# 行列の演算を使いこなす

ILAS 教材作成チーム

Kyoto, Japan

March 13, 2015

# 行列の演算

- 和：$(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} + (b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$
- 実数倍：$c \cdot (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (c \cdot a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$
- 積：$(a_{i,k})_{\substack{i=1,\dots,l \\ k=1,\dots,m}} \cdot (b_{k,j})_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,n}}$

$$\text{積の } (i, j) \text{ 成分} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$$

和・実数倍・積を 行列の演算 という

# 行列の演算規則

## 結合法則

$$(AB)C = A(BC)$$

実数の場合： $(ab)c = a(bc)$

＜例＞

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

## 分配法則

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)A = BA + CA$$

実数の場合：　$a(b+c) = ab + ac$

$<$例$>$ $A(B+C) = AB + AC$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$$

## 実数倍の可換性

$$c : \text{実数} \;\Rightarrow\; (cA)B = A(cB) = c(AB)$$

実数の場合： $(ca)b = a(cb) = c(ab)$

＜例＞ $c = 5, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(cA)B = \left(5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A(cB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left(5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$c(AB) = 5 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \end{pmatrix}$$

# 正方行列のべき乗

$$M^0 = E, \quad M^{n+1} = M \cdot M^n$$

＜例＞ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

結合法則 $\Rightarrow$ べき乗は積の順序によらない

$$\begin{aligned} M^5 &= M((MM)(MM)) = (MM)(M(MM)) \\ &= ((MM)M)(MM) = (((MM)M)M)M \end{aligned}$$

# まとめ

- 行列の演算：

  和・実数倍・積

- 行列の演算規則：

  結合法則・分配法則・実数倍の可換性