「行列教材問題」解答集（問 **1**〜問 **42**）

問 1. A　縦ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が表す平面の点 P_0 を x 軸で折り返した点を縦ベクトルで表せ.

答　$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

解説　x 軸で折り返すと，x 座標は変化せず，y 座標が符号を変えたものになります．よって，縦ベクトルの第 2 成分の符号を変えたものが答です.

B　同じ点 P_0 を方程式 $x = 1$ で与えられる直線を軸として折り返した点を縦ベクトルで表せ.

答　$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

解説　今度は y 座標は動かず，x 座標だけが変化します．折り返す値が 1 ということは，x 座標の値が x から x' に変化したとすると，x と x' の中点が 1 ということです．すなわち

$$\frac{x + x'}{2} = 1$$

となるので，$x = 2$ であれば $x' = 0$ です.

問 2. A　縦ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が表す平面の点 P を方程式 $y = x$ で与えられる直線を軸として折り返した点を縦ベクトルで表せ.

答　$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$

解説　直線 $y = x$ での折り返しは，x 座標と y 座標の入れ替えです.

B　同じ点 P を方程式 $y = x - 1$ で与えられる直線を軸として折り返した点を縦ベクトルで表せ.

答　$\begin{pmatrix} b+1 \\ a-1 \end{pmatrix}$

解説　(x, y) が $y = x - 1$ を満たせば $(X = x - 1, Y = y)$ によって新しい座標に移ると $X = Y$ を満たします．すなわち，こちらの座標では，折り返しは，問題 A の場合に一致します．したがって，$(x, y) = (a, b)$ すなわち $(X, Y) = (a - 1, b)$ を折り返した点は $(X, Y) = (b, a - 1)$ すなわち $(x, y) = (X + 1, Y) = (b + 1, a - 1)$ です.

補足 1. n 次元 Euclid（ユークリッド）空間における折り返しを次のように定義する．$n = 2$ の平面の場合も，数学的にきちんと扱うならば，ここで述べるやり方になる.

まず $\mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{x} = {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ に内積を入れる.（内積がはいったものを Euclid 空間と呼ぶ.）すなわち，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ を 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積と呼ぶ．ベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さを $|\boldsymbol{x}| \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ と定義する．$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{0}$ でないことと $\boldsymbol{x}$ の長さが 0 でないことは同値である．$\boldsymbol{0}$ でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の間の角度 θ を $|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos\theta = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ によって定義する.（$0 \leq \theta \leq \pi$ である.）特に $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が直交するのは $\theta = \pi/2$ すなわち $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ のときである.

$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{v}$ と直交するベクトルの全体 $H_{\boldsymbol{v}} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = 0\}$ を $\boldsymbol{v}$ に直交する超平面と言う．超平面 $H = H_{\boldsymbol{v}}$ による折り返し S_H とは次の式で定義される $\mathbb{R}^n$ の変

換である．

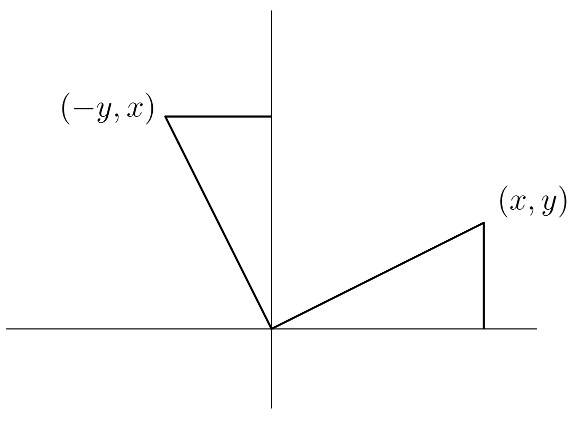
$$S_H(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}$$

この定義から，$\boldsymbol{x} \in H$ ならば，$S_H(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ であることと $S_H(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$ がしたがう．すなわち，超平面の上の点は動かず，H と直交するベクトル $\boldsymbol{v}$ は $-\boldsymbol{v}$ に折り返される．以下のことを確認しておくとよい．

- S_H は線形である．
- 内積は折り返しで不変，すなわち $(S_H(\boldsymbol{x}), S_H(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

