

ベクトルから行列へ — 線形性とは何だろうか? —

京都大学国際高等教育院数学教室

1. 平面の点を2次の縦ベクトルで表わす

平面の点 P とは、実数2個の組 (x, y) のことです。すなわち、我々は平面に原点と座標を定め、各点に対して定まる2個の実数を x 座標、 y 座標と呼んで、それらを並べたものが平面の点を表していると考えます。原点は $(0, 0)$ に対応します。平面全体を集合の記号を使って

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

と表します。この式の右辺は、 x, y を実数 \mathbb{R} から任意に選んで、それから作った組 $P = (x, y)$ の全体の集合を表しています。原点 $O = (0, 0)$ に関する位置ベクトル \vec{OP} を考えましょう。位置ベクトル \vec{OP} を、 x, y を縦に並べて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表します。

実数2つを縦に並べた

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を2次の縦ベクトルと言います¹。我々は縦ベクトル $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と点 $P = (x, y)$ を同一視します。高校の教科書では、位置ベクトルを横ベクトル $(x \ y)$ で表示²しましたが、この講義では、横ベクトルと縦ベクトルは区別し、場合に応じて使い分けることにします。特に平面の位置ベクトルは縦ベクトルで表示します。縦ベクトルを使う理由は、後で行列というものを考えるときに、行列を左側に、ベクトルを右側に書くという慣習に関係しています。ただし、平面の点を考えるときは、2つの座標を横に並べて書く方が場所を取らないので、 (x, y) と書きます。繰り返しになりますが、点 (x, y) と縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は同じものとみなしていることに注意してください。したがって

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

とも書けます。

¹高校ではベクトルを太字ではなく \vec{v} のように表しました。

²横ベクトルは (x, y) とカンマで区切って書くことも多いのですが、ここでは点 (x, y) と区別するためと、また後ででてくる行列の「行」を横ベクトルと見なすときにカンマはない方がよいので、カンマなしで書いています。 x と y を近く書きすぎると積 xy に見えてしまうので注意しましょう。

同様に，空間の点 (x, y, z) は，3 次の縦ベクトルとして

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

のように表示します．空間は集合

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

と同一視されます．さらに一般に自然数 $n \geq 1$ に対し

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

を考え n 次元空間と呼びます．

左上から右下に向かう方向を中心軸に，ベクトルの縦と横をひっくり返す操作のことを 転置 といい

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad {}^t\boldsymbol{w} = (x \ y \ z)$$

と表わします．

まとめ 平面の点と 2 次の縦ベクトルが 1 対 1 に対応する．

Key Words: 縦ベクトル，横ベクトル，転置

- 問 1. A 縦ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が表す平面の点 P_0 を x 軸で折り返した点を縦ベクトルで表せ．
 B 同じ点 P_0 を方程式 $x = 1$ で与えられる直線を軸として折り返した点を縦ベクトルで表せ．

- 問 2. A 縦ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が表す平面の点 P を方程式 $y = x$ で与えられる直線を軸として折り返した点を縦ベクトルで表せ．
 B 同じ点 P を方程式 $y = x - 1$ で与えられる直線を軸として折り返した点を縦ベクトルで表せ．

- 問 3. A 縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が表す平面の点を．原点の周りで反時計回りに $\pi/2$ (90°) 回転した点を縦ベクトルで表せ．
 B 方程式 $ax + by = c$ で与えられる直線を原点の周りで $\pi/2$ 回転して得られる直線の方程式

を求めよ．

2. 縦ベクトルの演算と線形結合

縦ベクトルの和と実数倍（定数倍，スカラー倍等とも言う）は，高校で学んだ横ベクトルの場合と同様，成分ごとに行います．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix}$$

高校ではこれらベクトルの和と実数倍は，平行四辺形の対角線やベクトルの方向を変えずに向きや大きさを変化させる操作として説明されました．和と実数倍は \mathbb{R}^n に対しても定義されます． n の値が大きくなるとベクトルを図に描いてイメージすることは難しくなりますが，実数を並べたものとして扱うだけなので，計算が難しくなる訳ではありません．

例 1. ベクトルの和や実数倍がどのように使われるかの例を挙げておきます．

百万遍のコンビニで，2種類の果物の詰合せを販売してい（るということにし）ます．詰合せ1にはみかん3個とリンゴ4個が，詰合せ2にはみかん5個とリンゴ1個がはいっています．詰合せ1を3個と詰合せ2を2個買うと，みかん19個とリンゴ14個が手に入ります．この計算は \mathbb{R}^2 のベクトル $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ と $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考えると

$$3v + 2w = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \end{pmatrix}$$

というベクトルの計算になります．

例1にでてきた $3v + 2w$ というベクトルの表示をベクトル v と w の線形結合といいます．それぞれのベクトルに掛けられる数3や2は線形結合の係数といいます．以下述べるように，線形結合の係数は自然数とは限りません．

さて，一般に n 次元空間 \mathbb{R}^n における線形結合を考えましょう． m 個の縦ベクトル v_1, \dots, v_m をそれぞれ実数 c_1, \dots, c_m 倍したものを足し上げた縦ベクトル $c_1v_1 + \dots + c_mv_m$ を， v_1, \dots, v_m の線形結合と呼び， c_1, \dots, c_m を係数と呼びます．

問題によっては個々のベクトルあるいは線形結合ではなく，ベクトルの線形結合の全体を考えることが重要です．それは幾何学的には直線だったり平面だったりを表します．平面ベクトル \mathbb{R}^2 の場合で言えば，ベクトルの線形結合で表される点の全体が原点だけになるか，直線になるか，平面全体になるかの3通りに分かれることとなります．この違いを次元と呼ばれる自然数0, 1, 2を対応させることによって区別します．このような考え方は線形代数学で深く学びます．

線形結合という考え方は，和と実数倍のあるところに必ず適用できるものであり，線形結合について考えるときは，その構成要素である係数やベクトルの特徴をよくとらえることが大切

です．さらに，ベクトルの成分を実数に限るのではなく，複素数まで広げて考えることも重要です．その場合は，和と複素数倍が定義され，線形結合の係数には複素数が現れます．

例 2.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この式は，縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を縦ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形結合の形に表したものです．

例 3. 縦ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を縦ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の線形結合に表わすと

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となります．さらに，例 2 の右辺に現れるこの 2 つのベクトルの線形結合を計算することによって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が得られます．

例 4. あるベクトルを線形結合に書く仕方には，いろいろあって，それぞれが特徴を持っています．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x-y \end{pmatrix} &= (x+2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (3x-y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この 2 行目の書き方は，次に学ぶ行列において重要です．いろいろな線形結合に慣れていきましょう．

まとめ ベクトルの演算（和と実数倍）は成分ごとに行う．ベクトルの線形結合はベクトルである．

Key Words: 和，実数倍，線形結合，係数

問 4. A ベクトル e_1, e_2, v_1, v_2 を次のように定める．

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

このとき e_1, e_2 を v_1, v_2 の線形結合で表せ．

B $xe_1 + ye_2$ を v_1, v_2 の線形結合で表せ．

問 5. A 縦ベクトル $\begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ 2x \end{pmatrix}$ を定数ベクトル (成分が実数であるようなベクトル) の線形結合で係数が $x^2, x, 1$ となるように表せ.

