画像処理論 レポート課題 1

平成 16 年 4 月 24 日

問題 1

離散的な直行座標系 (標本点を交点の変わりにピクセルの中心となるように格子を書き直すと正方格子になる) における D_4,D_8 を考える。ただし

$$D_4((x_1, y_1), (x_0, y_0)) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$$

$$D_8((x_1, y_1), (x_0, y_0)) = max(|x_1 - x_0|, |y_1 - y_0|)$$

座標軸が６０度で交わる離散的な斜交座標系 (標本点を交点の変わりにピクセルの中心となるように格子を書き直すと六方格子になる) を考え、そこでの D_6 を考える。ただし

$$D_6((x_1, y_1), (x_0, y_0)) = \frac{|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + |(x_1 + y_1) - (x_0 + y_0)|}{2}$$

点 $P_0 = (x_0, y_0)$ とし、P_0 から距離 d となる点の個数 N を求めよ。ただし答えだけでなく導出の式も示すこと。

1. 距離 $D_4 = d$ の時の点の個数 N_4,
2. 距離 $D_6 = d$ の時の点の個数 N_6,
3. 距離 $D_8 = d$ の時の点の個数 N_8

問題 2

離散的な直線を連続的な空間での直線の近似と考えると，直線上の任意の座標 (x, y) と離散的な格子点 (i, j) との Euclid 距離を 1 以下となるように制限をつけるのが妥当である．正方格子で 8 近傍としたときの 2 点が与えられたとき，その間を結ぶ離散的な線分を引くことを考える．

近傍の方向を次のように 0 から 7 の数字で表す．

点 $p_1, p_2, \ldots, p_j$ に対して，その点 p_j の近傍方向 $n(0 \leq n \leq 7)$ の点を付け加える操作を

$$p_1 p_2 \ldots p_j n = p_1 p_2 \ldots p_j p_{j+1}$$

と書くことにする．例えば原点に対して 113 を操作すると

$$(0,0)1^2 3 = (0,0)(1,1)(2,2)(1,3)$$

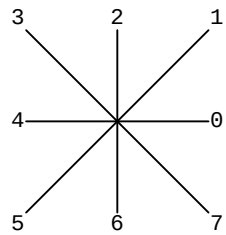

図 1: 8 近傍

となる．ここで同じ操作が継続するときはベキ乗の形式で記述している．

原点を一方の端点とした線分は 0 と 1 の間の方向，1 と 2 の間の方向，...，7 と 0 の間のどれかになる（境界も含むとする）．いずれの場合も同様なので，ここでは 0 と 1 の間の方向の場合，すなわち傾き a が $0 \leq a \leq 1$ であるとする．

問 1 この場合，原点を出発して他方の端点に連結するのに，操作 0, 1 の 2 種類で出来ることを示せ．

問 2 格子のサイズが 6×6 のとき（採り得る座標値が $(0,0)$ から $(5,5)$），0 と 1 の間の方向で離散的な線分がとり得る傾きを小さい方から順に記せ．

傾きが $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ のように，分子が 1，分母が正の整数のときは，それぞれの傾きの（微小な）線分を求める操作

$$1, 01, 001, \ldots$$

を繰り返せば得られる．また，明らかに傾きが 0 のときの線分は操作 0 を繰り返せば良い．それ以外の場合は傾き a は $0 < a < 1$ なので，格子のサイズが $n \times n$ のとき a は区間，

$$\frac{1}{1} > a > \frac{1}{2}, \frac{1}{2} > a > \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n-2} > a > \frac{1}{n-1}$$

のどれかに含まれる．すなわち，例えば

$$\frac{1}{i} > a > \frac{1}{i+1}$$

ならば，傾き $1/i$ と $1/(i+1)$ の微小線分の組み合わせで近似できる．この場合，連続的な線分と離散的な線分の差が 1 以内になる．

具体的に，このような微小線分列を生成するには**連分数展開による直線のチェイン符号生成法**が知られている．ここでいう連分数とは一般的な定義の連分数ではなく，次のような負の剰余を用いた連分数展開である．

p, q を $0 < p < q$ なる整数とし，p/q を既約な分数とする．Euclid の互除法的に計算を行い，剰余が 0 になるまで続ける．

$$\begin{aligned}
q &= s_1 p - r_1 \ (0 \leq r_1 < p) \\
p &= s_2 r_1 - r_2 \ (0 \leq r_2 < r_1) \\
r_1 &= s_3 r_2 - r_3 \ (0 \leq r_3 < r_2) \\
&\vdots \\
r_{m-2} &= s_m r_{m-1} - r_m \ (r_m = 0)
\end{aligned}$$

このとき，分数 p/q の連分数展開は

$$\cfrac{1}{s_1 - \cfrac{1}{s_2 - \cfrac{1}{s_3 - \cfrac{1}{\cdots - \frac{1}{s_m}}}}}$$

となる．これを

$$p/q = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$$

と表す．このとき線分を表す操作を次のように漸化的に生成する．

- $[s_m]$ に対する操作列は $0^{s_m-1}1$
- $[s_{i+1}, \ldots, s_m]$ での操作列が得られているとき $[s_i, s_{i+1}, \ldots, s_m]$ の操作列は $0 \to 0^{s_i-1}1$，$1 \to 0^{s_i-2}1$ と置換することで生成

問 3 上記のアルゴリズムを $[s_1, \ldots, s_m]$ まで繰り返して得られた線の傾きが p/q であることを示せ．

問 4 $5/7$ の離散的線分を生成する操作を求めよ．