２次の正則行列と特異行列

ILAS 教材作成チーム

Kyoto, Japan

March 13, 2015

正則行列と特異行列

（復習）

正方行列

正則行列（逆行列を持つ）

特異行列（逆行列を持たない）

定義 (行列式)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $|A| = ad - bc$ を**行列式**という

命題 (正則行列と特異行列)

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則行列（逆行列を持つ）

$$\iff \text{行列式 } |A| = ad - bc \neq 0,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が特異行列（逆行列を持たない）

$$\iff \text{行列式 } |A| = ad - bc = 0$$

証明

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

このとき

$$A\tilde{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad+b(-c) & a(-b)+ba \\ cd+d(-c) & c(-b)+da \end{pmatrix}=(ad-bc)E$$

$$\tilde{A}A=(ad-bc)E$$

$\Rightarrow$ 　行列式 $|A|=ad-bc\neq 0$ であれば

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\tilde{A}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 　A は正則行列である

2次の逆行列（覚え方）

逆行列 $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{割って}}$

$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{入れ替え}}$ $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{符号を変える}}$ $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

正則行列と特異行列の特徴

正則行列の特徴

A が正則 $\Rightarrow A$ による線形変換はつぶれない

- $\boldsymbol{v} \neq 0 \Rightarrow A\boldsymbol{v} \neq 0$　（零ベクトルでなければつぶれない）
- $\{A\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$　（平面の行き先は平面の全体）
- A は平面と平面の 1 対 1 対応 を与える

（逆変換の一般的な性質）

$$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2 \iff \boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$$

特異行列の引き起こす線形変換の特徴

「つぶれる」

- $A = O \quad \Rightarrow \quad$ 平面全体が原点につぶれる
- $A \neq O \quad \Rightarrow \quad$ 「つぶれる」：２つの意味

1. $\mathbf{0}$ でないベクトルが原点につぶれる
2. 平面全体が 原点を通る一本の直線につぶれる

「つぶれる」の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- 原点につぶれるベクトル

  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{n} = 0$ となる $\boldsymbol{n}$ をとる. 例えば $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

  このとき　$A\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

- 平面全体の行き先

  任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x + 3y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

まとめ

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則 $\iff$ 行列式 $|A| = ad - bc \neq 0$
- 逆行列 $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- 正則行列の引き起こす線形変換はつぶれない
- 特異行列の引き起こす線形変換はつぶれる