線形変換の合成と行列の積

ILAS 教材作成チーム

Kyoto, Japan

March 13, 2015

変換の合成

変換 $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の合成 $T_1 \circ T_2$

$$
\begin{array}{rcccccc}
T_1 \circ T_2 & : \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_2} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_1} & \mathbb{R}^2 \\
 & \Cup & & \Cup & & \Cup \\
 & \boldsymbol{v} & \mapsto & T_2(\boldsymbol{v}) & \mapsto & T_1(T_2(\boldsymbol{v}))
\end{array}
$$

- 例１. $R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$
- 例２. $S_{\theta_1} \circ S_{\theta_2} = R_{2(\theta_1-\theta_2)}$

例２は極座標を用いると簡単に証明できる

合成の行列表示

変換 T_1 と T_2 の行列表示を用いて

合成 $T_1 \circ T_2$ の行列表示を求めてみよう！

すなわち

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ A_1, A_2 を用いて

$$T_1 \circ T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる A_3 を求める

（復習）

定義 (2 次正方行列と 2 次縦ベクトルの積)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

合成 $T_1 \circ T_2$ の行列表示

$$T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
T_1 \circ T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T_1\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_1\left(x\begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= x\,T_1\begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + y\,T_1\begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \\
&= x\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \\
&= x\begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

行列の積

$$T_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = A_1, \quad T_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = A_2$$

$$T_1 \circ T_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} = A_1A_2$$

定義 (行列の積)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

行列の積の計算の手順

第
1
列
↓

$$\text{第 } 1 \text{ 行} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

(1 , 1) 成分
↓

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

線形変換の合成と行列の積が対応する

$$\text{変換}\ T_1 \longleftrightarrow \text{行列}\ A_1, \quad \text{変換}\ T_2 \longleftrightarrow \text{行列}\ A_2$$

$$\text{変換の合成}\ T_1 \circ T_2 \longleftrightarrow \text{行列の積}\ A_1 A_2$$

一般には合成の順序を変えると結果が変わる（非可換）

＜例＞

$$T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix},\quad T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x+y\end{pmatrix}$$

$$T_1\circ T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T_1\begin{pmatrix}x\\x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\x+y\end{pmatrix}$$

$$T_2\circ T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T_2\begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x+2y\end{pmatrix}$$

次は T_1 と T_2 の行列表示を用いて確認してみよう！

行列表示を使っての確認

$$T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x+y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$T_1\circ T_2\longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&0+1\\0+1&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$T_2\circ T_1\longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0&1+0\\1+0&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

（確認終）

まとめ

- 線形変換の合成と行列の積が対応する
- 線形変換の合成や行列の積は順序で結果が変わりうる