



## 第 4 章

# 大気熱力学

### 4.1 未飽和大気の熱力学

大気熱力学自体は 1800 年代半ばにアメリカの気象学者 Espy やイギリスの Kelvin 卿によって考察されてきた。大気の状態を考察するとき、各種の支配方程式を使って考えていく。運動状態を記述する方程式は運動方程式であり、温度の状態・変化を記述するのは熱力学から導かれる方程式となる。

大気熱力学については良い教科書がある。英文だが、いろんな量が厳密な考察から導かれ、良く知られた式への近似も導出されていてわかりやすい。

「Atmospheric thermodynamics」 by C. F. Bohren and B. A. Albrecht, Oxford, 1998, 402 pp.

#### 4.1.1 理想気体のエントロピー

乾燥大気の場合

仕事  $-pdV$  が働く体積  $V$  の単位質量の系に対して熱力学の第一法則（エネルギーの保存）を書くと、 $dQ$  を単位質量当たりの加熱量、 $dU$  を単位質量当たりの内部エネルギー増加量として

$$dQ = dU + pdV \quad (4.1)$$

理想気体の内部エネルギーの変化は

$$dU = c_v dT \quad (4.2)$$

単位質量の気体の状態方程式は  $pV = R_d T$  ,  $pdV + Vdp = R_d dT$  だから

$$\begin{aligned} dQ &= c_v dT + \frac{R_d T}{V} dV \\ \rightarrow \frac{dQ}{T} &= \frac{c_v}{T} dT + \frac{R_d}{V} dV = \frac{c_v + R_d}{T} dT - \frac{R_d}{p} dp = \frac{c_p}{T} dT - \frac{R_d}{p} dp \\ &= c_v \left( \frac{dT}{T} + \frac{\gamma - 1}{V} dV \right) = c_p \left( \frac{dT}{T} + \frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{dp}{p} \right) \end{aligned}$$

ただし、 $\gamma = c_p/c_v$ 、 $c_p$ 、 $c_v$  は単位質量当たりの熱容量、つまり、定圧比熱、定積比熱である。（現在の地球大気の状態では定数と考えて良い。ただし、 $2 \sim 3 \text{ J Kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  程度の变化はある）。

$$\begin{aligned}
c_v &= 719 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\
c_p &= 1006 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\
R_d &= c_p - c_v = 287.05 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\
\gamma - 1 &= \frac{R_d}{c_v}, \quad -\frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{R_d}{c_p}
\end{aligned}$$

ここで、

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (4.3)$$

とすると、 $S$  を (単位質量当たりの) エントロピーという。

これから多くの式が出てくるが、式操作の結果出てきたものが物理的考察 (常識) に合うかどうかのチェックは常に必要である。我々が扱うもののほとんどは (素粒子論のようなミクロではなく) マクロの現象であり、常識の使える範囲である。

#### 4.1.2 乾燥断熱過程

乾燥大気の断熱過程

熱の出入りがない状態で変化する過程 (断熱過程) の場合、 $dQ = 0$  だから、エントロピーの変化はない。そのときには、

$$c_p \left( \frac{dT}{T} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} \right) = 0 \quad \therefore \frac{T}{T_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R_d/c_p} \quad (4.4)$$

大気物理学では通常、 $p_0 = 1000 \text{ hPa} = 100 \text{ kPa}$  と取る。そのときの温度を  $\theta$  と表記し温位 (potential temperature) とよぶ。そうすると

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R_d/c_p}, \quad \frac{R_d}{c_{pd}} = 0.287 \quad (4.5)$$

これは断熱変化に対して不変量である。また、エントロピーの式より

$$dS = c_p d \ln \theta \quad (4.6)$$

でもあるので、乾燥断熱過程は温位変化がないため等エントロピー (isentropic) 過程とも言う。

未飽和湿潤大気の場合

大気中に含まれる水蒸気量には限界があり、温度によって決まるその水蒸気圧の最大値を飽和水蒸気圧 (saturation vapour pressure) と呼ぶ。それ以上の水蒸気圧を「過飽和」、それ以下を「未飽和」と呼ぶ。

混合比  $q$  のとき、湿潤大気の等圧過程と等積過程は

$$\begin{aligned}
(1 + q)dQ &= (c_{pd} + qc_{pw})dT \\
(1 + q)dQ &= (c_{vd} + qc_{vw})dT
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $c_{pw}, c_{vw}$  はそれぞれ水蒸気の、定圧比熱と定積比熱である。

$$c_{vw} = 1390 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad (\text{at } 0^\circ\text{C})$$

$$c_{pw} = 1850 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad (\text{at } 0^\circ\text{C})$$

$$R_v = 461.5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

(ただし比熱は、100 度で 1 割程度変化する)

