag{6}$$

となる. ただし, $Q = \sqrt{P_\mathrm{A}^2 - P^2}$. とおいた. Q は過剰な変動分を表しており, 無効電力と呼ばれる.

$Q = P_\mathrm{A}\sin(\phi_E - \phi_I) = \mathrm{Im}\,\tilde{E}\tilde{I}^*$ と表すこともできる. さらに, 形式的に

$$P_\mathrm{c} = \tilde{E}\tilde{I}^* = P + \mathrm{j}Q \tag{7}$$

などと表し, P_c を複素電力と呼ぶこともあるが, 通常の複素振幅 (phasor) と物理的な意味が異なるので, 注意が必要である. たとえば, P_c の位相 $\phi_E - \phi_I$ は, $p(t)$ の振動位相 [式 (4) 参照] と直接の関係がない[1]. また, Q の符号の与え方にも任意性がある.

無効電力の別の導入法 (標準的)　式 (2) に戻る. $\tilde{E}\tilde{I}$ の部分を変形する.

$$\tilde{E}\tilde{I} = EI\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_I} = P_\mathrm{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_I - \phi_E)}\mathrm{e}^{2\,\mathrm{j}\phi_E} = P_\mathrm{A}[\cos(\phi_I - \phi_E) - \mathrm{j}\sin(\phi_I - \phi_E)]\mathrm{e}^{2\,\mathrm{j}\phi_E} = (P - \mathrm{j}Q)\mathrm{e}^{2\,\mathrm{j}\phi_E} \tag{8}$$

これより,

$$p(t) = P + P\cos(2\omega t + 2\phi_E) - Q\sin(2\omega t + 2\phi_E) \tag{9}$$

または,

$$p(t) = P + P\cos(2\omega t + 2\phi_I) + Q\sin(2\omega t + 2\phi_I) \tag{10}$$

2　無効電力を考える意義

前節で述べたように, 無効電力は電力の供給元と供給先の間を, 電源周期の倍の周期で往復している電力である. 無効電力が大きくても, 平均電力 (有効電力) が輸送されていれば原理的には何の問題もない. しかし, 電源, 伝送路, 負荷が不完全で損失がある場合には大いに問題が生じる. たとえば, 伝送線に抵抗がある場合には, 無効電力の往復に伴う余分なエネルギー損失が生じることになる[2]. したがって, 電力伝送では電流と電圧の位相が一致するような工夫を行ない, 無効電力を 0 に近づけることが重要な課題になる.

[1] $p(t)$ の符号が逆転している区間の位相角を求めてみよ.

[2] 子供をおつかいに出すのに 1 万円を持たせる状況を考えるとよい. おつりが, 9900 円戻ってくれば原理的には何の問題もないのだが, 道中のリスクを考えると, やはり最初から 100 円持たせるのが望ましい. 釣銭が無効電力に対応している.

例　電圧 $\tilde{E}$ の電圧源から, 抵抗 R の電線を通して負荷に電力を供給する状況を考えてみよう. 電圧の実効値 $E = |\tilde{E}|$ は一定であるとする. R は負荷のインピーダンスに比べて十分小さいと仮定する. 電線で消費される平均電力 P_{loss} は

$$P_{\mathrm{loss}} = \frac{1}{T}\int_0^T Ri(t)^2 \mathrm{d}t = RI^2 = \frac{R}{E^2}P_{\mathrm{A}}^2 \tag{11}$$

である. $I = P_{\mathrm{A}}/E$ を用いた. 負荷に供給される皮相電力と有効電力が等しい場合の, 電線での消費電力 P'_{loss} を差し引くと,

$$P_{\mathrm{loss}} - P'_{\mathrm{loss}} = \frac{R}{E^2}(P_{\mathrm{A}}^2 - P^2) = \frac{R}{E^2}Q^2 \tag{12}$$

となって, 無効電力の 2 乗に比例した過剰損失があることがわかる.

3　電力の単位

無効電力と皮相電力の単位として, W (ワット) を使用することを禁止し, 代わりに, var (volt-ampere reactive), VA (ボルトアンペア) をそれぞれ用いることを指示している教科書が多い. しかし, これらはいずれも SI(国際単位系) には含まれない非 SI 単位であるので, 注意が必要である. 国際単位系を尊重する立場からすれば, 無効電力, 皮相電力も W で測ることを許容すべきであろう.