B 次の等式が成立するような実数 a, b, c を求めよ.

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)x(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

問 6. A 次の線形結合を 1 個の縦ベクトルとして表せ.

$$(x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y+z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (z+x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B 複素数 ω は $\omega^3 = 1$ を満たすとする. このとき次の等式が成り立つように係数 a, b, c を決めよ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

問 7. A 縦ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ が縦ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の線形結合になるための条件を求めよ.

B 空間の 3 点 $(1, 2, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1)$ を通る平面を H とする. 点 $(1, a, b)$ が H の上にあるための条件を求めよ.

3. 回転と線形変換

x 軸上の点 $(1, 0)$ を, 原点を中心とする角度 θ の回転 で動かすと, 縦ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

に変化します. これを

$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

と表します.

注意 1. 回転は反時計回りに回るときの回転角が正の実数（時計回りなら負の実数）となるように定義します．角度は円周率 π を使って 360° を 2π で表します．

同様に y 軸上の点 $(0, 1)$ の角度 θ の回転は

$$R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

となります．

注意 2. ここでは，回転を数学的に定義して扱うということはありません．高校の数学では複素数の単元で回転を扱うので，そこで得られた理解のもとに議論を進めていくことにします．

一般の点 (x, y) を原点の周りで回転することは，線形性 という考え方を使うと簡単に計算することができます．回転が線形性を満たすとは

縦ベクトルの線形結合を回転したものは，縦ベクトルを回転したものの線形結合に一致するという性質です．式で書くと

$$R_\theta(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1R_\theta(\mathbf{v}_1) + c_2R_\theta(\mathbf{v}_2)$$

となります．この条件は次の 2 つの条件と同値になります．

$$\begin{aligned} R_\theta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= R_\theta(\mathbf{v}_1) + R_\theta(\mathbf{v}_2), \\ R_\theta(c\mathbf{v}) &= cR_\theta(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

すなわち、ベクトルの和と実数倍を保つ変換が線形変換です．

\mathbb{R}^n の点 v に対して一定の規則で、同じ n に対する \mathbb{R}^n の点 $T(v)$ を対応させることを \mathbb{R}^n の変換と言います³．

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \psi &\quad \psi \\ v &\mapsto T(v) \end{aligned}$$

例 5. ベクトルを全く動かさない変換を恒等変換と呼び， id と表します．すなわち，

$$\text{id}(v) = v$$

です．

³括弧を省略して Tv と書くことも多いです．特に v を $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のように縦ベクトルに書き下すときはそれ自身に括弧がついているので 2 重につけないことが普通です．

例 6. c を実数として

$$D_c(\mathbf{v}) = c\mathbf{v}$$

は \mathbb{R}^n の変換になります．これを実数倍（あるいは定数倍，スカラー倍）といいます．パラメタ c が 1 のときは恒等変換になります． $D_1 = \text{id}$

例 7. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して，平行移動

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{a}$$

は \mathbb{R}^n の変換です．これも $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のときは恒等変換です． $T_0 = \text{id}$

\mathbb{R}^n の変換のうち，平面 \mathbb{R}^2 の原点周りの回転のように線形性を満たす変換のことを 線形変換（1 次変換とも言う）といいます．すなわち \mathbb{R}^n の変換 T が線形とは

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$$

が成り立つことです．これは次の二つの性質に言い換えることができます．

$$T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2),$$

$$T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$$

すなわち，ベクトルの和と実数倍を保つ変換が線形変換です．

線形性を使うと $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の回転を簡単に計算できます．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= xR_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yR_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を x 軸方向と y 軸方向とに分解して表したものでした．上の結果は，ベクトル \mathbf{v} と共に x 軸， y 軸も角度 θ 回転すると考えれば，回転した結果のベクトル $R_\theta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を回転後の軸方向のベクトル $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ で分解して表すならば，係数の x と y は変わらないということです．

複素平面における回転を考えましょう．点 (x, y) を複素数 $z = x + iy$ に対応させると，複素数の全体は平面と 1 対 1 に対応します．こうして，複素数全体を平面と見たものを複素平面といい（ガウス平面ともいう）， x 軸を実軸， y 軸を虚軸と呼びます．複素平面上で原点回りに

角度 θ 回転するには、複素数 $w = \cos \theta + i \sin \theta$ をかければよいことは高校で学びました。すなわち、 $z = x + iy$ に対して $z' = wz = x' + iy'$ とすると、 (x, y) を角度 θ 回転した点が (x', y') となります。このことを用いて R_θ を求めてみましょう。

wz を計算すると、

$$wz = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta)$$

となりますので、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を角度 θ 回転した縦ベクトル $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

と表すことができます。こうして、線形性から求めた結果と同じ結果が得られました。

原点周りの平面の回転が線形であることは証明をせずに使ったのですが、複素平面では原点周りの回転 T が複素数 $w = \cos \theta + i \sin \theta$ の掛け算で実現されていること

$$T(z) = wz$$

を使うと、回転の線形性は簡単に確認することができます。すなわち、 v_1, v_2 に対応する複素数を z_1, z_2 とすると、 $c_1 v_1 + c_2 v_2$ に対応する複素数は $c_1 z_1 + c_2 z_2$ になることに注意すると

$$T(c_1 z_1 + c_2 z_2) = w(c_1 z_1 + c_2 z_2) = c_1 w z_1 + c_2 w z_2 = c_1 T(z_1) + c_2 T(z_2)$$

が（複素数の等式として）成り立っていることが T の線形性に他なりません。

まとめ 原点を中心とする平面の回転は線形変換である。この変換による点の行き先は、線形性を使って簡単な場合の結果から線形結合を使って求めることができる。

Key Words: 回転, 線形変換

問 8. 平面の点 $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ を原点を中心に角度 $\pi/3$ 回転した点を求めよ。

問 9. 平面の点 $(1, 2)$ を点 $(2, 1)$ を中心に角度 $\pi/4$ 回転した点を求めよ。

問 10. 高校で、ベクトル $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の長さは $|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$ で与えられることを学びました。回転しても、ベクトルの長さが変わらないことを確かめなさい。

問 11. 高校で、2つのベクトル $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $w = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ のなす角 θ は、内積 $(v, w) = xx' + yy'$ を使って

$$(v, w) = |v||w| \cos \theta$$

で与えられることを学びました。回転しても、ベクトルのなす角が変わらないことを確かめなさい。

問 12. A x 軸を, 原点を中心として反時計回りに角度 θ 回転して得られる直線を ℓ とする. 直線 ℓ を軸とする折り返しによって, ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る先を $S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と書く.