さらに，問題 **B** を折り返しのこの定義を使って解いてみることを勧める．次の問題も解けるようになっているはずである．
平面の直線 $x + 2y = -1$ で点 (a, b) を折り返した点を求めよ．

問 3. A　縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が表す平面の点を．原点の周りで反時計回りに $\pi/2$（90°）回転した点を縦ベクトルで表せ．
答　$\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$
解説　絵を描いてみると明らかです．



B　方程式 $ax + by = c$ で与えられる直線を原点の周りで $\pi/2$ 回転して得られる直線の方程式を求めよ．
答　$bx - ay = -c$
解説　(x, y) が $ax+by = c$ を満たすとき，回転した点の座標 $(x' = -y, y' = x)$ がどんな等式を満たすかが問題です．これは $x = y', y = -x'$ と解き直して，条件を書いてやると $ay' + b(-x') = c$ となります．よって x', y' をもう一度 x, y に置き換えて書けば，$ay - bx = c$ が回転した直線を表す方程式であることになります．

問 4. A　ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

このとき $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線形結合に表せ．

答　$\boldsymbol{e}_1 = \frac{2}{3}\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_2 = -\frac{1}{3}\boldsymbol{v}_1 + \frac{2}{3}\boldsymbol{v}_2$
B　$x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線形結合に表せ．
答　$\dfrac{2x-y}{3}\boldsymbol{v}_1 + \dfrac{2y-x}{3}\boldsymbol{v}_2$
解説　**A** の結果を使って次のように計算します．

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 &= x\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_2\right) + y\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{v}_1 + \frac{2}{3}\boldsymbol{v}_2\right) \\ &= \frac{2x-y}{3}\boldsymbol{v}_1 + \frac{2y-x}{3}\boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

問 5. A　縦ベクトル $\begin{pmatrix} x^2-1 \\ 2x \end{pmatrix}$ を定数ベクトル（成分が実数であるようなベクトル）の線形結合で係数が $x^2, x, 1$ となるように表せ．
答　$x^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
B　次の等式が成立するような実数 a, b, c を求めよ．

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)x(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

答　$a = \frac{3}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}$
解説　両辺に $x-1$ を掛けてから，$x = 1$ とおくと右辺では a となります．左辺でも同じことをやると $3/2$ が得られます．他も同様です．

問 6. A　次の線形結合を 1 個の縦ベクトルとして表せ．

$$(x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y+z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (z+x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

答　$\begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+2y+z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$
B　複素数 ω は $\omega^3 = 1$ を満たすとする．このとき次の等式が成り立つように係数 a, b, c を決めよ．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

答　$a = \omega^2, b = \omega, c = x + \omega^2 y + \omega z$
解説　左辺を書き直すと

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ a \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって，ここでさらに $a=\omega^2, b=\omega$ とおくと，この式に現れる 3 本のベクトルがすべて右辺のベクトルの定数倍になる．すなわち，その場合の左辺は

$$x\begin{pmatrix}1\\ \omega\\ \omega^2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}\omega^2\\ 1\\ \omega\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}\omega\\ \omega^2\\ 1\end{pmatrix}=(x+\omega^2 y+\omega z)\begin{pmatrix}1\\ \omega\\ \omega^2\end{pmatrix}$$

である．

問 7. A　縦ベクトル $\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}$ が縦ベクトル $v_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ と $v_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ の線形結合になるための条件を求めよ．
答　$-x+2y=1$
解説　$\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2$ とおくと $a+b=1, a-b=x, a=y$ が得られる．これから $a=y, b=y-x$ であり，$a+b=1$ に代入して $2y-x=1$ となる．
B　空間の 3 点 $(1,2,0),(1,0,-1),(0,1,-1)$ を通る平面を H とする．点 $(1,a,b)$ が H の上にあるための条件を求めよ．
答　$-a+2b=-2$
解説　$(0,1,-1)$ を原点に取り直して考える．すなわち位置ベクトル $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ を考える．点 $(1,a,b)$ が H の上にあるための条件はベクトル $\begin{pmatrix}1\\ a\\ b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ a-1\\ b+1\end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合になることである．**A** から条件は $-(a-1)+2(b+1)=1$ すなわち $-a+2b=-2$ である．

