逆行列を計算しよう

ILAS 教材作成チーム

Kyoto, Japan

March 13, 2015

実数の演算

和・積・逆数

行列の演算

和・実数倍・積・逆行列

逆行列とは？

（復習）

$$\text{実数 } a \text{ の逆数 } a^{-1} \iff aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

a^{-1} は $a \neq 0$ のとき <u>ただひとつ存在</u>

定義 (逆行列)

正方行列 A の逆行列 A^{-1}

$$\iff A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \text{（単位行列）}$$

A の逆行列は <u>存在するならば</u> ただひとつ

線形変換との対応

逆行列 $\iff$ 逆変換

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \iff T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{id}$$

T_1, T_2 : $\mathbb{R}^n$ の変換

T_2 が T_1 の逆変換 $\iff T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = \mathrm{id}$

- 実数倍の逆変換　$D_c^{-1} = D_{c^{-1}}$
- 回転の逆変換　$R_\theta^{-1} = R_{(-\theta)}$
- 折り返しの逆変換　$S_\theta^{-1} = S_\theta$

正則行列と特異行列

正方行列

逆行列を持つ $\Rightarrow$ 正則行列

逆行列を持たない $\Rightarrow$ 特異行列

基本的な行列の逆行列

1. 対角行列の逆行列
2. $E - N$（N はべき零）の逆行列
3. 積 AB の逆行列

１．対角行列の逆行列

A が対角行列 $\overset{\text{定義}}{\iff}$ 対角成分以外は 0

対角行列 A が逆行列を持つ $\iff$ 対角成分に 0 がない

$\Leftarrow$ の証明：

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ の証明： $a_{i,i} = 0$ とする．このとき任意の B に対して

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = a_{i,i} b_{i,i} = 0$$

よって $AB \neq E \Rightarrow$ 逆行列は存在しない

べき零行列

n 次正方行列 N が べき零 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ ある k に対して $N^k = 0$

例えば

正方行列 $A = (a_{ij})$ が 上三角 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

さらに対角成分がすべて 0 ならべき零

$$N = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2．$E-N$ の逆行列

N がべき零（$N^k=0$）ならば $E-N$ は正則

$$(E-N)^{-1}=E+N+\cdots+N^{k-1}$$

証明

$$\begin{aligned}
&(E-N)(E+N+\cdots+N^{k-1})\\
&\qquad=E+N+\cdots+N^{k-1}-N-\cdots-N^{k-1}-N^k\\
&\qquad=E+(N+\cdots+N^{k-1})-(N+\cdots+N^{k-1})-N^k\\
&\qquad=E-N^k\\
&\qquad=E
\end{aligned}$$

（証明終）

無限和 $E+N+N^2+\cdots$ を ノイマン級数 と呼ぶ

N がべき零 $\Rightarrow (E-N)^{-1}=$ ノイマン級数（有限和）

３．積の逆行列

$$A, B \text{ が正則} \quad \Rightarrow AB \text{ も正則}$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

証明

$$\begin{aligned} AB(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AEA^{-1} \\ &= AA^{-1} = E \\ (B^{-1}A^{-1})AB &= B^{-1}(A^{-1}A)B \\ &= B^{-1}EB \\ &= B^{-1}B = E \end{aligned}$$

（証明終）

まとめ

- 正方行列 A の逆行列 $A^{-1} \Leftrightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = E$
- 逆行列をもつ正方行列を正則行列
  そうでない正方行列を特異行列と呼ぶ
- 対角行列の逆行列　＝ 逆数を対角成分にもつ対角行列
- $E - N$（N はべき零）の逆行列　＝ N のノイマン級数
- 積 AB の逆行列　$= B^{-1}A^{-1}$