

有限要素固体解析への Space-Time 法の適用

Application of Space-Time Method to Finite Element Analyses for Solids

Key words: Space-Time method, Moving mesh, Numerical analysis

施設機能工学分野 岡山 真人

1. はじめに

土の流亡によって進行する水利土質構造物の脆弱化は、現在でも予測が非常に困難な現象である。土の流亡は、低拘束圧下の土が浸透流などの作用を受け、流動化することで発生する。流動化した土は、大きな変位と材料の流亡を伴うため、通常の有限要素固体解析では計算が難しい。そこで本研究では、Space-Time 法によりムービングメッシュの使用を可能にすることで、大きな変位と材料の流亡を計算することを試みる。本論では、簡単な運動の解析を行い、Space-Time 法の適用性について検討を行う。

2. Space-Time 法

Space-Time 法とは、空間だけでなく時間方向にも有限要素を形成する方法である。図 1 に示すように、空間的には 2 次元の問題であっても、作成される要素は時間軸を加えた 3 次元となる。そのため、空間要素の形状が時間とともに変化する場合であっても、特別な制約なしに、時空間を要素分割することができる。このため、Space-Time 法を適用することで、ムービングメッシュが利用でき、境界形状が大きく変形するような問題においても有限要素法を適用可能にする。

2.1 理論

有限要素法では、対象空間をいくつかの要素に分割し、空間に関する形状関数 N_α を用いて物理量を節点ごとの値に離散化する。それに対し、Space-Time 法では、上述のように空間に加えて時間方向にも要素分割を行う。すなわち、 $t = t_i$ のとき $\theta = -1$ 、 $t = t_{i+1}$ のとき $\theta = 1$ となるような局所座標 θ を

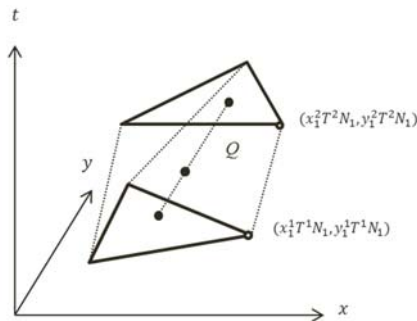


図 1 Space-Time 法の概要

用いて T^β という時間に関する形状関数を導入する。図 1 は一つの空間要素、一つの時間要素となる領域を表す。図 1 での下の三角形要素が $\theta = -1$ 、上の三角形要素が $\theta = 1$ に該当する。重み関数 w は $w = w_\alpha^\beta N_\alpha T^\beta$ となる。本論では、時間では一定時間ステップごとの要素分割を行い、空間では三角形一次要素での要素分割を行う。また、 N_α と T^β はともに一次関数を採用し、各物理量を線形で近似する。

2.2 支配方程式

解析対象とする土の運動中では、以下の方程式が成り立つものとする。

$$\dot{\rho} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (2)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^e \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) + w_{ik} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} w_{kj} \quad (3)$$

ここで、 ρ は固体の密度、 v_i は土の速度、 σ_{ij} は有効応力、 g_i は重力加速度、 D_{ijkl}^e は弾性係数マトリックス、 w_{ik} はスピントレンソルを表す。

2.3 定式化

式(1)~(3)のそれぞれの両辺に重み関数 w を乗じ、要素領域で積分する。要素領域とは本文では三角柱領域、図 1 での Q である。その際、 ρ と v_k 及び σ_{pq} を $\rho = \rho_i^j N_i T^j$ 、 $v_k = v_{k,i}^j N_i T^j$ 及び $\sigma_{pq} = \sigma_{pq,i}^j N_i T^j$ として節点ごとの値を用いて表し、支配方程式を定式化する。以下は定式化後の支配方程式であり、式(1)は式(4)、式(2)は式(5)、式(3)は式(6)となる。