よって、湿潤気の大気の定圧比熱、定積比熱は

$$c_{pm} = \frac{c_{pd} + qc_{pw}}{1 + q} = c_{pd} \frac{(1 + qc_{pw}/c_{pd})}{1 + q} \approx c_{pd} \left(1 + \frac{1850}{1006}q\right) * (1 - q) \approx c_{pd} (1 + 0.84q) \approx c_{pd} (1 + 0.84s)$$

$$c_{vm} = \frac{c_{vd} + qc_{vw}}{1 + q} \approx c_{vd} (1 + 0.93q) \approx c_{pd} (1 + 0.93s)$$

となる。

未飽和湿潤気の大気の断熱過程

湿潤気の大気の比熱を使うと温位は

$$\frac{R}{c_p} = \frac{R_m}{c_{pm}} \cong \frac{R_d (1 + 0.608s)}{c_p (1 + 0.84s)} \approx \frac{R_d}{c_p} (1 - 0.23s) \approx \frac{R_d}{c_p} (1 - 0.23q)$$

だから、温位は乾燥気と少し違って来る：

$$\theta_m = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R_m/c_{pm}} \approx \theta \left(\frac{p_0}{p}\right)^{-0.23 \frac{R_d}{c_p} s} \approx \theta \left(\frac{p_0}{p}\right)^{-0.066s}$$

となる。s は 0.01 程度だから湿潤温位と乾燥温位との差は対流圏では 1 K 以下 (通常 0.1 K 程度以下) で、現在の地球気象を対象とする場合、乾燥温位と湿潤温位とは等しいとして扱うことができる。

また仮温位 (virtual potential temperature) は仮温度を使って

$$\theta_v = T_v \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R_d/c_d} \quad (4.7)$$

と定義できる。未飽和である限り混合比や比湿は変化しないので、温位と同様、仮温位は断熱不変量である。

乾燥断熱気温減率

断熱的に空気塊が鉛直運動するときの、高さによる温度の変化率を断熱 (気温) 減率 (adiabatic lapse rate) と呼ぶ。乾燥気の場合、式 (4.4) から

$$dT = \frac{R_d T}{c_{pd} p} dp$$

静力学平衡  $dp = -\rho g dz$  を使うと

$$-\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_{pd}} \equiv \Gamma_d \approx 9.76 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1} \quad (4.8)$$

未飽和湿潤気の場合、 $q = 30 \text{ g/kg}$  として (これはかなり多い：地上気温 30 度で湿度 100%)

$$dT = \frac{R_m T}{c_{pm} p} dp \quad \rightarrow \quad -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_{pm}} \approx \frac{\Gamma_d}{1 + 0.84q} \approx 9.5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$$

これだけしめっけていても差は約 3% で、ほとんど同じとして良い。

## 大気の安定性

断熱減率は鉛直安定性の目安となる。鉛直微小変位する小さな空気塊の運動方程式を考えよう。初期に  $z_0$  にあった空気塊が  $z$  へ動いたとし、空気塊の密度を  $\rho'$ 、周りの空気の密度を  $\rho$  とする。静止大気では静水圧平衡

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

が成り立つ。ちなみに、等温大気の場合、この式から圧力が高さ方向に指数関数変化することがわかる。

$$p = \rho RT_0 \quad , \quad \rho = \frac{p}{RT_0} \quad \therefore \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{p}{RT_0} g \quad \therefore p = p_{00} \exp \left[ -\frac{g}{RT_0} z \right]$$

さて、微小変位した空気塊の運動方程式は、変位した後の値にダッシュを付けると：

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -\frac{1}{\rho'} \frac{dp'}{dz} - g$$

圧力が周りの空気と同じと考えて良いから（即ち  $p' = p$ ）

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -\frac{1}{\rho'} \frac{dp}{dz} - g = g \frac{\rho - \rho'}{\rho'} = g \frac{T'_v - T_v}{T_v} \quad (4.9)$$

となる。よって、空気塊と周りの空気との仮温度との差によって、上下に微小変位した空気塊の安定性が決まる。すなわち、上（下）に変位したとき周りの空気より温かければ（冷たければ）、加速度が変位と同じ方向にかかり、ますます変位を加速するので不安定となる。

これをもう少し変形する。空気塊は断熱変化だから、周りの空気の減率を  $\Gamma_E$  とすると

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} \approx g \frac{\Gamma_E - \Gamma_d}{T_v} \delta z$$