問 8. 平面の点 $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ を原点を中心に角度 $\pi/3$ 回転した点を求めよ．
答　$(0,1)$
解説　$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=R_{\pi/6}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ なので，$R_{\pi/3}(\boldsymbol{v})=R_{\pi/3+\pi/6}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=R_{\pi/2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

問 9. 平面の点 $(1,2)$ を点 $(2,1)$ を中心として反時計回りに角度 $\pi/4$ 回転した点を求めよ．
答　$(2-\sqrt{2},1)$
解説新しい座標 $(X,Y)=(x-2,y-1)$ に移行すると回転の中心が $(X,Y)=(0,0)$ になる．よって，$(X,Y)=(1-2,2-1)=(-1,1)$ の行き先は

$$R_{\pi/4}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4)\\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

元の座標に戻すと $(x,y)=(X+2,Y+1)=(2-\sqrt{2},1)$ となる．

問 10. A　高校で、ベクトル $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の長さは $|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$ で与えられることを学びました．回転しても、ベクトルの長さが変わらないことを確かめなさい．
答　$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $R_\theta(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$ に変化する．よって $|R_\theta(\boldsymbol{v})|^2 = (x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(x^2 + y^2) = x^2 + y^2$ となって，これから $|\boldsymbol{v}| = |R_\theta(\boldsymbol{v})|$ となる．
B　同じく，2 つのベクトル $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $w = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ のなす角 θ は、内積 $(v, w) = xx' + yy'$ を使って

$$(v, w) = |v||w|\cos\theta$$

で与えられることを学びました．回転しても、ベクトルのなす角が変わらないことを確かめなさい．
答　同様に $(R_\theta(\boldsymbol{v}), R_\theta(\boldsymbol{w})) = (x\cos\theta - y\sin\theta)(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + (x\sin\theta + y\cos\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(xx' + yy') = xx' + yy'$ となり，これから内積が不変であることが分る．よって，ベクトルのなす角度も不変である．

問 11. A　x 軸を，原点を中心として反時計回りに角度 θ 回転して得られる直線を ℓ とする．直線 ℓ を軸とする折り返しによって，ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る先を $S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と書く．
このとき $S_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, S_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．
答

$$S_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}, \tag{0.1}$$

$$S_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

解説　極座標 $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$ で考えると (r, ϕ) は $(r, 2\theta - \phi)$ に折り返される．したがって $\phi = 0$ とおいて $S_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $(r, \phi) = (1, 2\theta)$ に変換されることが分る．すなわち (0.1) となる．同様に $\phi = \pi/2$ とおくと $S_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $(r, \phi) = (1, 2\theta - \pi/2)$ に変換されることが分る．$\cos(2\theta - \pi/2) = \sin 2\theta, \sin(2\theta - \pi/2) = -\cos 2\theta$ となって (0.2) が得られる．
B　S_θ が線形性を持つことを利用して $S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ．
答

$$\begin{aligned} S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= xS_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yS_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ x\sin 2\theta - y\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問 12. 微分 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ は線形性を持つ．すなわち関数 $f(x), g(x)$ と実数 c_1, c_2 に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(c_1 f(x) + c_2 g(x)\Big) = c_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + c_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)$$

このことを利用して次の等式を示せ．

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x^2-1} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

答　部分分数展開といわれる次の等式を使う．

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

あとはこの式を線形性を使って微分すればよい．

問 13. A　a, b, c を相異なる実数とする．x の 2 次式 $f(x)$ で次の条件を満たすものを求めよ．

$$f(a) = 1,\ f(b) = 0,\ f(c) = 0$$

答　$f(x) = \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$

B　実数 a に対して，関数 $f(x)$ の $x = a$ における値を求める操作を $f(x)|_{x=a}$ と書くことにする．すなわち $f(x)|_{x=a} = f(a)$ である．この操作は線形性を持つ．すなわち関数 $f(x), g(x)$ と実数 c_1, c_2 に対して

$$\Big(c_1 f(x) + c_2 g(x)\Big)\Big|_{x=a} = c_1\left(f(x)\Big|_{x=a}\right) + c_2\left(g(x)\Big|_{x=a}\right)$$