$$A_1 - B_1 - C_1 + D_1 = 0 \quad (4)$$

$$A_2 - B_2 - C_2 - D_2 + E_2 - F_2 = 0 \quad (5)$$

$$A_3 - B_3 - C_3 - D_3 - E_3 - F_3 + G_3 + H_3 - I_3 = 0 \quad (6)$$

$$A_1 = \frac{d\theta}{dt} \int_{\Omega_x} N_\alpha N_i \delta_{2\beta} J^{ST} (1) dX \rho_i^2 \quad (7)$$

$$B_1 = \frac{d\theta}{dt} \int_{\Omega_x} N_\alpha N_i \delta_{1\beta} J^{ST} (-1) dX \rho_i^0 \quad (8)$$

$$C_1 = \frac{d\theta}{dt} \int_{-1}^1 T^j \left(\frac{dT^\beta}{d\theta} J^{ST} + \frac{dJ^{ST}}{d\theta} T^\beta \right) d\theta \int_{\Omega_X} N_\alpha N_i dX \rho_i^j \quad (9)$$

$$D_1 = \int_{-1}^1 T^\beta T^n T^k J^{ST} \frac{\partial X_l}{\partial x_i} d\theta \int_{\Omega_X} N_\alpha N_m \frac{\partial N_j}{\partial X_l} dX v_{i,j}^k \rho_m^n \quad (10)$$

$$A_2 = \frac{d\theta}{dt} \int_{\Omega_X} N_\alpha N_j N_i \delta_{2\beta} J^{ST} (1) dX v_{i,j}^2 \rho_i^2 \quad (11)$$

$$B_2 = \frac{d\theta}{dt} \int_{\Omega_X} N_\alpha N_j N_i \delta_{1\beta} J^{ST} (-1) dX v_{i,j}^0 \rho_i^0 \quad (12)$$

$$C_2 = \frac{d\theta}{dt} \int_{-1}^1 T^k \left(\frac{dT^\beta}{d\theta} T^n J^{ST} + T^\beta \frac{dT^n}{d\theta} J^{ST} + T^\beta T^n \frac{dJ^{ST}}{d\theta} \right) d\theta \int_{\Omega_X} N_\alpha N_j N_m dX v_{i,j}^k \rho_m^n \quad (13)$$

$$D_2 = \int_P N_\alpha T^\beta t_i |n_x| dP \quad (14)$$

$$E_2 = \int_{-1}^1 T^\beta T^n J^{ST} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} d\theta \int_{\Omega_X} N_m \frac{\partial N_\alpha}{\partial X_l} dX \sigma_{ij}^n \quad (15)$$

$$F_2 = \int_{-1}^1 T^\beta T^k J^{ST} d\theta \int_{\Omega_X} N_\alpha N_j dX g_i \rho_j^k \quad (16)$$

$$A_3 = \frac{d\theta}{dt} \int_{\Omega_X} N_\alpha N_r \delta_{2\beta} J^{ST} (1) dX \sigma_{ij,r}^2 \quad (17)$$

$$B_3 = \frac{d\theta}{dt} \int_{\Omega_X} N_\alpha N_r \delta_{1\beta} J^{ST} (-1) dX \sigma_{ij,r}^0 \quad (18)$$

$$C_3 = \frac{d\theta}{dt} \int_{-1}^1 T^q \left(\frac{dT^\beta}{d\theta} J^{ST} + \frac{dJ^{ST}}{d\theta} T^\beta \right) d\theta \int_{\Omega_X} N_\alpha N_p dX \sigma_{ij,p}^q \quad (19)$$

$$D_3 = \frac{1}{2} D_{ijkl}^e \int_{-1}^1 T^\beta T^q J^{ST} \frac{\partial X_m}{\partial x_i} d\theta \int_{\Omega_X} N_\alpha \frac{\partial N_p}{\partial X_m} dX v_{k,p}^q \quad (20)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} D_{ijkl}^e \int_{-1}^1 T^\beta T^q J^{ST} \frac{\partial X_m}{\partial x_k} d\theta \int_{\Omega_X} N_\alpha \frac{\partial N_p}{\partial X_m} dX v_{l,p}^q \quad (21)$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T^\beta T^q T^s J^{ST} \frac{\partial X_m}{\partial x_k} d\theta \int_{\Omega_X} N_\alpha N_r \frac{\partial N_p}{\partial X_m} dX v_{i,p}^q \sigma_{kj,r}^s \quad (22)$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T^\beta T^q T^s J^{ST} \frac{\partial X_m}{\partial x_i} d\theta \int_{\Omega_X} N_\alpha N_r \frac{\partial N_p}{\partial X_m} dX v_{k,p}^q \sigma_{ij,r}^s \quad (23)$$