このとき $S_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, S_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.

B S_θ が線形性を持つことを利用して $S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ.

この問題は, 答を書いておきます

$$S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos 2\theta + y \sin 2\theta \\ x \sin 2\theta - y \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

問 13. 微分作用素⁴ $\frac{d}{dx}$ は線形性を持つ. すなわち関数 $f(x), g(x)$ と実数 c_1, c_2 に対して次が成り立つ.

$$\frac{d}{dx} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 \frac{d}{dx} f(x) + c_2 \frac{d}{dx} g(x)$$

このことを利用して次の等式を示せ.

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$$

問 14. A a, b, c を相異なる実数とする. x の 2 次式 $f(x)$ で次の条件を満たすものを求めよ.

$$f(a) = 1, f(b) = 0, f(c) = 0$$

B 実数 a に対して, 関数 $f(x)$ の $x = a$ における値を求める操作を $f(x)|_{x=a}$ と書くことにする. すなわち $f(x)|_{x=a} = f(a)$ である. この操作は線形性を持つ. すなわち関数 $f(x), g(x)$ と実数 c_1, c_2 に対して

$$(c_1 f(x) + c_2 g(x))|_{x=a} = c_1 (f(x)|_{x=a}) + c_2 (g(x)|_{x=a})$$

が成り立つ. このことを利用して 2 次式 $f(x)$ で次の条件を満たすものを求めよ.

$$f(1) = p, f(2) = q, f(3) = r$$

4. 線形変換の性質

\mathbb{R}^n の変換がすべて線形変換になるわけではありません. 線形変換は次に述べるような一般の変換にはない性質を持っています.

すなわち, 線形変換は原点 $(0, \dots, 0)$ を動かしません. 変換 T が線形するとき, 零ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

⁴関数には和 $f(x) + g(x)$ と実数倍 $c f(x)$ が定義されている. ベクトルの代わりに関数を考えたとき, 関数にその導関数を対応させる機能を考えて, それを微分作用素と呼び $\frac{d}{dx}$ で表す.

を 0 と書くと、 $0+0=0$ なので $T(0)+T(0)=T(0)$ ，よって両辺から $T(0)$ を引いて、 $T(0)=0$ となるからです。

命題 1. \mathbb{R}^n の線形変換 T は \mathbb{R}^n 内の直線を直線または点に移す。

\mathbb{R}^n 内の直線 ℓ とは、あるベクトル v と、 0 でないもうひとつのベクトル w によって、

$$\ell = \{v + tw \in \mathbb{R}^n | t \in \mathbb{R}\}$$

と表される平面の部分集合です。ここで、右辺の意味するところは、実数 t を任意に取って、 $v + tw$ というベクトルを考えると \mathbb{R}^n の点 が得られる、そのような点の全体の集合です。

線形変換 T に対して

$$T(\ell) = \{Tu | u \in \ell\}$$

を直線 ℓ の T による 像 と言います。 T による ℓ の行き先と言ってもよいでしょう。 $T(\ell)$ が直線または点になるというのが上の命題です。

$$u = v + tw$$

とすると

$$T(u) = T(v) + tT(w)$$

なので、 $T(w)$ が零ベクトルでなければ $T(\ell)$ は直線に、零ベクトルであれば一点 Tv になります。

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ の線形変換が何になるのかを見ておきましょう。 T での $1 \in \mathbb{R}$ の行き先を $T(1) = c \in \mathbb{R}$ とします。 $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が線形ならば

$$T(x) = T(x \cdot 1) = xT(1) = xc = cx$$

となるので、 T は実数 c による定数倍であることが分かりました。 \mathbb{R} の線形変換は 1 個の実数 c をパラメタに含む変換の族です。このことを \mathbb{R} の線形変換の 自由度 は 1 であると言います。

まとめ 線形変換は原点を固定し、 \mathbb{R}^n の中の直線を直線または点に移す。

Key Words: \mathbb{R}^n の中の直線，変換による像，自由度

問 15. \mathbb{R}^2 において x 軸での折り返しが線形変換となることを確認せよ。

問 16. a が零ベクトルでなければ、平行移動 $T_a(v) = v + a$ は線形変換とならないことを示せ。

問 17. 変換 $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ は直線 $x = y$ を何に移すか？

5. 線形変換と行列

縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点の回りに角度 θ 回転すると,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

になることを説明しましたが、このことをもっと簡潔に表現するため、行列 という概念を導入します。

4個の実数 a, b, c, d を正方形の頂点に並べた $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2次正方行列 (または 2×2 行列, 2行2列の行列など) と呼びます。行列を構成する実数 a, b, c, d を行列の 成分 と呼びます。横ベクトル $(a \ b)$ を, この行列の第1行, $(c \ d)$ を第2行と呼び, 縦ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ を, この行列の第1列, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を第2列と言います。行列の成分は a を (1,1) 成分と呼びます。第1行第1列の成分という意味です。(1, 2) 成分が b , (2, 1) 成分が c , (2, 2) 成分が d です。

さらに, 2次正方行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と2次縦ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の積 $M\mathbf{v}$ を

$$M\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

と定義します。2次正方行列と2次縦ベクトルの積は2次縦ベクトルになります。 $M\mathbf{v}$ は M を構成する2つの縦ベクトルの x, y を係数とする線形結合になっています。

$$M\mathbf{v} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

この積の定義により, R_θ による点 (x, y) の回転を, 行列 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ と縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の積で

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表すことができます。このことを

原点を中心とする角度 θ の回転は行列 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ によって表現される
と言います。