となるので、安定性の判別は以下ようになる。

$$\begin{array}{lll} > & & \text{unstable} \\ \Gamma_E = \Gamma_d & \text{then} & \text{neutral} \\ < & & \text{stable} \end{array} \quad (4.10)$$

また、式 (4.9) は

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = g \frac{\theta'_v - \theta_v}{\theta_v} \approx -\frac{g}{\theta_v} \frac{d\theta_v}{dz} \delta z$$

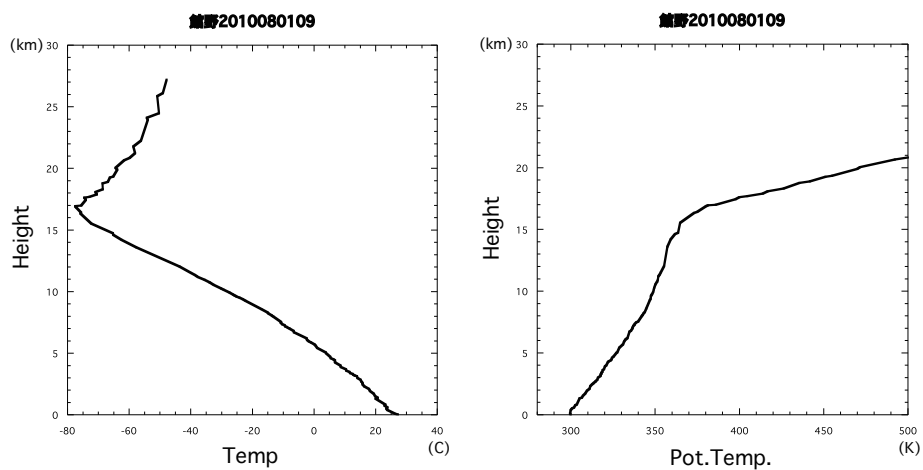
となり、上記の安定条件は

$$\begin{array}{lll} > & & \text{stable} \\ \frac{d\theta_v}{dz} = 0 & \text{then} & \text{neutral} \\ < & & \text{unstable} \end{array} \quad (4.11)$$

とかける。

## 実際の気

このように対流圏では温位が高度と共に増加している。つまり、乾燥断熱減率よりゆっくりと温度が下がっている（約  $6.5 \text{ K/km}$ ）。これは湿潤過程の影響と考えられている（後述）。成層圏に行くとも温位は等温から増加傾向となっていて、ますます等エントロピーの状態から離れる！すなわち、非断熱過程（加熱や冷却）が強いと推測できる。実際、成層圏ではオゾン層での太陽放射による加熱が重要な要素となっている。



## 4.2 飽和湿潤大気の熱力学

雲自身美しいだけでなく、全球エネルギー収支や水循環に対して、放射・凝結熱放出・降水などを通じて大きな影響がある重要な現象である。この章では水の相変化がある時の熱力学について述べる。



### 4.2.1 参考文献：

- Atmospheric Thermodynamics, by C. F. Bohren & B. A. Albrecht (1998), Oxford
- 大気科学講座2「雲や降水を伴う大気」、浅井他，1981，東大出版会
- メソ気象の基礎理論，小倉，1997，東大出版会

### 4.2.2 飽和水蒸気圧 (saturation vapor pressure)

平面水面上の大気の飽和水蒸気圧の式は Clausius-Clapeyron (クラウジウス・クラペイロン) の式 (近似の入った理論式)

$$\frac{1}{e_s} \frac{de_s}{dT} = \frac{L_v}{R_v T^2} \quad (4.12)$$

で表される。ここで単位質量当たりの水の凝結熱であり、値は  $L_v = 2.501 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} (0^\circ \text{C}) \sim 2.257 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} (100^\circ \text{C})$  程度、飽和水蒸気圧は温度のみに依存し、大気圧に無関係であることに注意!!!

