

# ベクトルの回転を求める

ILAS 教材作成チーム

Kyoto, Japan

March 13, 2015

## 一般の点を回転すると？

2つの縦ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  が回転  $R_\theta$  で

$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

に移ることはわかった！

次は一般の点  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の  $R_\theta$  での行き先

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ?$$

を計算したい。→ 回転の線形性を使って計算する。

## 回転の線形性

回転  $R_\theta$  は次の2つの性質

1.  $R_\theta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = R_\theta(\mathbf{v}_1) + R_\theta(\mathbf{v}_2)$
2.  $R_\theta(c\mathbf{v}) = cR_\theta(\mathbf{v})$

を持つ。これらの性質を合わせて線形性という

## 回転の線形性

1.  $R_\theta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = R_\theta(\mathbf{v}_1) + R_\theta(\mathbf{v}_2)$
2.  $R_\theta(c\mathbf{v}) = cR_\theta(\mathbf{v})$

性質 1, 2  $\Leftrightarrow R_\theta(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1R_\theta(\mathbf{v}_1) + c_2R_\theta(\mathbf{v}_2)$

言いかえると 回転の線形性 とは

線形結合の回転は, 回転したベクトルの線形結合である

という性質

!!  
重要!!

線形性を利用して  $R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を求めよう!!

# 線形性を使って回転を計算する

$$\begin{aligned}R_{\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= R_{\theta} \left( x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x R_{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y R_{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \curvearrowright R_{\theta} \text{ の線形性} \\ &= x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(計算終)

# 線形性を使って折り返しを計算する

$S_\theta$ : 原点を通る角度  $\theta$  の直線での折り返し

$$S_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}, \quad S_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

$$S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos 2\theta + y \sin 2\theta \\ x \sin 2\theta - y \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

絵を描いて証明に挑戦してみましよう！

# まとめ

- ▶ 原点を中心とする平面の回転は線形性を満たす
- ▶ 線形性を使うと一般のベクトルの回転が計算できる
- ▶ 原点を通る直線を軸とする折り返しも線形性を満たす

線形性を持つものは回転や折り返しの他に  
どんなものがあるだろう？

→ 次の単元へつづく