京都大学オープンコースウエア

構造力学II及演習

工学部地球工学科

田村　武

まえがき

「構造力学 II 及演習」は，工学部地球工学科３年生の前期科目であり，２年生後期科目の「構造力学 I 及演習」に連なるものとして位置付けられている．５人の教員が５つの班の講義と演習を受け持ち，筆者自身はその１つのクラスを担当している．ここではその担当クラスに対する授業を紹介する．

上述したようにこの科目は，上記の「構造力学 I 及演習」の単位を習得した学生を想定して講義内容が設定されているが，筆者は復習を兼ねて「構造力学 I 及演習」の内容にも一部，言及している．したがって不完全ではあるものの，筆者の担当する「構造力学 II 及演習」では構造力学の初歩からやや高等な範囲までをカバーしている．

この原稿は,「構造力学 II 及演習」の筆者の担当クラスの教科書に指定している拙著「構造力学 – 仮想仕事の原理を通して –」（朝倉書店，２００３年）の前半部にある「トラスの力学」を京都大学オープンコースウエア（OCW）用に修正したものある．以下,「教科書」とはこの書籍を指す．特に重視したのは，教科書の副題にある「仮想仕事の原理」の説明と理解の方法である．始めに単純な連立１次方程式やとても基本的な１次元のモデルを用いて説明しているので順次，自習するだけでも「仮想仕事の原理」の大要を理解することができる．また，そのように種々の工夫をした．なお，章末にある演習問題の解答は教科書に「例題」として詳しく書かれているので省略した．

筆者の意図するところは,「構造力学」という概念をいかに体系的に伝えるかである．それは,「職業訓練としての構造力学」ではなく,「１つの科学としての構造力学」である．その目的のために力学的考察と数学的推論の明確な区分の重要性を強く主張したつもりである．

1.　連立1次方程式と仮想仕事の原理

「仮想仕事の原理」は，連続体力学における１つの基本的概念であるが，構造力学でも，むろん成立する．むしろ，構造力学では力学モデルが単純であることから，仮想仕事の原理の「からくり」を理解しやすい．本コースでは，そのような観点からかなり徹底した仮想仕事の原理の説明を行なうが，その「からくり」の根本はきわめて単純な数学の応用にほかならない．まずこの章では，この数学的な部分を説明する．したがって，ここでは構造力学の概念を用いずに仮想仕事の原理を解説する．実際，極論すれば仮想仕事の原理は，中学校で習うような連立1次方程式の1つの簡単な解法にも帰着される．さらにそれを延長して，連立1次方程式の可解条件あるいは未知数間の関係式としても仮想仕事の原理を理解することができる．

もし一言で仮想仕事の原理を説明するなら

「１つの連立1次方程式（$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$）と，その共役な（随伴的な）連立1次方程式 （$A^T\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{p}$）の間で成立する１つの関係式（$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{b}$）」

となる．以下，このことを詳しく述べる．

1.1　未知数と方程式の数が一致する場合

簡単な2元連立1次方程式：

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+4y=11 \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える．これをここでは「表（おもて）の方程式」と呼ぼう．この方程式の解は

$$x=1, \qquad y=2 \tag{1.2}$$

である．この連立方程式を直接に解かず，第 1 式を α 倍，第 2 式を β 倍して両式を加えると

$$\alpha(x+2y)+\beta(3x+4y)=5\alpha+11\beta \tag{1.3}$$

を得るが，左辺を x および y の項でまとめると

$$(\alpha+3\beta)x+(2\alpha+4\beta)y=5\alpha+11\beta \tag{1.4}$$

となる．ここで式（1.4）の左辺の x および y の係数を見て，別の 2 元連立 1 次方程式：

$$\begin{cases} \alpha+3\beta=p \\ 2\alpha+4\beta=q \end{cases} \tag{1.5}$$

を考える．これを「裏の方程式」（あるいは「共役な方程式」）と呼ぼう．もし，p,q に対しこのような α と β を求めれば，式（1.4）から，むろん

$$px+qy=5\alpha+11\beta \tag{1.6}$$

が成立する．実は，これが**仮想仕事の原理**に相当する．構造力学でしばしば出くわす「仮想仕事の原理の応用」は，式（1.1）の解の計算方法として用いられる．すなわち，すぐわかるように,「裏の方程式」を解けば，本質的に「表の方程式」の解が求められることになる．実際，特に式（1.5）で $p=1,q=0$ とすれば，その解は

$$\alpha=-2, \qquad \beta=1 \tag{1.7}$$

であることから，式（1.6）より

$$x=-10+11=1 \tag{1.8}$$

となって x が求められる．そして式（1.2）の結果と一致する．一方，式（1.5）で $p=0,q=1$ とすれば

$$\alpha=\frac{3}{2}, \qquad \beta=-\frac{1}{2} \tag{1.9}$$

であることから，式（1.6）より

$$y=\frac{15}{2}-\frac{11}{2}=2 \tag{1.10}$$

となって y が求められる．そして式（1.2）の結果と一致する．

要するに，2 本の方程式をそれぞれ α 倍，β 倍し，それらを加え合わせて，片方の未知数の係数を「１」に，他の未知数の係数を「０」にしているだけであり，中学校でも学ぶような連立方程式の解法に過ぎない．上記のように $p = 1, q = 0$ あるいは $p = 0, q = 1$ として「裏の方程式」を介して「表の方程式」を解く方法は，構造力学で**単位荷重法**と呼ばれるものに相当する．

そもそも式（1.6）は，連立方程式（1.1）の 2 本の式を定数倍あるいは加減して得られるもので，式（1.1）以上の情報を含むものではない．すなわち，その一部の情報（必要条件，弱形式）がそこに現れているに過ぎないが,「裏の方程式」が簡単に解ける場合などには，うまく用いることで有効な式ともなる．

1.2　未知数よりも方程式の数が多い場合

x, y を未知数とする 3 本の連立 1 次方程式（「表の方程式」）：

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \\ 5x + 6y = c \end{cases} \tag{1.11}$$

を考える．一般の c に対してこのような連立方程式は解をもたない．では c がいくらの場合に解をもつかを考える．そこでもとの連立方程式に戻って第 1 式を α 倍，第 2 式を β 倍，そして第 3 式を γ 倍して 3 つの式を加えて未知数ごとに整理すれば

$$(\alpha + 3\beta + 5\gamma)x + (2\alpha + 4\beta + 6\gamma)y = 5\alpha + 11\beta + c\gamma \tag{1.12}$$

となる．もし連立方程式（1.11）が解をもつのなら，すなわち，これら 3 つの式を成立させる x, y が存在するのなら，式（1.12）の左辺の x および y の係数を 0 とおいた別の 3 元連立 1 次方程式（「裏の方程式」）：

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 6\gamma = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

の（任意の）解 α, β および γ に対して，式（1.12）の右辺は当然

$$5\alpha + 11\beta + c\gamma = 0 \tag{1.14}$$

を満たさねばならない．式（1.13）は未知数過剰の方程式であるが，例えば，$\gamma = 1$ として式（1.13）を解くと

$$\alpha = 1, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 1 \tag{1.15}$$

を得る．これを式（1.14）に代入すれば

$$c = 17 \tag{1.16}$$

であることがわかる．これは，式（1.11）の上の 2 本の式を用いて解いた $x = 1, y = 2$ を第 3 式に代入した結果と一致する．あとで説明するが，式（1.14）は，構造力学では不安定構造の**安定条件**に相当し，また，不静定構造の**適合条件**に相当する式である．