\mathbb{R}^2 の線形変換はすべて2次正方行列で表すことができます。線形変換を T とし, 縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が T により $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と変換されるものとします。回転の行列表示を求めたときと

同様、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を x 軸方向と y 軸方向のベクトルの線形結合で表すと、 T の線形性を用いて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= T \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= xT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書き直すことができます。ここで、

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となることがわかります。

逆に、変換 T を行列の積を使って

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と定義すると、この T は線形変換になります。このことを証明するために示すべき等式は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

です。これは直接計算して確かめることはできますが、後で学ぶ行列の演算規則から直ちにしたらがうことなので、ここではこれ以上議論しません。

次の命題が得られました。

命題 2. 平面上の線形変換 T と 2 次正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とは 1 対 1 に対応する。すなわち、両者は次の関係式で結ばれている。

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ \left(T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって \mathbb{R}^2 の線形変換の自由度は 4 です。

例 8. \mathbb{R}^2 の恒等変換 id は単位行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で行列表示されます。すなわち任意のベクトル v に対して $Ev = v$ が成り立ちます。

例 9. 線形変換 T が

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

を満たすとき、 T を表現する行列を求めてみましょう。 T の線形性を使うと

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix},$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix}$$

よって T の行列表示は $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix}$ となります。

次のように考えることもできます。例 3 の等式を使います。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

両辺に T を作用させると

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

例 10. 定数倍 D_c 回転 R_θ 折り返し S_θ は c または θ という 1 個のパラメタを持つ線形変換の族です。平面の線形変換は、2 次正方行列に 1 対 1 に対応しているという意味ではパラメタを 4 個持っています。この線形変換の族には、定数倍、回転、折り返しの他にどんなものが含まれているのでしょうか？例として、次のようなパラメタ t と共に「つぶれていく変換」を考えましょう。

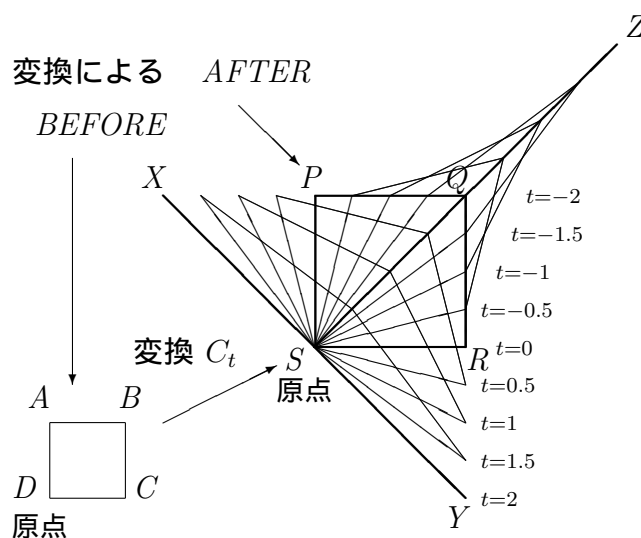


FIGURE 1. つぶれていく変換

すなわち

$$C_t \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & -t \\ -t & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}$$

で定義される線形変換を考えます．この図は， t の値が決まるごとに，左下に書かれた，原点をひとつの頂点とする1辺が1の正方形が，変換 C_t によってどのような図形に移されるかを描いたものです．同じ図に *BEFORE* と *AFTER* を両方描くと重なってしまうので，ずらして描いています． $t = 0$ ではこの変換は2倍する変換 D_2 に一致しています（正方形 $ABCD$ は $PQRS$ に移る．） t が0でなくなると，正方形の C_t による像は菱形になってつぶれて行き $t = \pm 2$ では線分 XY または SZ につぶれます．実際，平面全体がこの線分を含む直線につぶれています．回転や折返しでは図形の形がこのように変形することはありません．

まとめ 平面の回転は回転の中心を原点にとって縦ベクトルで表示すれば線形変換となり，三角関数を成分とする2次正方行列で表現される．一般に2次の正方行列と \mathbb{R}^2 の線形変換が1対1に対応する．

Key Words: 正方行列，行列の成分，行列と縦ベクトルの積，線形変換，行列による表現，単位行列

問 18. x 軸に関する折り返しを表す行列を求めよ．

問 19. \mathbb{R}^2 の線形変換 T が

$$T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

を満たすとする．このとき T の行列表示を求めよ．

問 20. A 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + y \end{pmatrix}$ に対して $A\mathbf{v}$ を求めよ．

B t を実数とする．適当な実数 $\lambda(t)$ に対して

$$\begin{pmatrix} 2 & -t \\ -t & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \lambda(t) \mathbf{v}$$

が成り立つようなベクトル \mathbf{v} を見つけ，そのときの $\lambda(t)$ と共に答えよ．

ヒント：二つの異なる $\lambda(t)$ に対応する答が存在し，どちらも \mathbf{v} は t には依らない定数ベクトルに取れる。

問 21. A \mathbb{R}^2 の線形変換 T_1 が

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x - y \end{pmatrix}$$

を満たすとき, T_1 の行列表示を与える 2 次正方行列を求めよ.

B \mathbb{R}^2 の線形変換 T_2 が

$$T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとき, T_2 の行列表示を与える 2 次正方行列を求めよ.

問 22. A 原点の周りに $\pi/3$ 回転する線形変換を表す行列を求めよ.

B \mathbb{R}^2 の点 $P = (1, 0)$ を中心とする角度 $\pi/3$ の回転で点 (x, y) が移る行き先の点を求めよ.

ヒント: 原点を P にとり直して, 回転を計算する.

問 23. 点 $(2, -1)$ を $(2, 1)$ に, $(-1, 2)$ を $(1, 2)$ に変換する線形変換を表す行列を求めよ.

問 24. $x + 2y = 1$ で定義される直線全体を点 $(1, 1)$ に移すような線形変換を行列表示で与えよ.

6. 線形変換の合成と行列の積

角度 θ_1 の回転と角度 θ_2 の回転を合成するとは, 縦ベクトル v を $v' = R_{\theta_2}(v)$ に変換し, さらに $v'' = R_{\theta_1}(v') = R_{\theta_1}(R_{\theta_2}(v))$ に変換することです. v を v'' に変換する変換を $R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2}$ と書いて R_{θ_1} と R_{θ_2} の合成と言います. 回転の場合は明らかに $R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$ であり, 合成は簡単に求まります. より一般には, 線形変換の合成は行列の積という考え方を導入することで求めることができます.

