京都大学オープンコースウエア

構造力学II及演習

工学部地球工学科

田村　武

2.　トラス構造の基礎

2.1　トラス構造

図 2.1 に示すような構造を**トラス**という．東海道新幹線の橋梁や送電鉄塔に代表される構造形式である．線分として表されているところを**部材**という．したがって，図 2.1 のトラスは 6 部材トラスである．トラス構造の特徴は，個々の部材はいつも直線であって，部材には一様な大きさの**引張力**か**圧縮力**しか生じないことである．個々の部材の両端は，回転が自由な**ヒンジ**とよばれる部品（図中の○）を通して他の部材や壁に結び付けられている．図の左端のようにヒンジが不動の壁に固定されている点を**支点** という．このトラスにはヒンジが 5 つあり，そのうち 2 つが支点である．２つ以上の部材が集まる部分を**節点**という．だからトラス構造の節点には必ずヒンジがある．

図 2.1 のようにトラス構造ではヒンジのみに**外力**すなわち**荷重**が作用する．

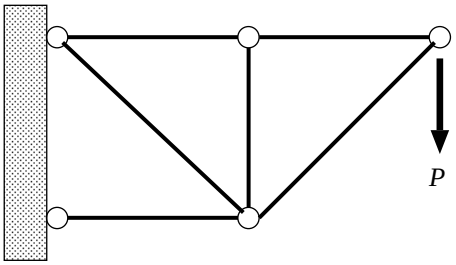

図 2.1　6 部材からなるトラスの例

2.2 トラスの部材力

図 2.2(a) に 1 つの部材を取り出す．この部材の両端のヒンジから力が作用し，その結果，この部材に S という大きさの引張力が生じたとする．いわば，同図 (b) のばねに S という引張力が発生したことと同様である．このとき図に示すように, 部材に沿って同じ大きさで逆向きの 1 対の力が部材の両端に作用している．ここで，部材に発生している引張力や圧縮力を**部材力**あるいは**断面力**と

図 2.2 部材とばねの両端に作用する力

呼ぶ．トラス構造では慣習的に引張力を正とする．したがって，部材力の値が負の場合には，その部材に圧縮力が作用していることを意味する．

次に述べることはたいへん重要である．部材に引張力が働いているとき，力の向きはどのようになっているのだろうか？ そもそも高校の物理で力を学ぶとき，それは大きさと方向をもつ量，すなわち，**ベクトル**として理解する．それは正しい．では，物理でいう「力」と部材力の「力」は異なるものであるのか？ 実は両者は物理量（次元）としては同一であるが，ある意味で大きく異なるのである．結論からいえば，部材力はベクトルではなく，力の次元をもつ数である．正負はあっても方向はない.（その詳細な説明は教科書にある.）

2.3 ヒンジに作用する部材力

トラスの問題で考えなければならないのは，複数の部材の結合点であるヒンジ（あるいは節点）のつりあいである．すなわち，トラスのヒンジにはいくつかの部材から力が作用するが，個々のヒンジが静止し続けるためにはヒンジに作用する力がつりあわねばならない．ヒンジに作用するいくつかの力のベクトルとしての総和が 0 となることを表した式をトラスの**つりあい式**という．ま

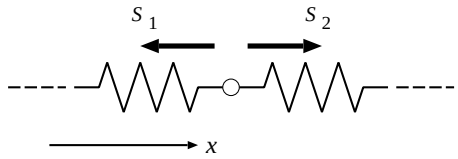

図 2.3　2 つのばねに挟まれたヒンジのつりあい

た，その力学的な意味を**つりあい条件**という．つまり，つりあい条件を式で表したものがつりあい式である．

[**例 2.1**] 図 2.3 に示すように，1 つのヒンジを挟んで 2 つのばねがある．ここでヒンジのつりあいを考えてみよう．2 つのばねに発生している部材力（以下，引張力を正とする）をそれぞれ S_1, S_2 とする．ヒンジを客体とすると，ヒンジに作用する力（ベクトル）は図のような向きである．これは，ばねに引張力が生じていると仮定した結果である．したがって，ヒンジが静止するためにはこれらの力の和が 0 でなくてはならない．式で書けば

$$-S_1 + S_2 = 0 \tag{2.1}$$

となる．これは，作用する力の合計を x 軸方向に測った場合に合力が 0 になることを示す．もし $-x$ 軸方向に力のつりあいを考えれば，上式は

$$S_1 - S_2 = 0 \tag{2.2}$$

と書かれる．数式として見れば両者は同等であるが，力学的には上記のように少し意味が異なる．

2.4　1 次元トラスの変形の式

この節と次節で直線状に部材の並んだ「1 次元トラス」を用いて説明する．あるいはいくつかのばねが 1 次元的に並んでいるモデルである．その力学の基本は,「変形の式」と前の節で述べた「つりあい式」からなる．

「変形の式」を考える．図 2.4 に示す 3 本のばねが直線に並んだ構造を考える．簡単な構造ではあるが，トラスの力学の主要な部分はほとんど含まれている．まず，ヒンジの**変位**とばねの**伸び**の関係を調べる．4 つのヒンジには右向

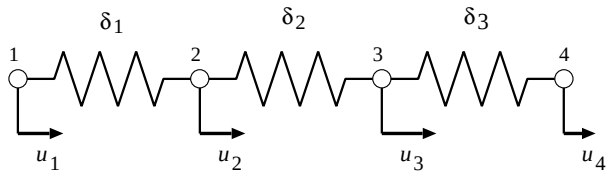

図 2.4　３本ばね構造の変形

きに u_1, u_2, u_3 および u_4 の変位が生じている．そして各ばねに生じている伸びを δ_1, δ_2 および δ_3 とする．以上の条件のもとで，3 つのばねの伸びをヒンジの変位で書けば

$$\begin{cases} -u_1 + u_2 & = \delta_1 \\ \quad -u_2 + u_3 & = \delta_2 \\ \qquad - u_3 + u_4 & = \delta_3 \end{cases} \tag{2.3}$$

