京都大学オープンコースウエア

構造力学II及演習

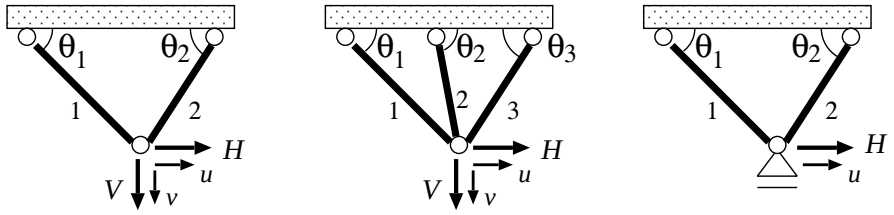
工学部地球工学科

田村　武

6.　2次元弾性トラス

2次元空間でのトラスについて同様の考察をするが，2次元トラスの基礎理論も1次元モデルにほとんど含まれており，同じことを2回説明することになる．重複する理論の詳しい説明は繰り返さないので，必要に応じて1次元モデルの理論を読み返して欲しい．ここで説明する2次元トラスは図6.1の3種類である．図中の(a)は部材数2の静定トラス，(b)は部材数3の不静定トラスである．そして(c)は部材数2であるが鉛直方向に固定された支点のある不静定トラスである．部材数が大きいトラスでも計算量が増えるだけであり，この3つのトラスでほとんどの重要な問題をカバーできる．

まず，これまでばねモデルを使用してきたが，ここからトラスの部材を使用する．本質的に両者は同じであるが，実際の構造物らしくする．ここで注意すべきは，トラス部材の「ばね定数」の値である．図6.2に示すように長さl，断面積Aの部材が引張力Sを受けて，**伸び**δを生じたとする．単位断面積当たりの力を**応力**といい，σと書く．また，単位長さ当たりの伸びを**伸びひずみ**あるいは単に**ひずみ**といい，ϵと書く．応力とひずみが比例するような材料を**弾**



(a) 静定トラス　(b) 不静定トラス　(I)　(c) 不静定トラス　(II)

図 6.1　代表的な2次元トラス

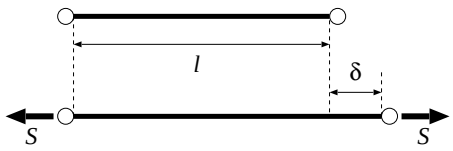


図 6.2 部材力による部材の伸び

性体という．その比例定数が **Young 率**であり，E と書く．

$$\sigma = E\ \epsilon \tag{6.1}$$

この式に先ほどの部材の諸量を代入すると

$$\frac{S}{A} = E\ \frac{\delta}{l} \tag{6.2}$$

となる．これは

$$S = \frac{EA}{l}\ \delta \quad \text{あるいは} \quad \delta = \frac{l}{EA}\ S \tag{6.3}$$

と書ける．この式は EA/l がばね定数 k に相当することを意味している．以下では式（6.3）を用いながら，応力法による上記 3 つのトラスの解法を説明する．

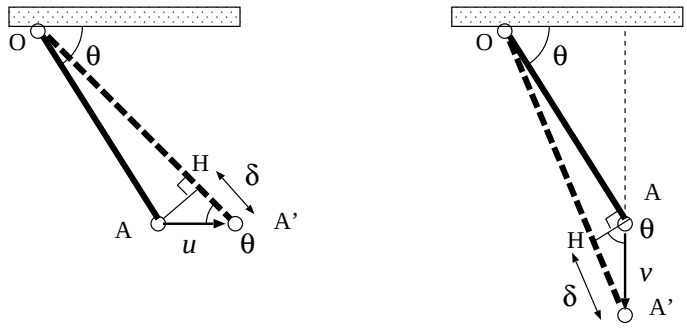
6.1 2 次元トラスの部材の伸び

2 次元あるいは 3 次元トラスの力学において，とても重要でありながらあまり強調されていないのが，**節点**（**ヒンジ**）の変位から部材の伸びを計算する方法である．図 6.3(a) にように水平線と θ の角度をなす部材 OA の節点 A が A' まで水平に u だけ右へ変位したとする．ただし，u の大きさは部材の長さに比べて十分に小さいとしておく．この場合，部材の伸び δ は，A から OA' への垂線の足 H と A' の長さとみなしてよい．右下の角度が θ で近似されるので

