京都大学オープンコースウエア

構造力学II及演習

工学部地球工学科

田村　武

4.　不安定，静定，不静定

伝統的な構造力学では，構造を「静定構造」と「不静定構造」の２つに分類することが多い．しかし，数学的な視点あるいはまた力学的な視点から「不安定構造」も分類に加えておく方が自然である．この章では，B 行列あるいはその転置行列を用いて構造の分類を行ない，それぞれの構造の特徴を述べる．そして，仮想仕事の原理がそれぞれの構造にどのように有効に用いられるかについて説明する．

4.1　構造の分類

図 4.1 に示すように (a) 両端自由，(b) 左端固定，(c) 両端固定の条件のもとで 3 つの 3 本ばね構造（トラス構造と見る）がある．ばねの数はいずれも 3 つであるが，それぞれの変位の自由度は 4，3 および 2 である．3 種類の構造に対し，式（2.5）のように変位と伸びの関係を B 行列を用いて書くと，それぞれ

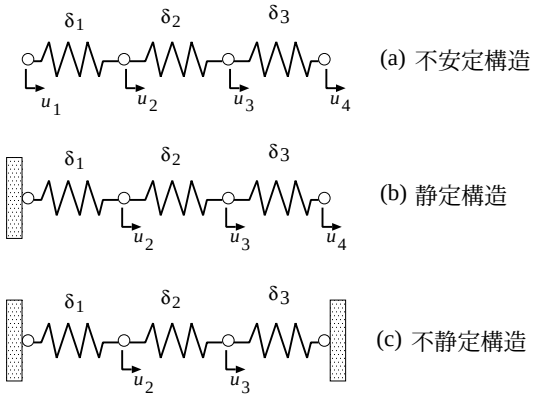


図 4.1　不安定構造，静定構造，不静定構造の変形

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

となる．同様に同じ 3 つの構造に対して，外力とそれにより発生している 3 つのばねの部材力を図 4.2 に示す．ばねの数はどれも 3 であるが，外力の数はそれぞれ 4，3 および 2 である．式（2.9）のように，それぞれのつりあい式を行列を用いて書くと

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

となる．いずれの場合においても「成分ルール」に従う限り，変形の式に出てくる行列 B に対して，つりあい式に出てくる行列は B^T となっている．以上の準備のもとに 3 つの構造特性を考察する．

まずはじめに変形の式あるいはつりあい式が逆行列をもつ行列で書かれるような構造，すなわち，2 つの図の（b）に示す構造を**静定構造**と呼ぶ．

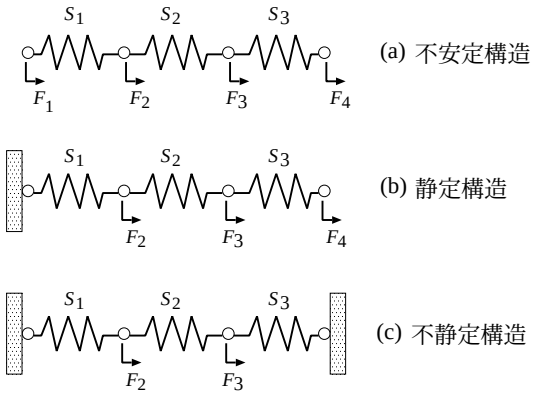


図 4.2　不安定構造，静定構造，不静定構造のつりあい

次にばねが伸び縮みすることなしに構造全体の移動や変形が許されるもの，あるいは，任意の外力に対して構造全体がつりあうかどうかわからない構造，すなわち，2 つの図の（a）に示す構造を**不安定構造**と呼ぶ．

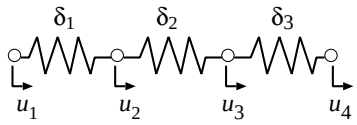
最後にばねの伸びに何らかの制約（適合条件）が必要な構造，あるいは，外力がなくても内部に力が存在し得る構造，すなわち，2 つの図の（c）に示す構造を**不静定構造**と呼ぶ．

以上，不安定構造，静定構造および不静定構造の 3 種類を見てきた．個々の構造で変形の式とつりあい式が行列 B と行列 B^T をもつという双対的な関係にある一方で，静定構造をその中間として不安定構造と不静定構造が双対的な関係にあることがわかる．

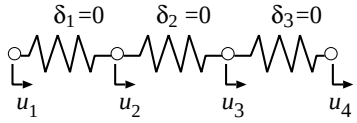
4.2　不安定構造の変位の表現

図 4.3(a) の構造の変形の式は式（4.1）である．これを 4 つの変位に関する連立方程式と見るとき式が 1 本不足しているので，ふつうの意味では解けないが，解がないわけではない．ここではこの方程式の解の表現を考える．