が成り立つ．このことを利用して 2 次式 $f(x)$ で次の条件を満たすものを求めよ．

$$f(1) = p,\ f(2) = q,\ f(3) = r$$

答　$f(x) = p\dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + q\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + r\dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$

解説　Lagrange の補間公式と呼ばれているものです．$x^2, x, 1$ の線形結合に書くのではなく，問題に合わせたものを使う．

問 14. $\mathbb{R}^2$ において x 軸での折り返しが線形変換となることを確認せよ．

答　x 軸での折り返しは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ となるので，示すべき式は $\begin{pmatrix} c_1x_1 + c_2x_2 \\ -(c_1y_1 + c_2y_2) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$ となるが，これは明らかである．

問 15.　ベクトル $\boldsymbol{a}$ は $\mathbf{0}$ ではないとする．このとき平行移動 $T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$ は線形変換ではないことを示せ．

答

$$T_{\boldsymbol{a}}(2\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a},\ 2T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = 2(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a})$$

であり，$\boldsymbol{a} \neq 0$ であれば，これらは等しくない．

解説　次の問 **16** からも明らかである．

問 16. T が線形変換のとき $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ であることを示せ．
ヒント：例えば $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ から出発する．
答　$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ の両辺に T を作用させると $T(\mathbf{0})+T(\mathbf{0})=T(\mathbf{0})$ が得られる．両辺から $T(\mathbf{0})$ を引くと $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ となる．
解説　$2\mathbf{0}=\mathbf{0}$ から出発しても同じである．

問 17. 変換 $(x,\,y)\mapsto(x+y,xy)$ は直線 $x=y$ を何に移すか？
答　この直線は $\left\{\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$ とパラメタ表示される．よって $(x+y,xy)=(2t,t^2)$ であり，したがって直線の行き先は $4y=x^2$ で定義される放物線である．

問 18. x 軸に関する折り返しを表す行列を求めよ．
答　$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

問 19. $\mathbb{R}^2$ の線形変換 T が

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

を満たすとする．このとき T の行列表示を求めよ．

答

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

を使う．線形性から

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\frac{x+y}{2}T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{x-y}{2}T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\\&=x\begin{pmatrix}\frac{a+c}{2}\\\frac{b+d}{2}\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}\frac{a-c}{2}\\\frac{b-d}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a+c}{2}&\frac{a-c}{2}\\\frac{b+d}{2}&\frac{b-d}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

問 20. A　行列 $A=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x-y\\2x+y\end{pmatrix}$ に対して $A\boldsymbol{v}$ を求めよ．
答

$$\begin{aligned}A\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-y\\2x+y\end{pmatrix}&=x\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\\&=x\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x-5y\\3x+3y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

解説　計算のやり方はいろいろあります．
B　t を実数として

$$C_t=\begin{pmatrix}2&-t\\-t&2\end{pmatrix}$$

とおく．このとき，適当な実数 $\lambda(t)$ に対して $C_t\boldsymbol{v}=\lambda(t)\boldsymbol{v}$ が成り立つようなベクトル $\boldsymbol{v}$ を見つけ，そのときの $\lambda(t)$ と共に答えよ．

ヒント：二つの異なる $\lambda(t)$ に対応する答が存在し，どちらも $\boldsymbol{v}$ は t には依らない定数ベクトルに取れる．
答

$$C_t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=(2-t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$
$$C_t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=(2+t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

補足 2. $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ を行列で変換したとき，$\boldsymbol{v}$ の定数倍になるとき，$\boldsymbol{v}$ を行列 C_t の固有ベクトル，$\lambda(x)$ のことを固有値といいます．一般に実数 λ が行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の固有値のとき，すなわち $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$$

が成り立つとき，$A-\lambda E$ は特異行列になるので，行列式[1]$|A-\lambda E|=0$ である．すなわち，固有値 λ は 2 次方程式

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

の解として求められる．これを行列 A の特性方程式または固有方程式と呼ぶ．

問 21. A　$\mathbb{R}^2$ の線形変換 T_1 が

$$T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\3x-y\end{pmatrix}$$

を満たすとき，T_1 の行列表示を与える 2 次正方行列を求めよ．
答　$\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}$
B　$\mathbb{R}^2$ の線形変換 T_2 が

$$T_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ T_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

