京都大学オープンコースウエア

構造力学II及演習

工学部地球工学科

田村　武

3.　1次元モデルの仮想仕事の式

変形の式とつりあい式とは独立に考えることができるが，どのようなトラスを考えても両者の数式表現には類似性がある．それは，直前に述べた行列 B と B^T の関係に集約されるが，その象徴的な帰結として「仮想仕事の原理」なる1つの関係式を得る．一般にこれは,「仮想仕事の原理」と呼ばれることが多いが，実際には「原理」というほどの内容ではない．つまり,「数学の恒等式」に「力学の基礎式」を加味すれば簡単に導ける式であって，無条件に仮定するような意味での「原理」ではない．以下，本コースでは,「仮想仕事の原理」を表す式を「仮想仕事の式」ともいう．両者を使い分ける場合もあるが，同一のものとみても問題はない．

3.1　仮想仕事の原理の誘導

始めに簡単な数学の恒等式：

$$S_1(-u_1+u_2)+S_2(-u_2+u_3)+S_3(-u_3+u_4) = -S_1u_1+(S_1-S_2)u_2+(S_2-S_3)u_3+S_3u_4 \tag{3.1}$$

を書く．この式の左辺の各項は S_1, S_2 および S_3 で，一方，右辺の各項は u_1, u_2, u_3 および u_4 で，それぞれまとめたものである．この式は単なる恒等式に過ぎない．すなわち，両辺を分解して同じ項を消去すれば,「$0 = 0$」しか残らない．また，$S_i(i = 1, 2, 3)$ や $u_j(j = 1, 2, 3, 4)$ の値はなんでもよい．ここで力学的なモデルを想定し，この恒等式の応用を考える．

図 2.4 のように 3 つのばねが直線状に並んだモデルを**変位系**と呼ぶ．むろん．変位系では，変形の式（2.3）が成立している．いま，式（2.3）の各式にそれ

ぞれ S_1, S_2 および S_3 を乗じて加える．

$$S_1(-u_1+u_2)+S_2(-u_2+u_3)+S_3(-u_3+u_4)=S_1\delta_1+S_2\delta_2+S_3\delta_3 \tag{3.2}$$

この操作は，式（1.1）から式（1.3）を導いたことに相当する．ここで恒等式（3.1）を用いて左辺を置き換えると，すなわち，左辺を変位 u_i でまとめると

$$-S_1u_1+(S_1-S_2)u_2+(S_2-S_3)u_3+S_3u_4=S_1\delta_1+S_2\delta_2+S_3\delta_3 \tag{3.3}$$

となる．この操作は，式（1.3）から式（1.4）を導いたことに相当する．

さて図2.5を**つりあい系**と呼ぶ．このつりあい系では，つりあい式（2.7）が成立しているので，これを用いて，この左辺の $S_i(i=1,2,3)$ を $F_j(j=1,2,3,4)$ に置き換えると

$$F_1u_1+F_2u_2+F_3u_3+F_4u_4=S_1\delta_1+S_2\delta_2+S_3\delta_3 \tag{3.4}$$

を得る．これを**仮想仕事の式**という．あるいは，この式が成り立つことを**仮想仕事の原理**という．これが式（1.6）に相当する．本書では，式（3.4）そのものは仮想仕事の式と呼ぶ．

上で述べた仮想仕事の式の誘導を「線形代数学」的に言い直してみよう．式（2.3）と同じ意味をもつ式（2.5）の両辺を式（2.8）で定義した部材力ベクトル $\boldsymbol{S}$ と内積をとると

$$(\boldsymbol{S}, B\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\delta}) \tag{3.5}$$

となる．ここで（ ）は内積を表す．この式を具体的に書けば式（3.2）となる．ここで線形代数学における基本的な恒等式：

$$(B^T\boldsymbol{S}, \boldsymbol{u})=(\boldsymbol{S}, B\boldsymbol{u}) \tag{3.6}$$

を用いて，さらに式（2.9）を代入すれば

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u})=(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\delta}) \tag{3.7}$$

を得る．これが式（3.4）である．

見かけ上，逆の方向にも式（3.7）を導くこともできる．すなわち，つりあい式（2.9）の両辺と変位ベクトル$\boldsymbol{u}$と内積をとることから始めて，恒等式（3.6）と変形の式（2.5）を考慮すれば

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}) = (B^T \boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{S}, B\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\delta}) \tag{3.8}$$