$$\delta = u \cos\theta \tag{6.4}$$

で計算できる．一方，同様に鉛直変位 v に対しては同図 (b) から

$$\delta = v \sin\theta \tag{6.5}$$



(a) u による伸び　　(b) v による伸び

図 6.3　水平，鉛直変位による部材の伸び

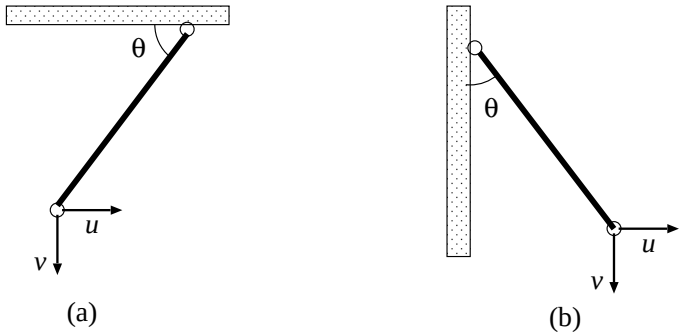
で計算できる．このような計算ができるとする体系を**微小変形理論**という．u と v が同時に起 これば両者を加え合わせればよい．

[**例 6.1**] 図 6.4(a),(b) に示す部材の伸びはそれぞれ

$$\delta = -u\cos\theta + v\sin\theta \tag{6.6}$$

$$\delta = u\sin\theta + v\cos\theta \tag{6.7}$$

である．u, v にかかる係数は $\cos\theta$ あるいは $\sin\theta$ であるので，迷ったときは $\theta = 0$ あるいは $\theta = \pi/2$ という極端な場合を考えればよい．また，縮むときには負号がつく．



(a)　　(b)

図 6.4　部材の伸び

6.2 2 次元トラスの仮想仕事の原理

1 次元モデルで説明した仮想仕事の式はそのまま 2，3 次元トラスでも成立する．そのことを示す．まず，図 6.1(a) のトラスの変形の式とつりあい式を書く．なお以下で，u, v は移動可能な節点におけるそれぞれ右向きの水平変位および下向きの鉛直変位とする．H, V はそれぞれ u, v に対応する向きの荷重である．

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\cos\theta_2 & \sin\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \qquad [B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\delta}] \tag{6.8}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix} \qquad [B^T\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}] \tag{6.9}$$

ここで右の [ ] 内の式はそのベクトル表示である．もっとも注意すべきは，いわゆる「**成分ルール**」に則り各ベクトルを定義すると，変形の式に現れる行列 B がつりあい式では B^T として再び登場することである．同様に図 6.1(b) のトラスでは

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\cos\theta_3 & \sin\theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \qquad [B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\delta}] \tag{6.10}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & -\cos\theta_3 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \sin\theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix} \qquad [B^T\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}] \tag{6.11}$$

となる．図 6.1(c) のトラスの変位の自由度は 1 であるが，つりあい式と変形の式は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ -\cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \qquad [B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\delta}] \tag{6.12}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \end{pmatrix} \qquad [B^T\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}] \tag{6.13}$$

となって，やはり B と B^T が現れる．本書でいう「成分ルール」に従って変形の式とつりあい式を行列を使って表示する場合，いかなるトラスに対しても必ず B と B^T が現れる．この事実が構造力学の理論構成に決定的な役割を果たし

ている．その 1 つの帰結が**仮想仕事の原理**である．実際，それぞれのトラスの変形の式とつりあい式を組み合わせて

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}) = (B^T \boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{S}, B\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\delta}) \tag{6.14}$$

とたどれば

$$(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\delta}) = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}) \tag{6.15}$$

なる**仮想仕事の式**が成立することがわかる．1 次元の場合では式（3.1）のように単純な恒等式からも仮想仕事の式を説明できるが，2，3 次元トラスではそれを一般化した線形代数学の恒等式

$$(B^T \boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{S}, B\boldsymbol{u}) \tag{6.16}$$