まず方程式（4.1）のように，右辺の定数項に 0 でないものを含む方程式を一



(a) 非斉次方程式に相当



(b) 斉次方程式に相当

図 4.3 伸びのある場合とない場合

般に**非斉次方程式**という．この方程式とは反対に右辺がすべて 0 である方程式：

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

を**斉次方程式**という．幾何学的にいうと図 4.3(b) のように，3 つのばねの伸びがすべて 0 である場合に 4 つの変位を求める問題 である．この斉次方程式の $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ でない解を**非自明解**という．図 4.3(b) に示すように，非自明解とは伸びがまったくない場合にも存在する「0 ばかりではない変位の解」である．方程式が不足している斉次方程式には非自明解が存在する．実際，例えば $u_1 = 1$ と仮定してこの斉次方程式に代入すると $u_2 = u_3 = u_4 = 1$ を得る．この組合せは斉次方程式の 1 つの非自明解である．むろん，$u_1 = 2$ としても自明解を得る．一般に c を任意の数として

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

のような表現はこの「斉次の変形の式」の非自明解となる．すべての自明解に c のような任意のパラメータをそれぞれ乗じて加え合わせた解の表示を斉次方程式の**一般解**という．

さて，もとの非斉次方程式（4.1）を満たす解を 1 つ探す．なんでもよいので，例えば $u_1 = 0$ を方程式（4.1）に代入すると

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1 \\ \delta_1 + \delta_2 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

なる解を得る．これを**特解**という．この解の幾何学的意味は左端のヒンジの変位を固定した場合の節点変位であって，順次，伸びを加え合わせた値が他の 3 つのヒンジの変位となっている．特解はこれ以外に無限にある．

ここで斉次方程式の一般解と非斉次方程式の 1 つの特解と加えると，例えば

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1 \\ \delta_1 + \delta_2 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

を得るが，これはもとの非斉次方程式の一般解という．

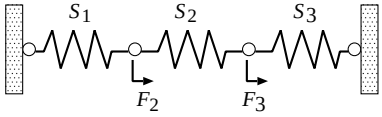
4.3　不静定構造の部材力の表現

前項と同様な内容を不静定構造の部材力について繰り返す．これも未知数過剰の方程式の解を探す問題である．図 4.4(a) の構造のつりあい式は式（4.6）である．ここでも右辺の定数項を 0 とした斉次方程式：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

の一般解と非斉次方程式（4.6）の 1 つの（勝手な）特解を加えると，式（4.6）の一般解を得る．例えば

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_2 \\ 0 \\ -F_3 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$



(a) 非斉次方程式に相当

(b) 斉次方程式に相当

図 4.4 外力のある場合とない場合

を得る．右辺第 2 項はいわゆる特解であり，外力に対しつりあい式を満足する部材力の１つの組合せを表す．この解の場合，$S_2 = 0$ となる解を求めた．これは実際に生じる部材力とは限らない．一方，右辺第 1 項は外力が作用していない場合に発生する部材力を意味する．つまり，斉次のつりあい式（4.11）の解であり，現象的には温度変化によって発生する部材力などに相当する．この例の場合，その大きさはすべての部材で共通となり，X としてある．一般の２次元，３次元トラスでは共通の値でなく，１つの特定の部材力を $X = 1$ とすると，他の部材力は X に対する比として確定する．不静定トラスにおいて X とおく部材力を**不静定力**という．だから仮に S_2 を不静定力 X とすれば式（4.12）の表現を得る．2 次不静定のトラスであれば，2 つの不静定力を選ぶことにより，つりあい式の一般解を構成することができる．

4.4 不安定構造の安定条件（仮想変位の原理の応用）

先述したように図 4.2(a) の不安定構造の 4 つの外力は任意に与えることができない．実際，勝手な外力を与えると全体が加速度運動を始めることになる．線形代数学的に解釈すると，つりあい式（4.4）を 3 つの部材力に関する連立方程式と見るとき，方程式過剰であるからである．だから 4 本の方程式が矛盾なく連立するためには，4 つの外力の間に関係式が必要である．これを本書では**安定条件**と呼ぶことにしている．ここでは,「仮想変位の原理」を用いて安

定条件を導くが，この構造の斉次の変形の式（4.7）に注目するところにアイデアがある．係数行列でいうと B^T のつりあい式から B の変形の式にスイッチする．すると斉次の変形の式（4.7）は未知数が 1 つ過剰であるので，**仮想変位**の**非自明解**が 1 組だけ存在する．例えば，式（4.8）で示す非自明解ですべての変位を 1 とする.（2 としても以下の結果は同じである.）次に**仮想変位の原理**を表す式（3.14）にこうして求められた仮想変位を代入すると,（仮想の）伸びはすべて 0 であるので

$$F_1\overline{u}_1 + F_2\overline{u}_2 + F_3\overline{u}_3 + F_4\overline{u}_4 = 0 \tag{4.13}$$

