京都大学オープンコースウエア

構造力学II及演習

工学部地球工学科

田村　武

5.　応力法によるトラスの解析

現代的な計算力学ではいわゆる「変位法」を用いることに対して，構造力学では伝統的に**応力法**を用いることが多い．計算機が発達した今日，その存在理由は，古典的な応力法では「力学の個々の式をつぶさに吟味しながら解を出す」という教育的効果が大であるからである．本章では応力法による静定構造および不静定構造の解法を示す.

5.1　静定構造の解法

図 5.1 に示すように同じばね定数 k をもつ 2 本弾性ばね構造の 2 つのヒンジに外荷重 F_0 と $2F_0$ が作用している．問題は 2 つのヒンジに生じる変位 u_2, u_3 と 2 つのばねに発生する部材力 S_1, S_2 を求めることである．これは静定構造である．つりあい式は

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 2F_0 \end{pmatrix} \qquad [B^T \boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}] \tag{5.1}$$

である．また，変形の式：

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad [B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\delta}] \tag{5.2}$$

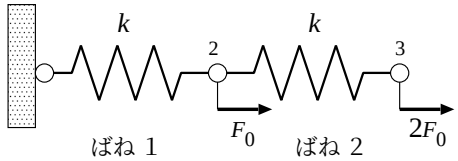

図 5.1　2 本弾性ばね構造

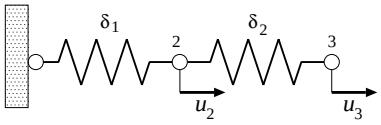

図 5.2 実際に生じている変形

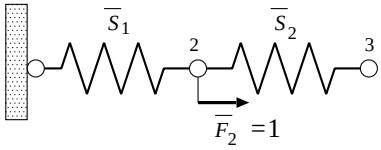

図 5.3 u_2 を求めるための仮想つりあい系

である．ただし，$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{\delta}$ および $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{u}$ はそれぞれ「成分ルール」に従って定義されている．構造力学における応力法は，式（5.1）のように部材力で表したつりあい式を主たる方程式とし，まず，部材力を求めることに徹する．そして最後に変位を求める．

つりあい式（5.1）の係数行列は逆行列をもつ．実際にこれを解くと

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3F_0 \\ 2F_0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

となる．次にばね定数を用いて 2 つのばねの伸びが計算できる．

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3F_0/k \\ 2F_0/k \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

そこで登場するのが**仮想仕事の式**，特に**仮想荷重の原理**である．「変形の式を解く（積分する）」かわりに「つりあい式を解く（積分する）」ことに置き換える．むろん変形の式（5.2）を直接に解けば一挙にすべての変位が求められるが，**2.1** で説明したように「裏の方程式」，すなわち，変形の式と共役なつりあい式を用いて解く．仮想荷重の原理を用いる場合には特定のヒンジの変位ごとに計算する． 問題は図 5.2 に示すように各ばねの伸び δ_1, δ_2 が既知のとき，変位 u_2 あるいは u_3 を求めることである．まず，用いる仮想荷重の原理を表す式は

$$\overline{F}_2 u_2 + \overline{F}_3 u_3 = \overline{S}_1 \delta_1 + \overline{S}_2 \delta_2 \tag{5.5}$$

である．次に適当な仮想のつりあい系を考える．これは実際に生じている現象とは無関係な架空のつりあい系である．いま，u_2 を求めることにする．式 (5.5) を見れば右辺には 2 つの変位があるので，図 5.3 に示すように $\overline{F}_2 = 1, \overline{F}_3 = 0$ なる仮想のつりあい系をとる．右辺はそのまま求めたい u_2 となる．そこでこれらの外力に対しつりあい式を解けば，ただちに $\overline{S}_1 = 1, \overline{S}_2 = 0$ がわかる．これを式（5.5）に代入すれば

$$u_2 = \delta_1 = \frac{3F_0}{k} \tag{5.6}$$

を得る．同様にして $\overline{F}_2 = 0, \overline{F}_3 = 1$ なる仮想のつりあい系をとると

$$u_3 = \delta_1 = \frac{5F_0}{k} \tag{5.7}$$

を得る．このように部材の伸びが確定したあと，変位を求めるには，求めたい点に求めたい方向の仮想の単位荷重を作用させ，仮想の部材力を求めて仮想荷重の原理を用いればよい．これを**単位荷重法**という．これは **2.1** で説明したことと同じ内容である．

