線形変換とは何だろうか

ILAS 教材作成チーム

Kyoto, Japan

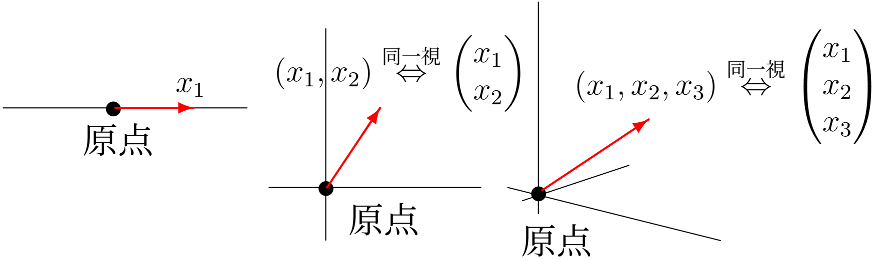
March 13, 2015

n 次元空間 $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$n = 1, 2, 3 \iff \text{直線，平面，空間}$$

$\mathbb{R}^1$(直線)　　$\mathbb{R}^2$(平面)　　$\mathbb{R}^3$(空間)



$\mathbb{R}^n$ の変換

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{R}^n \text{ の変換 } T : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \boldsymbol{v} & \mapsto & T(\boldsymbol{v}) \end{array}$$

- 例 1.　恒等変換 id：$\mathrm{id}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$
- 例 2.　実数倍 D_c $(c \in \mathbb{R})$：$D_c(\boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{v}$
- 例 3.　平行移動 $T_{\boldsymbol{a}}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n)$：$T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$

定義 (線形変換)

$\mathbb{R}^n$ の変換 T が線形 $\iff$
$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2) \\[1em] 2. & T(c\boldsymbol{v}) = c\,T(\boldsymbol{v}) \end{array}\right\}\text{変換の線形性}$$

が成り立つことをいう

性質 1, 2 $\Leftrightarrow T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + c_2T(\boldsymbol{v}_2)$

線形変換 $\Leftrightarrow$ 線形結合を保つ変換

平面 $\mathbb{R}^2$ の線形変換 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の例

実数倍　$D_c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix}$

回転　$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$

折り返し　$S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ x\sin 2\theta - y\cos 2\theta \end{pmatrix}$

パラメタ 1 個を持つ変換の族 $\Leftrightarrow$ 変換の自由度が 1

$\mathbb{R}^2$ の線形変換全体の自由度は？　その前に $\mathbb{R}^1$ の場合

$\mathbb{R}$ の線形変換 $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とは？

$$\mathbb{R}^1 \ni \boldsymbol{v} = (x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

線形性：$T(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1T(x_1) + c_2T(x_2)$

$1 \in \mathbb{R}$ に対して $T(1) = c$ とすると

$$T(x) = T(x \cdot 1) = x \cdot T(1) = xc = cx$$

$\mathbb{R}$ の線形変換は実数倍である！

実数 c $\overset{1\text{ 対 }1}{\longleftrightarrow}$ 線形変換 $T(x) = cx$

$\mathbb{R}$ の線形変換の「自由度」は 1 である

線形変換は直線を直線または一点に移す

$\mathbb{R}^n$ の中の直線 ℓ は，ある $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$ に対して

$$\ell = \{\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

と表される集合．ここで

$$T(\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{w}) = T(\boldsymbol{v}) + t\,T(\boldsymbol{w})$$

よって

- $T(\boldsymbol{w}) \neq \mathbf{0} \Rightarrow \ell$ の行き先 $T(\ell)$ は

$$T(\ell) = \{T(\boldsymbol{v}) + tT(\boldsymbol{w}) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{直線}$$

- $T(\boldsymbol{w}) = \mathbf{0} \Rightarrow \ell$ の行き先 $T(\ell)$ は

$$T(\ell) = \{T(\boldsymbol{v})\} \quad \text{点}$$

（証明終）

まとめ

- 線形結合を保つ変換を線形変換という
- $\mathbb{R}$ の線形変換は実数倍で、自由度は１である
- $\mathbb{R}^n$ の線形変換は直線を直線または点に移す