ちなみに、凝結熱は大気物理用語で潜熱 latent (隠れた) heat という。それは相変化しない内はなんら影響が無く、凝結・蒸発するときに熱を放出・吸収するため。なお、普通の温度 (内部エネルギー) は顕熱 sensible heat という。

<参考：Clausius-Clapeyron 式の導出>

(参考文献：Atmospheric Thermodynamics, by C. F. Bohren & B. A. Albrecht (1998), Oxford)

この式は以下のようにして導かれる。まず、2相の間の変化を考える。

$$U = \tau U_w + (1 - \tau) U_v \quad , \quad V = \tau V_w + (1 - \tau) V_v$$

$U$  は内部エネルギー、 $V$  は体積、 $\tau$  は液相の質量割合、添字  $v$  は相変化する前の最初の状態、 $w$  は相変化後の状態とする。そうすると

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial V} = \frac{U_v - U_w}{V_v - V_w} \quad (4.13)$$

さらに、蒸発のエンタルピーを相変化前後のエンタルピーの差として定義する：

$$\Delta H \equiv H_v - H_w = U_v - U_w + p(V_v - V_w)$$

そうすると (4.13) 式は

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{U_v - U_w}{V_v - V_w} = \frac{H_v - H_w}{V_v - V_w} - p$$

さらに、

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial}{\partial V} \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \quad (4.14)$$

$$= \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial V} + p \right) \right\} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} + \frac{\partial p}{\partial T} \right) - \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial U}{\partial V} + p \right) \quad (4.15)$$

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial V} = T \frac{\partial p}{\partial T} - p$$

だから、

$$\frac{H_v - H_w}{V_v - V_w} - p = T \frac{\partial p}{\partial T} - p \quad \rightarrow \quad T \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\Delta H}{V_v - V_w}$$

つまり、

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{1}{T} \frac{\Delta H}{V_v - V_w} = \frac{1}{T} \frac{L_v}{\alpha_v - \alpha_w} \approx \frac{1}{T} \frac{L_v}{\alpha_v} = \frac{L_v e_s}{R_v T^2}$$

ここで、 $\alpha$  は比容。導出終わり。

< 参考導出・ここまで >

地球大気の温度範囲では潜熱は温度に関し一定としても大きな誤差はないので、 $L_v = \text{const.}$  を仮定すると Clausius-Claperyon の式は積分でき、

$$e_s = e_{s0} \exp \left[ -\frac{L_v}{R_v T} + \frac{L_v}{R_v T_0} \right] = e_{s0} \exp \left[ \frac{L_v}{R_v} \frac{T - T_0}{T T_0} \right] \quad (4.16)$$

$$= 611 \cdot \exp \left[ \frac{L_v}{R_v} \frac{T - 273.16}{273.16 T} \right] \approx 611 \cdot \exp \left[ 19.9 \times \frac{T - 273.16}{T} \right] \quad (\text{Pa}) \quad (4.17)$$

となる。ここで  $e_{s0} = 611$  は摂氏 0 度での飽和水蒸気圧。実際にはこの積分で無視した効果も含んでいる実験式が使われることが多い。なかでも、次のテテンズ (Tetens) の実験式が良く用いられている (誤差数%程度)：

$$e_s = 611 \times 10^{\frac{at}{t+b}} \quad (\text{Pa}) \quad (4.18)$$

ここで、 $t$  は気温 (摂氏)、定数は、水面上では  $a = 7.5$ 、 $b = 237.3$ 、氷面状では  $a = 9.5$ 、 $b = 265.3$  となる。



その他に、やはり実験式の

$$e_s \approx 611 \cdot \exp \left[ 17.67 \times \frac{T - 273.16}{T - 29.66} \right] \quad (\text{Pa}) \quad (4.19)$$

も精度よく飽和水蒸気圧を計算できる（誤差 0.5 % 程度以下）

相対湿度 現在の水蒸気圧を  $e$  とする，相対湿度は

$$r \equiv \frac{e}{e_s} \times 100 \quad (\%) \quad (4.20)$$

と定義される。ただし、

$$r = \frac{q}{q_s} \times 100 \quad (\%)$$

で定義するものもあるが、通常は蒸気圧の定義の方を用いる。

$$q \equiv \varepsilon \frac{e}{p_d} = \varepsilon \frac{e}{p - e}$$

だから、これらは少し値が違う。

露点 (dew point) 露点とは，現在の水蒸気圧を飽和水蒸気圧とするような温度のこと。たとえば，シリンダーの中に湿潤空気を封入し，ピストンは自由に動いて内部の圧力を一定に保っているとする。そうしてそのシリンダーを冷やしていったら，飽和水蒸気圧が封入空気の水蒸気圧に一致したときの温度。つまり，空気を等圧的に冷やしたときに飽和する温度である。

