線形変換を行列で表す

ILAS 教材作成チーム

Kyoto, Japan

March 13, 2015

2 次正方行列

「2 行 2 列の行列」「2×2 行列」

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ 第 1 行

$\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$ 第 2 行

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ 第 1 列

$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ 第 2 列

行列の成分

$(1,1)$ 成分 $= a$ $(1,2)$ 成分 $= b$

$(2,1)$ 成分 $= c$ $(2,2)$ 成分 $= d$

2 次正方行列と 2 次縦ベクトルの積

$$M = \begin{array}{cc} & \text{第 2 列} \\ & \downarrow \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \end{array} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{第 2 成分} \end{array}$$

$$M\boldsymbol{v} \overset{\text{定義}}{=} x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

$\overset{\text{すなわち}}{\Longleftrightarrow}$ M の列の線形結合であり，その係数は $\boldsymbol{v}$ の成分

定義 (2 次正方行列と 2 次縦ベクトルの積)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x + b\,y \\ c\,x + d\,y \end{pmatrix}$$

＜例＞

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 + 3 \\ -4 + 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

回転の行列表示

- 原点を中心とした θ 回転（復習）

$$
\begin{aligned}
R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= R_\theta \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= x R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= x \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

R_θ の線形性

回転と折り返しの行列表示

- 原点を中心とする角度 θ の回転

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- 原点を通る角度 θ の直線での折り返し

$$S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & S_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

命題 (線形変換の行列表示)

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$：線形変換

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$ とすると

T の行列表示

$$\boxed{T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$ が成り立つ

（証明）

線形性

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x\,T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\,T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの積

$$= \begin{pmatrix} T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

（証明終）

命題 (2 次正方行列から定義される線形変換)

変換 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{定義}}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，T は線形変換である．

すなわち，縦ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ と実数 c_1, c_2 に対して

$$T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + c_2T(\boldsymbol{v}_2)$$

が成り立つ．

線形変換と行列の一対一対応

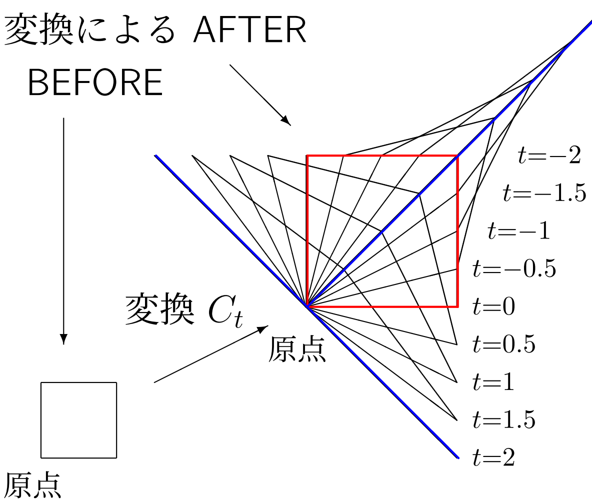
$\mathbb{R}^2$ の線形変換 $\overset{1\text{対}1}{\Longleftrightarrow}$ 2次正方行列

$$T \xrightarrow{\text{行列表示}} \left(T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \; T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right)$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \xleftarrow{\text{変換の構成}} \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

R^2 の線形変換の自由度は 4

つぶれていく変換



$$C_t \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -t \\ -t & 2 \end{pmatrix}$$

まとめ

- 2 次正方行列と 2 次縦ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{R}^2$ の線形変換は 2 次正方行列で表示できる

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- 逆に，行列の積で定義された変換は線形変換である
- $\mathbb{R}^2$ の線形変換と 2 次正方行列は一対一に対応する