を満たすとき，T_2 の行列表示を与える 2 次正方行列を求めよ．
答　$\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$

問 22. A　原点を中心として反時計回りに角度 $\pi/3$ 回転する線形変換を表す行列を求めよ．
答　$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
B　$\mathbb{R}^2$ の点 $P=(1,0)$ を原点を中心として反時計回りに角度 $\pi/3$ の回転で点 (x,y) が移る行き先の点を求めよ．
ヒント：原点を P にとり直して，回転を計算する．
答　$\left(\dfrac{x-\sqrt{3}y+1}{2},\dfrac{\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}}{2}\right)$

[1]第 10 章 2 次の正則行列と特異行列の知識が必要です

解説　新しい座標として

$$x' = x - 1, y' = y \tag{0.3}$$

を考えると，元の座標の点 $(1, 0)$ は原点 $(0, 0)$ になる．よってこの座標では，回転による点 (x', y') の行き先は $(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y', \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y')$ になる．よって元の座標に戻すと $(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y')$ となる．この式に (0.3) を代入して上記の答を得る．
元の座標で考えたときこの変換は線形変換ではない.（線形変換を一般化したアフィン変換というものになります.）

問 23. 点 $(2, -1)$ を $(2, 1)$ に，$(-1, 2)$ を $(1, 2)$ に変換する線形変換を表す行列を求めよ．
答　$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
解説　$(1, 0)$ と $(0, 1)$ の行き先を見つける．この線形変換を T とすると

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}T\left(2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となる．同じように計算して $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ となる．よって T を与える行列は $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ である．

問 24. $x + 2y = 1$ で定義される直線全体を点 $(1, 1)$ に移すような線形変換を行列表示で与えよ．
答　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
解説　この直線は $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$ とパラメタ表示される．よって求める線形変換 T は $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす．よって対応する行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ である．

問 25. 2 次行列 X, Y を $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき行列の積 XY と YX を計算せよ．
答　$XY = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $YX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

問 26. A　回転 R_{θ_1} に対応する行列と，回転 R_{θ_2} に対応する行列の積を計算し，回転 $R_{\theta_1+\theta_2}$ に対応する行列と比較する．このとき，この二つの行列が一致するということから得られる三角関数の等式が，何であるかを確認せよ．
答　$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$
これは三角関数の加法定理である．
B　回転 $R_{2\theta}$ と x 軸での折り返し S_0 の合成が折り返し S_θ になることを対応する行列の積を用いて確認せよ．
答　$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

問 27. A　平面の x 軸を，中心として反時計回りに角度 θ 回転して得られる直線を ℓ_θ と書く．極座標で表したとき (r, ϕ) となる点を，直線 ℓ_θ で折り返した点の極座標を求めよ．

答　$(r, 2\theta - \phi)$

B　平面の平行ではない 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 が点 P で交わっているとする．直線 ℓ_i $(i = 1, 2)$ での折り返しを S_i とする．また，P を中心とする反時計回りの角度 θ の回転で，ℓ_2 が ℓ_1 に移るものとする．このとき線形変換の合成 $S_1 \circ S_2$ が点 P を中心とする角度 2θ の回転になることを，P を原点とする極座標を用いて示せ．

答　$\ell_i = \ell_{\theta_i}$ だとする．このとき，$S_1 \circ S_2$ は極座標で次の変換となる．$(r, \theta_2) \mapsto (r, 2\theta_2 - \phi) \mapsto (r, 2\theta_1 - (2\theta_2 - \phi)) = (r, \phi + 2(\theta_1 - \theta_2))$ すなわち，合成は角度 2θ（$\theta = \theta_1 - \theta_2$）の回転になる．

問 28. 次の積を計算せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

答　$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

問 29. 次の積を計算せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$$

答　$\begin{pmatrix} -x+4y+z \\ 4y+6z \\ 4x+3y+z \end{pmatrix}$

解説　ベクトルを x, y, z を係数に線形結合に書いておいて線形性を使って計算する．すなわち $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に行列を掛けて $x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．

問 30. 行列 A,B を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の積 AA, AB, BA, BB のうち定義できるものを計算せよ．

答　$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ BA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -5 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