[**例 5.1**] いまの問題において図 5.4 のように $\overline{F}_2 = 1$ および $\overline{F}_3 = 2$ なる仮想荷重を想定した場合，仮想荷重の原理から何が求まるのであろうか？ 式（5.5）の右辺から明らかのように，この場合には右辺は

$$u_2 + 2u_3 \tag{5.8}$$

となるから，仮想荷重で重みを付けた変位の和が求められる．このとき，つりあい式から $\overline{S}_1 = 3$，$\overline{S}_2 = 2$ であることに注意すれば左辺は

$$3\delta_1 + 2\delta_2 = \frac{13F_0}{k} \tag{5.9}$$

となる．

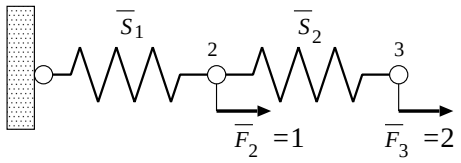

図 5.4　複数の仮想荷重のある場合

5.2 Castigliano の定理

単位荷重法を説明したが，これを表面的に一部修正すると **Castigliano の定理**を導くことができる．この定理は仮想仕事の式の単なる 1 つの応用に過ぎないことを先の例を用いて説明する.（だからこんな定理は知らなくてもよいが，「知らなくてもよい理由」は知っておくべきである.）変位 u_2 を求めるために用いた仮想荷重の原理の式（5.5）において仮想外力を $\overline{F}_2 = 1, \overline{F}_3 = 0$ としたが，そうするとこの式は

$$u_2 = \overline{S}_1\delta_1 + \overline{S}_2\delta_2 \tag{5.10}$$

となる．ここで右辺と左辺を交換した．また，$\overline{S}_1 = 1, \overline{S}_2 = 0$ であるが，ここでは説明に一般性をもたせるために $\overline{S}_2$ も残しておく．同様に

$$u_3 = \overline{\overline{S}}_1\delta_1 + \overline{\overline{S}}_2\delta_2 \tag{5.11}$$

を得る．これらの式の右辺の 2 つの伸びは実際の部材力を用いて

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{S_1}{k} \\ \delta_2 = \dfrac{S_2}{k} \end{cases} \tag{5.12}$$

である．

以上の準備のもとで Castigliano の定理に入っていく．図 5.5 に示すように作用する荷重は当面，F_2, F_3 として区別し，解の形を得たあとでそれらを F_0, $2F_0$ と特定する．つりあい式（5.1）の右辺にこのような外力を仮定し，つりあい式を解けば

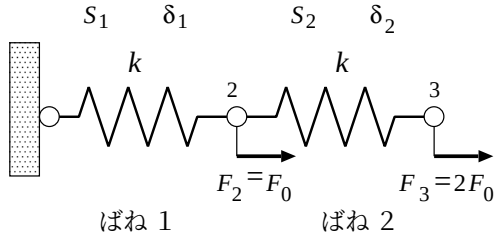

図 5.5 Castigliano の定理による変位計算

$$\begin{cases} S_1 = F_2 + F_3 \\ S_2 = \qquad F_3 \end{cases} \tag{5.13}$$

となる．これからわかるように，$F_2 = 1, F_3 = 0$ とすると左辺の S_1, S_2 はそれぞれ $\overline{S}_1, \overline{S}_2$ となり，一方，$F_2 = 0, F_3 = 1$ とするとこれらは $\overline{\overline{S}}_1, \overline{\overline{S}}_2$ なる値となる．いいかえると式（5.13）は

$$\begin{cases} S_1 = \overline{S}_1 F_2 + \overline{\overline{S}}_1 F_3 \\ S_2 = \overline{S}_2 F_2 + \overline{\overline{S}}_2 F_3 \end{cases} \tag{5.14}$$