となるが，これは式（3.7）と同じである．つまり仮想仕事の式は，右からでも，左からでも導くことができる．上式の一番目と三番目の等式は「力学の基礎式の単なる代入」である．中心的役割を果たす演算は二番目の等式にあるが，これは数学の恒等式である．

このようにして導かれた仮想仕事の式に関して，絶対に注意しておかなければならないことが2つある．1つは，式（3.4），式（3.7）あるいは式（3.8）を誘導する際，大きな役割を果たしたのは，式（3.1）あるいは式（3.6）であるが，これは数学の恒等式である．つまり，仮想仕事の式が力学的考察で得られたものでは「ない」ということである．もっといえば，この式は恒等式（3.1）あるいは式（3.6）の「力学的語呂合わせ」に過ぎない．さらに，もう1つ注意すべきは，仮想仕事の式を導くに当たって,「変位系」と「つりあい系」の間に何ら相関関係を仮定していない．だから「ばね」の物性などを一切，用いていない．したがって線形弾性的なばねである必要はまったくない．

なお，恒等式（3.6）における行列Bは式（2.6）のBに限定することなく，任意の行列Bに対し成立するので，一般には式（3.6）は式（3.1）より意味の広い恒等式である．

以下の２つの節において，仮想仕事の原理の応用について説明する．大きく２つの応用法がある．１つは，変位系を「実際の系」，つりあい系を「仮想系」とする「仮想荷重の原理」であり，もう１つは反対に，つりあい系を「実際の系」，変位系を「仮想系」とする「仮想変位の原理」である．用いるのは，どちらも仮想仕事の式（3.4）である．

3.2 仮想変位の原理の応用（その１：仮想荷重の原理）

恒等式（3.1）より，式（2.3）と（2.7）のもとで仮想仕事の式（3.4）が成り立つことがわかった．だから式（2.7）を仮定すれば，式（3.4）は式（2.3）が成り立つための必要条件となる．すなわち，つりあい式（2.7）を満たすいかなる量を式（3.4）に代入しても，変形の式（2.3）に矛盾しない関係式，つまり必要条件を導く．いいかえると式（2.3）を適当に組み合わせた式を得る．これを**仮想荷重の原理**と呼び，得られた式を変形の式の**弱形式**という．

[**例 3.1**] 仮想仕事の式（3.4）に図 3.1 に示す「仮想の」つりあい系：

$$\begin{cases} S_1 = 1,\ S_2 = S_3 = 0 \\ F_1 = -1,\ F_2 = 1,\ F_3 = F_4 = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

を代入する.（これらの部材力と外力は確かに式（2.7）を満たす.）すると

$$-u_1 + u_2 = \delta_1 \tag{3.10}$$

を得る．これは式（2.3）の第 1 式，すなわち，ばね 1 における両端のヒンジの変位と伸びの関係を得る．この式のもともとの出どころは，式（3.2）や式（3.3）で $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 0$ を代入したことにあり，式（3.10）が得られるのは当然である．

このように仮想仕事の式から変形の条件式を誘導するために代入されるつりあい系は，実際に生じているつりあい系とはまったく無関係である．このような意味から，用いた**つりあい系**を**仮想つりあい系**，また，用いた荷重を**仮想荷重**とそれぞれ呼ぶ．**変位系**が実際に生じているものであり，つりあい系が仮想の場合，後者に関係する量には「$^-$」を付して，式（3.4）を

$$\overline{F}_1 u_1 + \overline{F}_2 u_2 + \overline{F}_3 u_3 + \overline{F}_4 u_4 = \overline{S}_1 \delta_1 + \overline{S}_2 \delta_2 + \overline{S}_3 \delta_3 \tag{3.11}$$

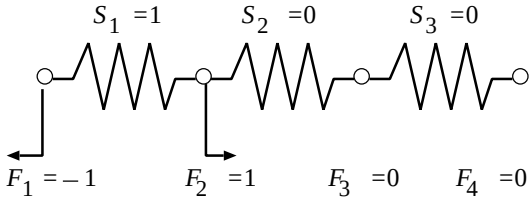


図 3.1 ３本ばね構造の仮想つりあい系（1）

と書くことが多い．

3.3　仮想変位の原理の応用（その２:仮想変位の原理）

先と同様にして，式（2.3）を仮定すれば，式（3.4）は式（2.7）が成り立つための必要条件となる．すなわち，変形の式（2.3）を満たすいかなる量を式（3.4）に代入しても，つりあい式（2.7）全体に矛盾しない関係式，つまり必要条件を導く．いいかえると式（2.7）を適当に組み合わせた式を導く．これを**仮想変位の原理**と呼び，得られた式をつりあい式の**弱形式**という．