問 31. **A**　次の行列 X, Y, Z を書き下せ．

$$X = (x^i y^j)_{\substack{i=0,1,2 \\ j=0,1}},\ Y = (x^i y^j)_{\substack{j=0,1 \\ i=0,1,2}},\ Z = (x^j y^i)_{\substack{i=0,1,2 \\ j=0,1}}$$

答　$X = \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & xy \\ x^2 & x^2y \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ y & xy & x^2y \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & xy \\ y^2 & xy^2 \end{pmatrix}$

補足 3. $m \times n$ 行列 $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ に対して，その転置行列 ${}^{\mathrm{t}}A = (a_{i,j})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}}$ が定義される．これは $n \times m$ 行列であり，左上から右下にかけての対角線方向で折り返した行列になっている．

$$
{}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}
$$

問の行列に関しては $X = {}^{\mathrm{t}}Y$ である．${}^{\mathrm{t}}A = B$ と $A = {}^{\mathrm{t}}B$ は同値である．また，行列の積と転置に関して ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$ が成り立つ．

B　行列 A, B, C を

$$
A = (x^i y^j)_{\substack{i=0,\dots,l-1 \\ j=0,\dots,m-1}},\ B = (z^{-j} w^k)_{\substack{j=0,\dots,m-1 \\ k=0,\dots,n-1}},\ C = (x^i w^k)_{\substack{i=0,\dots,l-1 \\ k=0,\dots,n-1}}
$$

と定義する．このとき

$$
AB = \frac{1-(y/z)^m}{1-y/z} C
$$

が成り立つことを示せ．
答　$C = (c_{i,k})_{\substack{i=0,\dots,l-1 \\ k=0,\dots,n-1}}$ とすると

$$
c_{i,k} = \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} b_{j,k} = \sum_{j=0}^{m-1} x^i y^j z^{-j} w^k = x^i \left(\sum_{j=0}^{m-1} (y/z)^j \right) w^k = \frac{1-(y/z)^m}{1-y/z} x^i w^k
$$

問 32. 3×3 行列 M を次のように定義する．

$$
M = \begin{pmatrix} xa & xb & xc \\ ya & yb & yc \\ za & zb & zc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
$$

このとき

$$
g = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz
$$

が実数になることを用いて，M^{100} を計算せよ．
ヒント：結合法則を利用する．
答　$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ とすると $M^2 = (\boldsymbol{v}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w})(\boldsymbol{v}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}){}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w} = gM$ となる．同様に $M^{100} = g^{99}M$ が得られる．

問 33. A　α, β を実数として，$M(\alpha,\beta) = \alpha E + \beta A$ と定義する．このとき $M(\alpha,\beta)$ と $M(\gamma,\delta)$ は可換になることを示せ．
答

$$\begin{aligned} M(\alpha,\beta)M(\gamma,\delta) &= (\alpha E + \beta A)(\gamma E + \delta A) = \alpha\gamma E^2 + \alpha\delta EA + \beta\gamma AE + \beta\delta A^2 \\ &= \alpha\gamma E + (\alpha\delta + \beta\gamma)A + \beta\delta A^2 \end{aligned}$$

となるので，積の順序にはよらない．
B　2 次正方行列 A_1, A_2, A_3 を次のように定義する．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

さらに，これを使って $N(\alpha,\beta) = \alpha A_1 + \beta A_2$ と定義する．このとき

$$N(\alpha,\beta)N(\gamma,\delta) - N(\gamma,\delta)N(\alpha,\beta) = 2(\alpha\delta - \beta\gamma)A_3 \tag{0.4}$$

となることを示せ．
答　$A_1A_2 = A_3, A_2A_1 = -A_3$ である．これを使って

$$\begin{aligned} N(\alpha,\beta)N(\gamma,\delta) &= (\alpha A_1 + \beta A_2)(\gamma A_1 + \delta A_2) = \alpha\gamma A_1^2 + \alpha\delta A_1A_2 + \beta\gamma A_2A_1 + \beta\delta A_2^2 \\ &= \alpha\gamma A_1^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)A_3 + \beta\delta A_2^2 \end{aligned}$$