$$H_3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T^\beta T^q T^s J^{ST} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} d\theta \int_{\Omega_X} N_\alpha N_r \frac{\partial N_p}{\partial X_m} dX v_{k,p}^q \sigma_{ik,r}^s \quad (24)$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T^\beta T^q T^s J^{ST} \frac{\partial X_m}{\partial x_k} d\theta \int_{\Omega_X} N_\alpha N_r \frac{\partial N_p}{\partial X_m} dX v_{j,p}^q \sigma_{ik,r}^s \quad (25)$$

ここに、 X_i は基準座標、 J^{ST} はヤコビアンであり、式(14)の領域 P とは領域 Q の側面領域を意味する。式(4)~(6)の連立方程式を解いて、節点ごとの ρ と v_k 及び σ_{pq} を算出する。

2.4 メッシュの更新

速度の定義より以下の式が成り立つ。

$$\dot{x}_i = v_i \quad (26)$$

式(4)~(6)を解き算出された v_i を、式(26)に代入し、節点ごとの土の移動距離を求める。節点の座標をその移動先の座標に更新し、新しいメッシュで支配方程式を解き直す。これを、更新先の座標が収束するまで繰り返す。

3. 数値解析結果

簡単な解析例として、一次元での弾性体の強制変位を解析する。

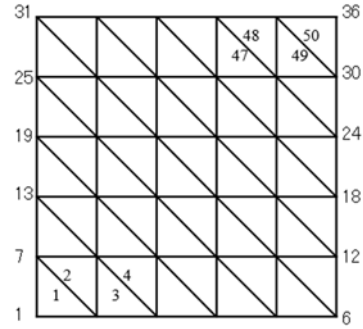


図2 設定メッシュ

図2のような1.0m四方の領域を50要素に分割する。紙面横方向を x 方向あるいは1方向、縦方向を y 方向あるいは2方向とする。 x 方向の変位を0に固定し、最下部の y 方向の変位も0に固定する。節点番号7~12には y 方向に -0.1×10^{-5} m/s, 13~18には y 方向に -0.2×10^{-5} m/s, 19~24には y 方向に -0.3×10^{-5} m/s, 25~30には y 方向に -0.4×10^{-5} m/s, 31~36には y 方向に -0.5×10^{-5} m/s の変位速度を与える。また、 ρ の初期値としてすべての節点に 2.0 g/cm³ を与える。ヤング率は 2.0×10^2 GPa, ポアソン比は0とし、時間ステップ間隔は 1.0×10^{-4} s とした。

計算機を用いて支配方程式を解いた結果、全節点において、 $\rho^1 = 2.0$ g/cm³, $\Delta\rho = 1.0 \times 10^{-6}$ g/cm³, $v_1^1 = 0$ m/s, $v_2^1 = 0$ m/s, $\sigma_{11}^1 = 0$ Pa, $\sigma_{11}^2 = 0$ Pa, $\sigma_{12}^1 = 0$ Pa, $\sigma_{12}^2 = 0$ Pa, $\sigma_{22}^1 = 0$ Pa, $\sigma_{22}^2 = -1.0 \times 10^{-4}$ Pa となった。なお、各未知数の右上の添字は時間ステップを表す。密度 ρ は初期値から $\Delta\rho$ だけ増加する結果となった。

4. 結論

算出された解は妥当性の高いものと言える。すなわち、本文ではSpace-Time法の有限要素固体解析への適用性を確認できた。

本論ではムービングメッシュを実行するに至らなかった。今後はこの結果を用いてメッシュを更新して計算を続ける。また、より複雑に境界の動く固体を対象とし、 x 方向の拘束も解放して研究を進める。