行列 $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ ($i = 1, 2$) による線形変換を T_i とします. 変換の合成 $T_1 \circ T_2$ は再び行列による線形変換になります. この行列を求めてみましょう.

$$T_1 \circ T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_1 \left(x \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \right) = x T_1 \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + y T_1 \begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

これから $T_1 \circ T_2$ の行列表示は第 1 列が $A_1 \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 \end{pmatrix}$ で, 第 2 列が $A_1 \begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$ であることがわかります. この行列を $A_1 A_2$ と書いて行列 A_1 と A_2 の積と定義します. 成分ごとに書けば

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

です.

回転の合成は, 順序に関わりなく同じ回転になります.

$$R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = R_{\theta_2} \circ R_{\theta_1} = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

しかし，一般には合成の順序により結果が変わります．例えば，問 12 の折り返し S_θ の合成を計算すると

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 & -\cos 2\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta_2 & \sin 2\theta_2 \\ \sin 2\theta_2 & -\cos 2\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\theta_1 - \theta_2) & -\sin 2(\theta_1 - \theta_2) \\ \sin 2(\theta_1 - \theta_2) & \cos 2(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix}$$

となるので $S_{\theta_1} \circ S_{\theta_2} = R_{2(\theta_1 - \theta_2)}$ です．合成の順序を変えると，回転の向きが逆になります．
 $S_{\theta_2} \circ S_{\theta_1} = R_{2(\theta_2 - \theta_1)}$

別の例として，点 (x, y) を $(x + y, y)$ に変換する線形変換 T_1 と点 (x, y) を $(x, x + y)$ に変換する線形変換 T_2 の合成を考えてみましょう．

$$T_1 \circ T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} x \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (x + y) \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix}$$

ですから， $T_1 \circ T_2$ は点 (x, y) を $(x + y, x + 2y)$ に変換する線形変換となります．一方， $T_2 \circ T_1$ は，

$$T_2 \circ T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ (x + y) + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

より，点 (x, y) を $(2x + y, x + y)$ に変換する線形変換となり，両者は一致しません．行列表示で考えると以下ようになります． T_1, T_2 に対応する行列は

$$T_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので，合成との対応は

$$T_2 T_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, T_1 T_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

すなわち，行列の積は順序によって結果が変わる場合がある（その方が普通）ということです．行列 A, B の積が順序に依らないとき A と B は 可換，そうではないとき 非可換 といいます．

まとめ 線形変換の合成には行列の積が対応する．行列の積は一般には非可換である．

Key Words: 線形変換の合成，行列の積，可換，非可換

問 25. 2 次行列 X, Y を $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき行列の積 XY と YX を計算せよ．

問 26. A 回転 R_{θ_1} に対応する行列と，回転 R_{θ_2} に対応する行列の積を計算し，回転 $R_{\theta_1 + \theta_2}$ に対応する行列と比較する．このとき，この二つの行列が一致するということから得られる三角関数の等式が，何であるかを確認せよ．

B 回転 $R_{2\theta}$ と x 軸での折り返し S_0 の合成が折り返し S_θ になることを対応する行列の積を用いて確認せよ。

問 27. A 平面の x 軸を，原点を中心として角度 θ 回転して得られる直線を l_θ と書く．極座標で表したとき (r, ϕ) となる点を直線 l_θ で折り返した点の極座標を求めよ．

B 平面の平行ではない 2 直線 l_1, l_2 が点 P で交わっているとする．直線 l_i ($i = 1, 2$) での折り返しを S_i とする．また， P を中心とする反時計回りの角度 θ の回転で， l_2 が l_1 に移るものとする．このとき線形変換の合成 $S_1 \circ S_2$ が点 P を中心とする角度 2θ の回転になることを， P を原点とする極座標を用いて示せ．

7. $m \times n$ 行列

$m \times n$ 個の実数を m 行 n 列に並べたものを， m 行 n 列の行列， $m \times n$ 行列， (m, n) 型の行列などと呼びます．この行列を表すのに， (i, j) 成分を使って $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ と書くことがあります．括弧の外側に行と列の添字の動く範囲を書きます．上が行，下が列に対応しています．正方行列の場合は $A = (a_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ と書きますが，この場合は左が行，右が列です．

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} n \text{ 列} \\
 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (i, j) \text{ 成分} \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} m \text{ 行}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 j \\
 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ & & & a_{ij} & & \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

例 11.

$$\left(\frac{1}{i+j} \right)_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

同じ (m, n) 型の行列の間に和と実数倍が成分ごとに定義されます．

$$\begin{aligned}
 A + B &= (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} + (b_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}, \\
 cA &= c(a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = (ca_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}
 \end{aligned}$$

(l, m) 型の行列 A と (m, n) 型の行列 B の積 $C = AB$ を次のように定義します。

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

$$AB = (a_{ik})_{\substack{i=1,\dots,l \\ k=1,\dots,m}} (b_{kj})_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \left(\sum_{j=1}^m a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,n}}$$

AB は (l, n) 型の行列になります。ここで $\sum_{j=1}^m$ は和を表わす記号で次のように使います。

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 = 5050, \quad \sum_{k=1}^{100} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2 + 100^2 = 338350$$

例 12. 果物詰め合せについてもう一度考えてみましょう。2つの要素を変えてみます。第1に百万遍の他に農学部前のコンビニでも同じ詰め合わせ1と2を販売するという設定にします。さらに、詰め合わせの中に桃も加えましょう。

このとき、下記の A, B 二つの行列が作れます。 A は百万遍と農学部前を行のラベルに、詰め合わせの1、2を列のラベルにした行列であり、 B は詰め合わせの1、2を行のラベルに、果物の種類を列のラベルにした行列です。数字の意味は販売数と果物の個数です。このとき、各店舗で果物がそれぞれ何個売れたかという数字は、行列 AB の成分として計算されることとなります。例えば

$$23 \cdot 3 + 11 \cdot 5 = 124$$

が百万遍で売れたみかんの個数です。

FIGURE 2. 果物詰め合せと行列の積

	詰合せ 1 2		みり かん 桃 んご		みり かん 桃 んご			
$A =$	百万遍 農学部	$\begin{pmatrix} 23 & 11 \\ 17 & 21 \end{pmatrix}$	$B =$	詰合せ1 詰合せ2	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$AB =$	百万遍 農学部	$\begin{pmatrix} 124 & 57 & 79 \\ 156 & 55 & 97 \end{pmatrix}$

ベクトルを行列と見なすことができます。例えば、2次の縦ベクトルは 2×1 行列と考えられます。そう考えて行列の積を計算するとどのような状況が起きるでしょうか？

先に定義した2次正方行列と2次縦ベクトルの積は、 2×2 行列と 2×1 行列の積を計算していることとなります。 m 次縦ベクトル v と n 次横ベクトル ${}^t w$ の積 $v {}^t w$ は常に定義できて $m \times n$ 行列になりますが、 ${}^t w v$ は $m = n$ の時にのみ意味を持ち、結果は1行1列すなわちスカラー（実数）になります。

例 13. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ${}^t w = (3 \ 1)$ とすると $v {}^t w = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, ${}^t w v = 5$ となります.