となる．これから直ちに (0.4) がしたがう．

問 34. A　2 次行列 A, B を

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

と定める．このとき次の等式が成り立つことを確かめよ．

$$A^2 = A,\ B^2 = B,\ AB = BA = O, A + B = E$$

B　次の等式が成り立つ．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3A + B$$

このことを用いて

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

となることを示せ．
答　$(3A+B)^n = 3^nA + B$ となる．この式から直ちに (0.5) がしたがう．

問 35. M が 3×2 行列で，N が 2×3 行列のとき，積 MN が 3 次の単位行列になることはあるか？単位行列になる例を挙げるか，ならない理由を述べよ．
答　補足 **4** で $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ で $N\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる 3 次縦ベクトルが存在することを示す．そのことを使うことにする．$MN = E$ が成り立つと仮定すると $\boldsymbol{v} = E\boldsymbol{v} = (MN)\boldsymbol{v} = M(N\boldsymbol{v}) = M\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ となって矛盾である．よって $MN = E$ とはなり得ない．(結合法則を使ったことに注意)

補足 4. 一般に $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n-1\\ j=1,\dots,n}}$ を $(n-1)\times n$ 行列とすると，零でない n 次縦ベクトル $\boldsymbol{v}$ で $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たすものが存在する．このことを n に関する帰納法で証明しよう．$n=2$ は明らかである．一般の n の場合に N の第 1 行が零ベクトルであれば，$B = (a_{i,j})_{\substack{i=2,\dots,n-1\\ j=2,\dots,n}}$ に帰納法の仮定を適用して零でない $(n-1)$ 次縦ベクトル $\boldsymbol{w}$ が存在して $B\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ となる．このとき $\boldsymbol{v} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$ としてやれば，$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たす．

A の第 1 行が零ベクトルではないとき，証明の一般性を失うことなく $a_{1,1} \neq 0$ と仮定してよい．($a_{1,j} \neq 0$ であれば，A の代わりに A において第 1 列と第 i 列を取り替えた行列について議論しておけば，A についての主張もしたがう．)

A を行に分けて書いておき，2 行目から $(n-1)$ 行目までを次のように作り替えて $\tilde{A}$ を定義する．

$$A = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}_1 \\ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}_1 \\ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}_{n-1} - \frac{a_{n-1,1}}{a_{1,1}} {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix}$$

このとき $A\boldsymbol{v} = 0$ と $\tilde{A}\boldsymbol{v} = 0$ は同値であり，なおかつ $\tilde{A}$ は次の形になる．

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}' \\ \boldsymbol{0} & B \end{pmatrix}$$

B は $(n-2)\times(n-1)$ 行列になので帰納法の仮定により，零ベクトルではない $(n-1)$ 次ベクトルで $B\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ を満たすものが存在する．このとき $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$ において

$$x = -\frac{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{w}}{a_{1,1}}$$

とおけば，$\tilde{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たす．よって証明が済んだ．

問 36. 次の行列の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

答　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x/2 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と分解しておくと

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & x/2 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x/2 & xy/2 \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & -x/2 & -xy/2 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問 37. A 次の 2 つの行列 A, B の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

答 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab & -b & 1 \end{pmatrix}$

B 次の行列の逆行列を求めよ．

$$AB = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & 0 \\ a & 1+b^2 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

答 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab & -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab \\ -a & 1+a^2 & -(1+a^2)b \\ ab & -(1+a^2)b & 1+b^2+a^2b^2 \end{pmatrix}$

問 38. 次の行列はべき零であることを示せ．

$$N = x\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+y & 2x+y & -2y \\ -8x-y & -4x-y & 2y \\ -2x & -x & 0 \end{pmatrix}$$

答 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと $N = x\boldsymbol{v}_1{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_1 + y\boldsymbol{v}_2{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_2$ であり ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{v}_1 = 0, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{v}_2 = 1, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_2\boldsymbol{v}_1 = 0, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_2\boldsymbol{v}_2 = 0$ が成り立つ．これから N^2 に現れる 4 項のうち生き残るのは 1 項のみであって，$N^2 = xy\boldsymbol{v}_1{}^{\mathrm{t}}w_2$ となる．さらにこれから $N^3 = N(N^2) = 0$ が直ちにしたがう．(補足 **5** を参照のこと)