を用いるのが簡単である．式（6.15）には見えないが，これを支配しているのは B 行列である．

図 6.1 の 3 つのトラスで仮想仕事の式（6.15）を具体的に書けばそれぞれ

$$Hu + Vv = S_1\delta_1 + S_2\delta_2 \tag{6.17}$$

$$Hu + Vv = S_1\delta_1 + S_2\delta_2 + S_3\delta_3 \tag{6.18}$$

$$Hu = S_1\delta_1 + S_2\delta_2 \tag{6.19}$$

となる．むろん，変形量と力学量は独立であって，いかなる相互関係も不要である．どちらかを仮想系として「$^-$」を付けて用いることが多い．例えば，単位荷重法ではつりあい系は仮想量である．なお，もう一度繰り返しておくが，これらの仮想仕事の式は力学的に証明される式ではない．仮想仕事の式は恒等式（6.16）の「力学的語呂合わせ」である．

6.3　2 次元弾性静定トラスの解法

計算を容易にするため図 6.1(a) のトラスで $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$ のように単純化する．図 6.5(a) に示す 2 次元弾性静定トラスに鉛直荷重 P が作用した場合の荷重点の沈下量 v を応力法で求める．以下，特に断らない限り各部材の断面積は

A，Young 率は E とする．解法の順序は 1 次元の場合とまったく同じである．つりあい式（6.9）から

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{\sqrt{2}} \tag{6.20}$$

であり，式（6.3）から

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{Pl}{\sqrt{2}EA} \tag{6.21}$$

となる．ここで変形の式（6.8）を解けば 2 つの変位成分は求められるが，**応力法**ではそれをする代わりに**単位荷重法**を用いて個々の成分を計算する．図 6.5(b) のように求めたい方向，すなわち，鉛直下向きに単位の仮想荷重を作用させる．このときの仮想の部材力は

$$\overline{S}_1 = \overline{S}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{6.22}$$

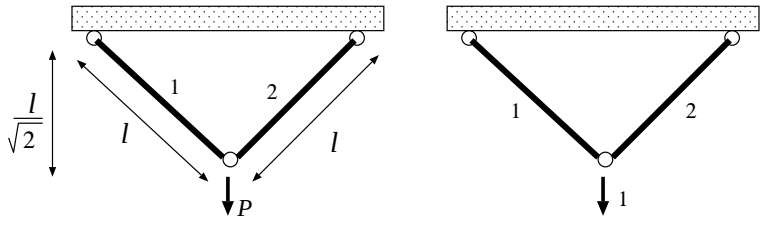
である．式（6.17）において $H = 0$，$V = 1$（正確には $\overline{H} = 0$，$\overline{V} = 1$）であることに注意して

$$v = \overline{S}_1\delta_1 + \overline{S}_2\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{Pl}{\sqrt{2}EA} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{Pl}{\sqrt{2}EA} = \frac{Pl}{EA} \tag{6.23}$$

なる解を得る．このように弾性静定トラスの応力法による解法は，つりあい式から部材力を，部材力から伸びを，そして仮想荷重の原理を用いて節点変位を順次，求めることになる．

以下は蛇足である．式（6.20）と式（6.22）を比較すると

$$\overline{S}_1 = \frac{dS_1}{dP}, \qquad \overline{S}_2 = \frac{dS_2}{dP} \tag{6.24}$$



(a) 実際の系　　(b) 仮想つりあい系

図 6.5　2 次元弾性静定トラス

であることがわかる．したがって，式（6.23）は

$$v = \overline{S}_1\delta_1 + \overline{S}_2\delta_2 = \frac{dS_1}{dP}\frac{S_1 l}{EA} + \frac{dS_2}{dP}\frac{S_2 l}{EA} = \frac{dU}{dP} \tag{6.25}$$

となる．ここに

$$U(P) = \frac{S_1^2 l}{2EA} + \frac{S_2^2 l}{2EA} \tag{6.26}$$

は**補ひずみエネルギー**であり，式（6.25）は **Castigliano の定理**を意味している．

2 次元の不静定トラスの解法についてはここで述べないが，基本的な考え方は 1 次元トラスの場合と同様である．すなわち，つりあい式のみでは部材力が確定できないが，不足する方程式を適合条件で補うことになる．詳細は教科書に説明されている．