[**例 3.2**] 仮想仕事の式（3.4）に図 3.2 に示す変位系：

$$\begin{cases} u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = u_4 = 0 \\ \delta_1 = 1,\ \delta_2 = -1,\ \delta_3 = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

を代入する.（これらはの変位と伸びは確かに式（2.3）を満たす.）すると

$$S_1 - S_2 = F_2 \tag{3.13}$$

を得る．これは式（2.7）の第 2 式，すなわち，ヒンジ 2 におけるつりあい式を得る．この式のもともとの出どころは，式（3.8）に示した方法において $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0, u_4 = 0$ なる $\boldsymbol{u}$ を代入したことにあり，つりあい式の第 2 成分である式（3.13）が得られるのは当然である．

このように仮想仕事の式から，つりあい条件の一部を誘導するために代入される変形の系は，実際に生じている変形の系とはまったく無関係である．このような意味から，用いた変形の系を**仮想変位系**，また，変位を**仮想変位**とそれ

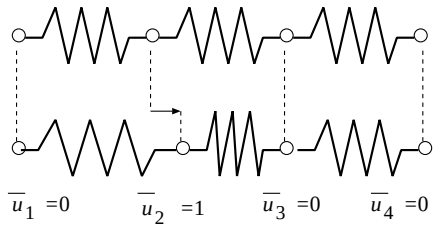


図 3.2　３本ばね構造の仮想変位（1）

ぞれ呼ぶ．力の系が実際に生じていて，変位系が仮想の場合，後者に関係する量には「$^{-}$」を付して，式（3.4）を

$$F_1\overline{u}_1 + F_2\overline{u}_2 + F_3\overline{u}_3 + F_4\overline{u}_4 = S_1\overline{\delta}_1 + S_2\overline{\delta}_2 + S_3\overline{\delta}_3 \tag{3.14}$$

と書くことが多い．

本章の練習問題

[**問題 3.1**] 仮想仕事の式（3.11）に図 3.3 に示す仮想つりあい系：

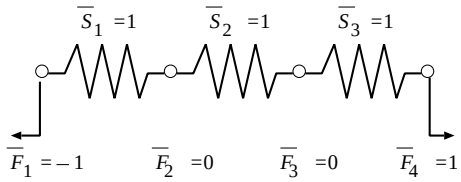


図 3.3　３本ばね構造の仮想つりあい系（2）

$$\begin{cases} \overline{S}_1 = \overline{S}_2 = \overline{S}_3 = 1 \\ \overline{F}_1 = -1,\ \overline{F}_2 = \overline{F}_3 = 0,\ \overline{F}_4 = 1 \end{cases} \tag{3.15}$$

を代入するとどのような条件が得られるか？

[**問題 3.2**] 仮想仕事の式（3.14）に図 3.4 に示す仮想の変位系：

$$\begin{cases} \overline{u}_1 = \overline{u}_2 = \overline{u}_3 = \overline{u}_4 = 1 \\ \overline{\delta}_1 = \overline{\delta}_2 = \overline{\delta}_3 = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

を代入するとどのような条件が得られるか？

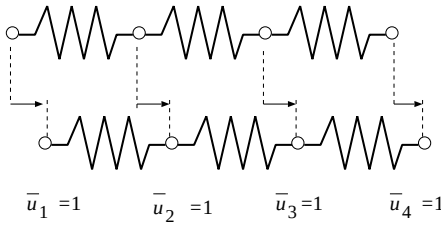
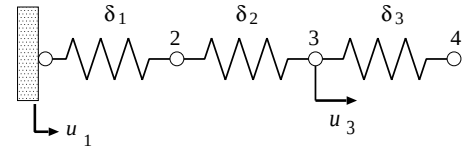
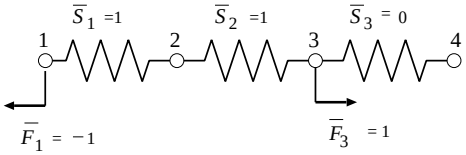


図 3.4　３本ばね構造の仮想変位（2）

[**問題 3.3**] 図 3.5(a) に示すように左端の境界が u_1 だけ変位し，さらにすべてのばねの伸びがわかっているとする．このとき図 3.5(b) を参照しながら，ヒンジ 3 における変位 u_3 を計算する方法を説明せよ．



(a) 実際の変位の系



(b) 仮想のつりあい系

図 3.5 既知の境界変位が与えられた場合