問 39. A 実数 p, q, r, s に対して，2 次特異行列 A で 2 つの条件

$$(i) \quad A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$(ii) \quad \text{任意の } \boldsymbol{v} \text{ に対して } A\boldsymbol{v} \in \left\{ t\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \text{ が成り立つ}$$

を満たすものを求めよ．

答 $c\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -p \end{pmatrix}$

B べき零な 2 次正方行列の自由度はいくつか？

答 ベキ零な 2 次行列は $\pm\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -r \end{pmatrix}$ と書くことができるので自由度は 2 である．

補足 5. n 次ベキ零行列の自由度を数えよう．

n 次正方行列 A に対して A の引き起こす $\mathbb{R}^n$ の線形変換による空間 $\mathbb{R}^n$ の行き先，すなわち $\mathrm{Im}\,A \overset{\mathrm{def}}{=} \{A\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\}$ を A の像と言う．問 **38** では $\mathrm{Im}\,N$ は $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合の全体であり，$\mathrm{Im}\,N^2$ になると，$\boldsymbol{v}_1$ の実数倍に縮み，さらに $\mathrm{Im}\,N^3 = 0$ になって原点につぶれる．N を n 次

ベキ零行列とすると $\mathbb{R}^n$ の中に $\mathbb{R}^n \supset \operatorname{Im} N \supset \operatorname{Im} N^2 \supset \cdots \supset \operatorname{Im} N^{n-1} \supset \operatorname{Im} N^n = 0$ という空間の列ができて，一般的にはこれらは順に，$\operatorname{Im} N$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ の線形結合の全体，$\operatorname{Im} N^2$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-2}$ の線形結合の全体などとなっていて，$N^n = O$ となるひとつ手前が $\operatorname{Im} N^{n-1}$ は $\boldsymbol{v}_1$ の実数倍となる．このような構造をフラッグ（旗）という．n 次元空間の中に $n-1$ 次元空間を選ぶ自由度は $n-1$ なので，フラッグの全体の自由度は $(n-1)+(n-2)+\cdots+1 = n(n-1)/2$ となる．ベキ零行列 N の自由度を考えるときは，行列 N が，$\operatorname{Im} N^j$ に属さない $\operatorname{Im} N^{j-1}$ のあるベクトルを $\operatorname{Im} N^j$ のどのベクトルに持っていくかを $j = 2, 3, \ldots, n$ で順に決めることになるので，ここでの自由度は $1+2+\cdots(n-1) = n(n-1)/2$ である．よって全体の自由度は $n^2 - n$ となる．

このようにベキ零行列の構造に立ち入ることまでせずに，自由度だけを計算するのであれば，固有多項式を使うとベキ零という条件が行列の成分に対する n 個の方程式で書ける．よって自由度は $n^2 - n$ である．その議論にはここでは立ち入らない．

問 40. A　$\mathbb{R}^2$ の線形変換 T に対応する行列が $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるとする．この正則行列の逆行列を求めよ．

答　$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

B　$\mathbb{R}^2$ 内の直線 ℓ が $(a,b) \neq (0,0)$ であるような $a, b, c \in \mathbb{R}$ によって方程式 $ax + by = c$ で与えられているとする．このとき，線形変換 T による行き先が ℓ であるような $\mathbb{R}^2$ 内の直線を与える方程式を求めよ．

答　点 (X, Y) の T による行き先 $(2X+Y, X+Y)$ が直線 ℓ の上にあるための条件は $a(2X+Y)+b(X+Y) = c$ すなわち $(2a+b)X + (a+b)Y = c$ である．よって $(2a+b)x + (a+b)y = c$ が求めている直線を与える方程式である．

C　線形変換 T による直線 ℓ の行き先の直線を与える方程式を求めよ．

答　T の代わりに T^{-1} について前問と同じ手続きで計算すればよい．結果は $(a-b)x + (-a+2b)y = c$ である．

問 41. α, β を実数とする．2 次正方行列 A で $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めよ．

答　$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$

問 42. (x, y) についての方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 3 \end{pmatrix}$$

が解を持つための s についての条件を求めよ．また，条件が満たされているとき，解の全体はどのような集合になるか？

答　条件は $s = -3/2$ であり，解の全体は $\left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ で与えられる直線である．