まとめ $m \times n$ 行列は $m \times n$ 個の実数を m 行 n 列に並べたものである. 型の合う行列の間に和, 実数倍, 積が定義される.

Key Words: $m \times n$ 行列

問 28. 次の積を計算せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問 29. 次の積を計算せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$$

問 30. 行列 A, B を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の積 AA, AB, BA, BB のうち定義できるものを計算せよ.

問 31. A 次の行列 X, Y, Z を書き下せ.

$$X = (x^i y^j)_{\substack{i=0,1,2 \\ j=0,1}}, Y = (x^i y^j)_{\substack{j=0,1 \\ i=0,1,2}}, Z = (x^j y^i)_{\substack{i=0,1,2 \\ j=0,1}}$$

B 行列 A, B, C を

$$A = (x^i y^j)_{\substack{i=0,\dots,l-1 \\ j=0,\dots,m-1}}, B = (z^{-j} w^k)_{\substack{j=0,\dots,m-1 \\ k=0,\dots,n-1}}, C = (x^i w^k)_{\substack{i=0,\dots,l-1 \\ k=0,\dots,n-1}}$$

と定義する. このとき

$$AB = \frac{1 - (y/z)^m}{1 - y/z} C$$

が成り立つことを示せ.

8. 行列の演算規則

行列に対して積，和，実数倍などの演算を定義しました．これらは、数の場合の積や和に対応する行列の演算です．行列の演算（積，和，実数倍）に対して，数の場合と同様に以下の等式が成り立つことを注意します．ここで A, B, C は行列を表し， c は実数とします．行列の型は互いに積や和が意味を持つようになっているものとします．

$$\text{結合法則} \quad (AB)C = A(BC),$$

$$\text{分配法則 1} \quad A(B + C) = AB + AC,$$

$$\text{分配法則 2} \quad (A + B)C = AC + BC,$$

$$\text{実数倍の可換性} \quad (cA)B = A(cB) = c(AB)$$

いくつか例を挙げましょう．

$$\text{結合法則} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{分配法則} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{実数倍の可換性} \quad c = 5, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(cA)B = (5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A(cB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left(5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$c(AB) = 5 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \end{pmatrix}$$

これらの等式が成り立つことは、直接計算で確かめられます。例えば、結合法則は

$$\sum_k \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_j a_{ij} \left(\sum_k b_{jk} c_{kl} \right)$$

という等式にほかなりませんが、両辺それぞれ、実数の場合の分配法則を使うと、示すべき等式は

$$\sum_k \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_j \left(\sum_k a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)$$

になります。ところが、これは和の順序交換

$$\sum_k \left(\sum_j X_{jk} \right) = \sum_j \left(\sum_k X_{jk} \right)$$

が成り立つことから明らかです。

実は、変換に関して一般的に結合法則が成り立つことから、線形変換との対応を通して、行列の結合法則が導かれます。行列に関する他の演算規則も線形変換についての規則からの帰結になります。

数の場合と同じように n 次正方行列 A の ベキ乗 A^k ($k \in \mathbb{N}$) が $k = 0$ から出発して帰納的に定義できます。

$$A^0 = E, A^{k+1} = AA^k$$

ここで E は n 次単位行列です。

単位行列については、型が合っていれば、 $AE = A, EB = B$ という演算規則が成り立ちます。すべての成分が 0 の行列を O と書きます。いろんな型の零行列が存在しますが、すべてをこの記号で表します。こちらは $AO = O$ と $OB = O$ という演算規則を満たします。ここに現れる O は左辺と右辺で同じ型とは限りません。

まとめ 線形変換の線形性は、行列の演算規則につながっている。

Key Words: 行列の演算, 結合法則, 分配法則, 実数倍の可換性, ベキ乗

問 32. 3×3 行列 M を次のように定義する。

$$M = \begin{pmatrix} xa & xb & xc \\ ya & yb & yc \\ za & zb & zc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (a \ b \ c)$$

このとき

$$g = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

が実数になることを用いて, M^{100} を計算せよ.

ヒント: 結合法則を利用する.

問 33. A α, β を実数として, $M(\alpha, \beta) = \alpha E + \beta A$ と定義する. このとき $M(\alpha, \beta)$ と $M(\gamma, \delta)$ は可換になることを示せ.

B 2次正方行列 A_1, A_2, A_3 を次のように定義する.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

さらに, これを使って $N(\alpha, \beta) = \alpha A_1 + \beta A_2$ と定義する. このとき

$$N(\alpha, \beta)N(\gamma, \delta) - N(\gamma, \delta)N(\alpha, \beta) = 2(\alpha\delta - \beta\gamma)A_3$$

となることを示せ.

問 34. A 2次行列 A, B を

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ -1), B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1),$$

と定める. このとき次の等式が成り立つことを確かめよ.

$$A^2 = A, B^2 = B, AB = BA = O, A + B = E$$

B 次の等式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3A + B$$

このことを用いて

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 3^n & 1 - 3^n \\ 1 - 3^n & 1 + 3^n \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

問 35. M が 3×2 行列で, N が 2×3 行列のとき, 積 MN が 3 次の単位行列になることはあるか? 単位行列になる例を挙げるか, ならない理由を述べよ.

