一般の行列の積

ILAS 教材作成チーム

Kyoto, Japan

March 13, 2015

$m \times n$ 行列

$$m \times n \text{ 行列 } M = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \phantom{a_{1,1}} & \phantom{a_{1,2}} & & j & & \phantom{a_{1,n}} \end{matrix} \\ i & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ & & & a_{i,j} & & \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

行

列

括弧の外に書く添字は上が行，下が列を表す

例　2×3 行列

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j} とすると$$

$$(a_{i,j})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} j=1 & j=2 & j=3 \end{array} \\ \begin{array}{c} i=1 \\ \\ i=2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+2} & \frac{1}{1+3} \\ \frac{1}{2+1} & \frac{1}{2+2} & \frac{1}{2+3} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

果物詰合せ再び

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{詰合せ1} & \text{詰合せ2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{百万遍} \\ \text{農学部} \end{array} & \begin{pmatrix} 23 & 11 \\ 17 & 21 \end{pmatrix} \end{array} \quad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{みかん} & \text{りんご} & \text{桃} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{詰合せ1} \\ \text{詰合せ2} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$AB = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{みかん} & \text{りんご} & \text{桃} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{百万遍} \\ \text{農学部} \end{array} & \begin{pmatrix} 124 & 57 & 79 \\ 156 & 55 & 97 \end{pmatrix} \end{array}$$

$l \times m$ 行列と $m \times n$ 行列の積

$$l \times m \text{ 行列 } A = (a_{i,k})_{\substack{i=1,\ldots,l \\ k=1,\ldots,m}}, \quad m \times n \text{ 行列 } B = (b_{k,j})_{\substack{k=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

$$\Downarrow$$

$$l \times n \text{ 行列 } AB = (c_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,l \\ j=1,\ldots,n}}$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} b_{m,j}$$

和の記号 Σ

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = 5050$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 99^2 + 100^2 = 338350$$

ベクトルも行列の一種

- n 次の横ベクトル ${}^t\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$ ： $1 \times n$ 行列

- n 次の縦ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ： $n \times 1$ 行列

行列とベクトルの積の例

- 2×2 行列と 2 次縦ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 2 次横ベクトルと 2 次縦ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

- 2 次縦ベクトルと 2 次横ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

まとめ

- $m \times n$ 行列は mn 個の実数を m 行 n 列に並べたものである
- $l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B から $l \times n$ 行列 AB が定義される