となる．すなわち，４つの節点の右向きの変位を観測し，右から順次，差を計算すれば３つのばねの伸びが求められる．**変位ベクトル** $\boldsymbol{u}$ および**伸びベクトル** $\boldsymbol{\delta}$ を

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

と定義すると，3 つの伸びの式（2.3）は

$$B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\delta} \tag{2.5}$$

とも書くことができる．ここに用いた行列 B は

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

である．これを **B 行列**ということがある．式（2.3）あるいは式（2.5）を以下では**変形の式**と呼ぶことにする．また，広い意味で**適合条件**ということもある．

2.5　1 次元トラスのつりあい式

図 2.4 と同じ図 2.5 のばねモデルの 4 つのヒンジに右向きの外力 F_1, F_2, F_3 および F_4 がそれぞれ作用している．そして各ばねに生じている部材力を S_1, S_2 および S_3 とする．以上の条件のもとで，4 つのヒンジにおけるつりあい式を書けば

$$\begin{cases} -S_1 & = F_1 \\ S_1 - S_2 & = F_2 \\ S_2 - S_3 & = F_3 \\ S_3 & = F_4 \end{cases} \tag{2.7}$$

である．これらの式は，それぞれのヒンジがばねから受ける左向きの力を左辺に，右向きの外力を右辺においた「つりあい式」である．**外力ベクトル $\boldsymbol{F}$** お

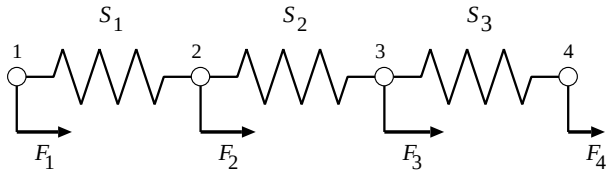

図 2.5　3 本ばね構造のつりあい

よび**部材力ベクトル $\boldsymbol{S}$**：

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

をこのように定義する．ここで 1 つの重要なルールを述べておく．すなわち

「外力ベクトルおよび部材力ベクトルの成分の順序と正負の定義は，式（2.4）の変位ベクトルおよび伸びベクトルのそれらとそれぞれ対応していること」である．本書ではこれを「**成分ルール**」と呼ぶことにする．

さて，4 つのつりあい式（2.7）は

$$B^T \boldsymbol{S} = \boldsymbol{F} \tag{2.9}$$

とも書くことができる．ここで行列 B^T は式（2.6）で定義した B 行列の転置行列であり

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

である．

「変形の式で現れる B 行列がつりあい式で B^T として再び現れること」が実はトラス構造を含む種々の力学に決定的な特徴を与えている．つまり，変形の式とつりあい式は，前章で説明した互いに「共役な方程式」になっている．ここに「仮想仕事の原理」の「トリック」が潜んでいる．

本章の練習問題

[**問題 2.1**] 図 2.6 に示すように，1 つのヒンジを挟んで 2 つのばねがある．2 つのばねに発生している部材力をそれぞれ S_1, S_2 とする．ヒンジのつりあい式を書け．

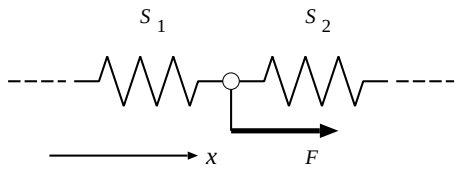

図 2.6　外力を受けるヒンジのつりあい

[**問題 2.2**] 図 2.7 に示すように，2 つのヒンジ 1，2 を挟んで 3 つのばねがある．2 つのヒンジには座標方向にそれぞれ F_1, F_2 なる外力が作用しているとする．3 つのばねに発生している部材力を順に S_1, S_2, S_3 としてヒンジ 1，2 のつりあい式を書け．

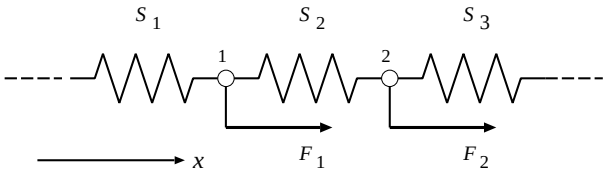

図 2.7　2 つのヒンジのつりあい

[**問題 2.3**] 図 2.8(a) に示すように天井からばねを介して重量 W の重りがぶら下がっている．このとき，ばねに発生している引張力 S を求めよ．

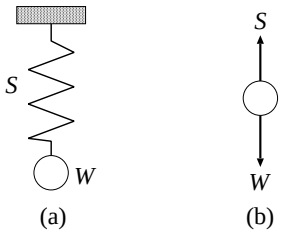

図 2.8　重りによる引張力（1）

[**問題 2.4**] 図 2.9(a) に示すように床からばねを介して重量 W の重りが支持されている．このとき，ばねに発生している「引張力 S」を求めよ．

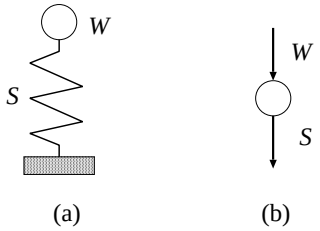

図 2.9 重りによる引張力（2）