9. 逆行列の計算

一般に， \mathbb{R}^n の変換 T に対して，変換 S が T の 逆変換 とは， $T \circ S = S \circ T = \text{id}$ が成り立つことです．このとき

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{T} & Tv \\ \parallel & & \parallel \\ Sw & \xleftarrow{S} & w \end{array}$$

によって， \mathbb{R}^n での 1 対 1 対応が与えられます．

例 14. 定数倍 D_c の逆変換は $D_{c^{-1}}$ である．

平行移動 T_a の逆変換は T_{-a} である．

\mathbb{R}^2 の原点回りの回転 R_θ の逆変換は逆向きの回転 $R_{-\theta}$ である．

\mathbb{R}^2 の原点を通る直線を軸とする折り返し S_θ の逆変換はそれ自身である．

変換が線形変換の場合は，逆変換に対応する行列として逆行列が定義される．すなわち，逆変換の定義を読み直して， n 次正方行列 A に対して， B が $AB = BA = E$ を満たすとき， B を A^{-1} と書いて A の 逆行列 と呼びます．

逆行列は存在するとは限りませんが，存在するならば，ただひとつです．すなわち， B と B' がどちらも A の逆行列であれば $B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B'$ となって， B と B' は一致します．

正方行列 A が逆行列を持つとき A を正則行列といいます．そうでないとき A は特異行列であるといいます．以下，逆行列が簡単に求まる 3 つの場合について学びましょう．どのようなときに逆行列が存在するのかわからないのを見てください．

第 1 の場合は対角行列です．

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ が $i \neq j$ ならば $a_{ij} = 0$ を満たすとき A を 対角行列 と言います．対角行列が正則であるための必要十分条件は対角成分が 0 にならないことです．このとき逆行列は対角線の各成分を逆数にした対角行列です．これは対角行列どうしの積は対角成分どうしの積なので明らかです．

対角成分に 0 があれば，逆行列は存在しません． $a_{ii} = 0$ とすると，任意の n 次正方行列 $(b_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ に対して

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{ii} b_{ii} = 0$$

となるので $AB = E$ とはなりません．

第 2 の場合はべき零行列に関連する場合です．

ある自然数 k に対して $N^k = O$ が成り立つとき, N をべき零といいます. N がべき零であれば, $E - N$ の逆行列は $E + N + N^2 + \dots + N^{k-1}$ で与えられます. このことは

$$(E - N)(E + N + N^2 + \dots + N^{k-1}) = (E + N + N^2 + \dots + N^{k-1}) - (N + N^2 + \dots + N^k) \\ = E - N^k = E$$

から分ります. 逆順の積も同様です. では, どんな行列がべき零になるのでしょうか.

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ において $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ が成り立つとき, A を 上三角行列 と言います.

例 15. 上三角行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

下三角行列も同様に定義されます. 以下は上三角行列に限って議論します.

N が上三角行列であり, さらに対角成分がすべて 0 ならば (例えば $n = 4$ とすると)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので N はべき零です.

注意 3. 正方行列 X に対して $E + X + X^2 + \dots$ を X の ノイマン級数 といいます. X がべき零であれば, ノイマン級数は有限和となり $E - X$ の逆行列を与えます.

第 3 の場合は, 正則行列の積です.

n 次正方行列 A, B が, ともに逆行列を持てば, $B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆行列になります.

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = 1$$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$ も同様です.

これらを組み合わせると, 例えば次のことが分ります.

命題 3. 上三角行列 $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ が逆行列を持つための条件は対角線の成分が 0 でない (すべての i に対して $a_{i,i} \neq 0$) ことである.

(証明) まず, すべての i に対して $a_{i,i} \neq 0$ とすると, A の対角線成分を並べた対角行列 D は正則であり

$$N = E - D^{-1}A$$

は $N^n = 0$ を満たす. よって $A = D(E - N)$ は正則である.

逆に $1 \leq i \leq n$ に対して

$$a_{jj} \begin{cases} \neq 0 & 1 \leq j < i \\ = 0 & j = i \end{cases}$$

となったとする．零でない n 次縦ベクトル v で $Av = 0$ となるものが存在することを示す．それができたとすると， A^{-1} が存在すると仮定すると $0 = A^{-1}0 = A^{-1}Av = Ev = v$ となって矛盾．よって A は特異行列である．

行列 A は次の形をしている．

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{b} & C_1 \\ \mathbf{0} & 0 & C_2 \\ O & 0 & C_3 \end{pmatrix}$$

B は $(i-1) \times (i-1)$ の上三角行列であり，上で証明したことから，正則である． \mathbf{b} は $(i-1)$ 次縦ベクトルである．そこで

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -B^{-1}\mathbf{b} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考えると $Av = 0$ となる．

(証明終)

例 16.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \left(1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} = 1 - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

まとめ： 逆行列と逆変換が対応する．逆行列の計算方法をいくつかの基本的な場合に学んだ．

Key Words: 逆変換，逆行列，対角行列，上・下三角行列，べき零行列，ノイマン級数

問 36. 次の行列の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

問 37. A 次の 2 つの行列 A, B の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

B 次の行列の逆行列を求めよ．

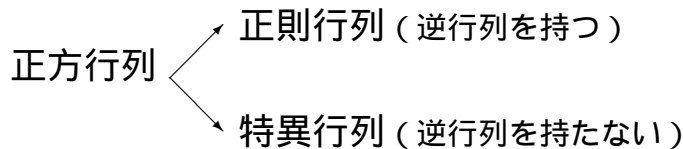
$$AB = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & 0 \\ a & 1+b^2 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

問 38. 次の行列はべき零であることを示せ．

$$N = x \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} (2 \ 1 \ 0) + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ -2) = \begin{pmatrix} 4x+y & 2x+y & -2y \\ -8x-y & -4x-y & 2y \\ -2x & -x & 0 \end{pmatrix}$$

10. 2 次の正則行列と特異行列

正方行列は次のように分類されました．



分類の指標を与えるのが行列式です．2 次の場合の行列式は次のようになります．

定義 1 (2 次行列式). $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $|A| = ad - bc$ を 行列式 という．

命題 4. 2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が逆行列を持つための必要十分条件は行列式が 0 でないこと ($|A| = ad - bc \neq 0$) であり, その場合の逆行列は次の公式で与えられる．

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(証明) 対角成分を入れ替え, 残りの成分の符号を変えた行列 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を考えると次が成り立つ．

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad + b(-c) & a(-b) + ba \\ cd + d(-c) & c(-b) + da \end{pmatrix} = (ad - bc)E$$

同じく $\tilde{A}A = (ad - bc)E$ である．よって $|A| = ad - bc \neq 0$ であれば逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \tilde{A} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられるので， A は正則行列である．

$|A| = 0$ ならば $A\tilde{A} = O$ となる．逆行列 A^{-1} が存在する仮定すると

$$A\tilde{A} = O \Rightarrow A^{-1}A\tilde{A} = O \Rightarrow \tilde{A} = O$$

となって， $A = O$ となる．よって $E = A^{-1}A = O$ となって矛盾である．したがって A の逆行列は存在しない．すなわち A は特異行列である．