の形をしているのである．その結果，式（5.10）および式（5.11）に代入すべき仮想の部材力が

$$\begin{cases} \overline{S}_1 = \dfrac{\partial S_1}{\partial F_2} \\ \\ \overline{S}_2 = \dfrac{\partial S_2}{\partial F_2} \end{cases} \tag{5.15}$$

と見えてしまう．ここに Castigliano の定理の「トリック」があり，荷重を F_2, F_3 と区別した理由がある．すると式（5.10）は

$$u_2 = \frac{\partial S_1}{\partial F_2}\,\frac{S_1}{k} + \frac{\partial S_2}{\partial F_2}\,\frac{S_2}{k} \tag{5.16}$$

となる．ここで**補ひずみエネルギー**なる量 U を

$$U(F_2, F_3) = \frac{S_1^2}{2k} + \frac{S_2^2}{2k} \tag{5.17}$$

と定義すると，式（5.16）は

$$u_2 = \frac{\partial U}{\partial F_2} \tag{5.18}$$

と書ける．このように荷重 F_2 あるいは F_3 の作用している点の荷重方向の変位を求めるときは，F_2 と F_3 による補ひずみエネルギー U を計算し，それを F_2 あるいは F_3 で偏微分すればよい．これを **Castigliano の定理**と呼ぶ．

補ひずみエネルギーを計算するとき，始めから $F_2 = F_0,\ F_3 = 2F_0$ とすると偏微分をしても変位を求めたい荷重点がどこだかわからなくなるので，荷重 F_2 や F_3 で偏微分をとってからこれらを代入する．また，荷重がないところの変位が欲しい場合には，そこに荷重 F があると思って計算し，あとで $F = 0$ とすればよい．

5.3 応力法による不静定構造の解法

図 5.6 に示すように，3 つのばねからなる 1 次不静定構造に 2 つの荷重が作用している．これを変位法で解く．つりあい式は

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 2F_0 \end{pmatrix} \qquad [B^T \boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}] \tag{5.19}$$

であるが，未知数過剰でこの式から一意的な部材力は求められない．そこで，不足する方程式を補うのが「適合条件」である．すなわち，不静定構造の場合，それぞれの部材の伸びの間には制約条件（すなわち，適合条件）を満たさねばならない．この例の場合，すでに式（4.19）なる適合条件を求めている．これは部材の伸びで表されているが，ばね定数 k を用いると

$$\frac{S_1}{k} + \frac{S_2}{k} + \frac{S_2}{k} = 0 \tag{5.20}$$

として表すことができる．これとつりあい式（5.19）とを連立させて解けば

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4F_0/3 \\ F_0/3 \\ -5F_0/3 \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

となる．

以上のように応力法による不静定構造の解法は，つりあい式と適合条件を連立させることになる．つりあい式を解くためには，**不静定次数**だけ方程式が不足するが，その不足分だけの適合条件があるので，全体としては方程式と未知数の数は一致する．

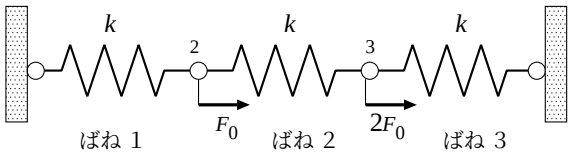

図 5.6 3 本弾性ばねの不静定構造

本章の練習問題

[**問題 5.1**] 図 5.5 で $F_2 = F_0, F_3 = 2F_0$ として，補ひずみエネルギー U を F_0 で微分すると何か得られるか？