なる外力間の関係式，つまり安定条件が求められる．具体的に計算すると $\overline{u}_i$ はすべて同じ値なので

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0 \tag{4.14}$$

を得る．すなわち，外力の総和が 0 であることを要求する．

ここで説明したことを一般化すると以下のようになる.「つりあい式：

$$B^T\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F} \tag{4.15}$$

に解 $\boldsymbol{S}$ が存在するためには荷重 $\boldsymbol{F}$ の成分間にどのような条件が必要か？」という問題に対して,「仮想の伸び $\overline{\boldsymbol{\delta}}$ が $\mathbf{0}$ であるような変形の式：

$$B\overline{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0} \tag{4.16}$$

の任意の非自明解を $\overline{\boldsymbol{u}}$ とするとき，式（3.14）あるいは式（3.7）から

$$F_1\overline{u}_1 + F_2\overline{u}_2 + F_3\overline{u}_3 + F_4\overline{u}_4 + \cdots (= \boldsymbol{F}^T\overline{\boldsymbol{u}}) = 0 \tag{4.17}$$

が求める条件，つまり安定条件」となる．上記の説明は，**1.2** で述べたことと同じ内容である．

4.5　不静定構造の適合条件（仮想荷重の原理の応用）

図 4.1(c) の構造の 3 つのばねの伸びは任意に与えることができない．実際，勝手な伸びを与えると全体の長さが変化し，両端の壁に適合しなくなること

がある．変形の式（4.3）を 2 つの変位に関する連立方程式と見るとき，これも方程式過剰であるからである．だから 3 本の方程式が矛盾なく連立するためには，3 つの伸びの間に関係式が必要である．これを**適合条件**という．ここでは,「仮想荷重の原理」を用いて適合条件を導くが，この構造の斉次のつりあい式，すなわち式（4.11）に注目するところにアイデアがある．係数行列でいうと B の変形の式から B^T のつりあい式にスイッチする．すると斉次のつりあい式（4.11）は未知数が 1 つ過剰であるので，式（4.12）の第 1 項に示すような**仮想部材力**の**非自明解**が 1 組だけ存在する．次に**仮想荷重の原理**を表す式（3.11）にこうして求められた仮想部材力（例えば $X = 1$ として）を代入すると,（仮想の）外力はすべて 0 であるので

$$0 = \overline{S}_1\delta_1 + \overline{S}_2\delta_2 + \overline{S}_3\delta_3 \tag{4.18}$$

なる伸びの間の関係式，つまり適合条件が求められる．具体的に計算すると $\overline{S}_i$ はすべて同じ値なので

$$0 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \tag{4.19}$$

を得る．つまり，両端の壁に適合するには，伸びの総和は 0 でなければならないことになる．$X = 2$ としても同じ結果となる．

ここで説明したことを一般化すると以下のようになる.「変形の式：

$$B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\delta} \tag{4.20}$$

に解 $\boldsymbol{u}$ が存在するためには伸び $\boldsymbol{\delta}$ の成分間にどのような条件が必要か？」という問題に対して,「仮想外力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ が $\mathbf{0}$ であるようなつりあい式：

$$\mathbf{0} = B^T\overline{\boldsymbol{S}} \tag{4.21}$$

の仮想部材力の任意の非自明解を $\overline{\boldsymbol{S}}$ とするとき，式（3.11）あるいは式（3.7）より

$$0 = (\overline{\boldsymbol{S}}^T\boldsymbol{\delta} =)\overline{S}_1\delta_1 + \overline{S}_2\delta_2 + \overline{S}_3\delta_3 + \overline{S}_4\delta_4 + \cdots \tag{4.22}$$

が求める条件，つまり適合条件」となる．このような非自明解 $\overline{\boldsymbol{S}}$ が複数組あれば適合条件も複数となる．上記の説明は，**1.2** で述べたことと同じ内容である．

本章の練習問題

[**問題 4.1**] 図 4.5 に示すように，天井からの 2 つの部材が重なるようにぶら下がっている．これを 2 次元トラスと見るとき,「不安定かつ不静定」であることを示せ．また，安定条件と適合条件を求めよ．

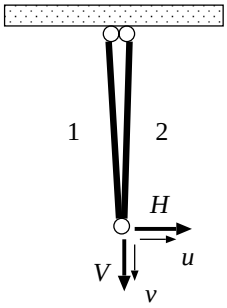


図 4.5　不安定かつ不静定トラス

なお一般に

$$（変位の自由度）－（不安定次数）＝（部材数）－（不静定次数） \tag{4.23}$$

が成り立つ．両辺とも B 行列の**ランク**に等しい．この場合は $2-1=2-1$ である．