(証明終)

2次正則行列の逆行列は 割って入れ替え符号を変える と覚えましょう．

補題 1. 2次正方行列 A が特異行列になることと，適当な2次縦ベクトル u, w によって

$$A = u^t w$$

と表されることは同値である．

(証明) A がこの形であれば，行列式 $|A|$ が0になることは容易に確かめられる．

逆に $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が特異，すなわち $ad - bc = 0$ とすると，

$$(a, b) = (0, 0) \text{ であれば, } A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (c \ d)$$

$$a \neq 0 \text{ であれば } d = bc/a \text{ となるので, } A = \begin{pmatrix} 1 \\ c/a \end{pmatrix} (a \ b)$$

$$b \neq 0 \text{ であれば } c = ad/b \text{ となるので, } A = \begin{pmatrix} 1 \\ d/b \end{pmatrix} (a \ b)$$

(証明終)

次に正則行列と特異行列のそれぞれの特徴について学びましょう．

正則行列の特徴

正則行列 A による線形変換は以下のような意味で「つぶれない」ということが特徴です．

- $v \neq 0 \Rightarrow Av \neq 0$ (零ベクトルでなければつぶれない)
- $\{Av \mid v \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$ (平面の行き先は平面の全体)
- $v \mapsto A(v)$ は平面と平面の1対1対応を与える(逆変換を持つ変換の一般的な性質)

特異行列の特徴

特異行列 A による線形変換は以下のような意味で「つぶれる」ということが特徴です．

- $A = O \Rightarrow$ 平面全体が原点につぶれる
- $A \neq O \Rightarrow$ この場合の「つぶれる」には2つの意味があります。
 $A = u {}^t w$ ($u, {}^t w \neq 0$) としましょう。

(i) 0でないベクトルが原点につぶれる

すなわち ${}^t w n = 0$ となる0でないベクトル n があります。

例えば, ${}^t w = (1 \ 3)$ に対して $n = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

このとき $An = (u {}^t w)n = u ({}^t w n) = 0$ となって, n がつぶれています。

(ii) 平面全体が原点を通る一本の直線につぶれる

任意のベクトル $v \in \mathbb{R}^2$ に対して ${}^t w v$ は実数なので

$$Av = (u {}^t w)v = u ({}^t w v) = ({}^t w v)u$$

となって Av は原点を通る直線 $\{tu \mid t \in \mathbb{R}\}$ 上にあります。すなわち平面全体がこの直線につぶれています。

「つぶれる」の例を見ておきましょう。特異行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 3)$ を考えます。

- 原点につぶれるベクトル

$n = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとると $An = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 3) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ となります。

- 平面全体の行き先

任意のベクトル $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して $Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 3) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+3y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ となるので,

平面全体が直線 $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ につぶれています。

例 17. 鶴亀算を行列の言葉で考えてみましょう。

「鶴と亀が合わせて r 匹います。足の数は s 本です。鶴と亀は何匹ずついるのでしょうか？」

鶴の数を x 亀の数を y とすると, 次の連立一次方程式が得られます。

$$\begin{aligned} x + y &= r, \\ 2x + 4y &= s \end{aligned}$$

この方程式はベクトルと行列を使って

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix},$$

$$A\mathbf{v} = \mathbf{b}$$

と表すことができます．

逆行列 $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ を使うと，解は

$$\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4r - s \\ -2r + s \end{pmatrix}$$

の形に求められます．

実際の鶴亀算では，答の x, y は 0 以上の整数という条件がつくので，任意の r, s に対して，条件を満たす解が存在するわけではありません．しかしこの条件を考えずにこの連立一次方程式を考えるならば， $A^{-1}\mathbf{b}$ は普遍的に方程式の解を与えています．

ここでは次のような問題を考えてみましょう．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

に対して方程式 $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ を考えたとき，解の存在と解全体の構造について何がいえられるのでしょうか？ A を 連立方程式の係数行列， \mathbf{b} を 定数項（または非斉次項）といいます．

係数行列 A が正則であれば $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ と $\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{b}$ は同値なので，どんな定数項に対しても解は一意的に定まります．

係数行列が 0 であれば，解の存在のための条件は $\mathbf{b} = 0$ であり，この条件の下で任意の \mathbf{v} が解になります．

$A = \mathbf{u} \mathbf{t} \mathbf{w}$ のときを考えましょう． \mathbf{u} も \mathbf{w} も零ベクトルではないとします．このとき解が存在するための条件は \mathbf{b} が直線 $\{t\mathbf{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$ の上にあることです．そこで

$$\mathbf{b} = s\mathbf{u},$$

とすると，解の全体は $\mathbf{t} \mathbf{w} \mathbf{n} = 0$ を満たす \mathbf{n} と $\mathbf{t} \mathbf{w} \mathbf{a} = 1$ を満たす 2 次ベクトル \mathbf{a} を用いると， $\{s\mathbf{a} + t\mathbf{n} \mid t \in \mathbb{R}\}$ という直線であることが分ります．

まとめ 2 次正方行列の正則性は行列式で判定される．正則行列の引き起こす線形変換はつぶれない．2 次特異行列の引き起こす線形変換はつぶれる．

Key Words: 行列式，連立一次方程式の係数行列，定数項

問 39. A 実数 p, q, r, s に対して, 2 次特異行列 A で 2 つの条件

$$(i) \quad A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$(ii) \quad \text{任意の } v \text{ に対して } Av \in \left\{ t \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ が成り立つ}$$

を満たすものを求めよ.

B べき零な 2 次特異行列の自由度はいくつか?

問 40. A \mathbb{R}^2 の線形変換 T に対応する行列が $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるとする. この正則行列の逆行列を求めよ.

B \mathbb{R}^2 内の直線 ℓ が $(a, b) \neq (0, 0)$ であるような $a, b, c \in \mathbb{R}$ によって方程式 $ax + by = c$ で与えられているとする. このとき, 線形変換 T による行き先が ℓ であるような \mathbb{R}^2 内の直線を与える方程式を求めよ.

C 線形変換 T による直線 ℓ の行き先の直線を与える方程式を求めよ.

問 41. α, β を実数とする. 2 次正方行列 A で

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を満たすものを求めよ.

問 42. (x, y) についての方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 3 \end{pmatrix}$$

が解を持つための s についての条件を求めよ. また, 条件が満たされているとき, 解の全体はどのような集合になるか?