過冷却 (super cool) 摂氏 0 度以下でも凍っていない水の状態

過飽和 (super saturation) 飽和水蒸気圧よりも水蒸気圧が高い状態

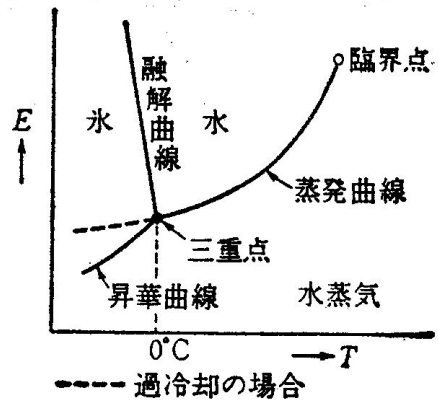
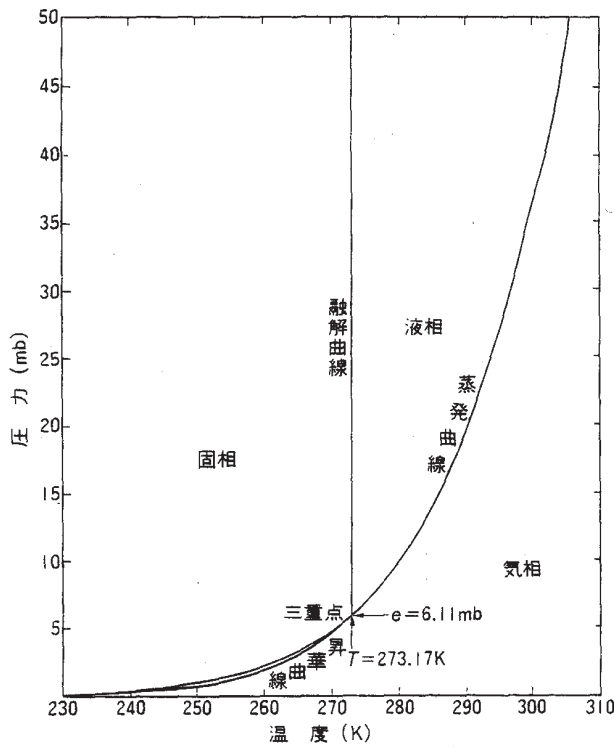
水滴に対する飽和水蒸気圧 水には表面張力があるため，水の表面に曲率がある場合の飽和水蒸気圧は上記のような平面と異なる。半径  $r$  の水滴の飽和水蒸気圧は Kelvin の式

$$\frac{e_{sr}}{e_{s\infty}} = \exp \left[ \frac{1}{\rho_w R_v T} \frac{2\sigma}{r} \right] \quad (4.21)$$

で求めることができる。ここで， $\sigma$  は表面張力。たとえば，摂氏 20 度の場合，水滴半径を  $\mu\text{m}$  単位で表した時の Kelvin の式は

$$\frac{e_{sr}}{e_{s\infty}} \approx \exp \left[ \frac{1.1 \times 10^{-3}}{r} \right] \quad (4.22)$$

となる。つまり，小さな水滴ほど水蒸気圧が高くないと存在できないので，水分子が集まって雲粒（数  $\mu\text{m}$ ）ができるのは大変なことである。



第 3.1 図

図 4.1 水の相変化と飽和蒸気圧曲線 (浅井ほか、「雲や降水を伴う大気」(1981)より)

(a) 水の飽和蒸気圧 (0C 以下は過冷却)

温度(C)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-30	0.51	0.46	0.42	0.38	0.35	0.31	0.28	0.26	0.23	0.21
-20	1.25	1.15	1.05	0.97	0.88	0.81	0.74	0.67	0.61	0.56
-10	2.86	2.65	2.44	2.25	2.08	1.91	1.76	1.62	1.49	1.37
- 0	6.11	5.68	5.28	4.90	4.55	4.22	3.91	3.62	3.35	3.10
0	6.11	6.57	7.06	7.58	8.13	8.72	9.35	10.02	10.73	11.48
10	12.28	13.13	14.02	14.98	15.99	17.05	18.18	19.38	20.64	21.98
20	23.39	24.87	26.44	28.10	29.85	31.69	33.63	35.67	37.81	40.08
30	42.25	44.95	47.57	50.33	53.23	56.26	59.45	62.79	66.30	69.97

(b) 氷の飽和蒸気圧

温度(C)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-30	0.38	0.34	0.31	0.28	0.25	0.22	0.20	0.18	0.16	0.14
-20	1.03	0.94	0.85	0.77	0.70	0.63	0.57	0.52	0.47	0.42
-10	2.60	2.38	2.17	1.99	1.81	1.65	1.51	1.37	1.25	1.14
- 0	6.11	5.63	5.18	4.76	4.37	4.02	3.69	3.38	3.10	2.84

図 4.2 水の飽和蒸気圧と氷の飽和蒸気圧 (hPa) (浅井ほか、「雲や降水を伴う大気」(1981)より)

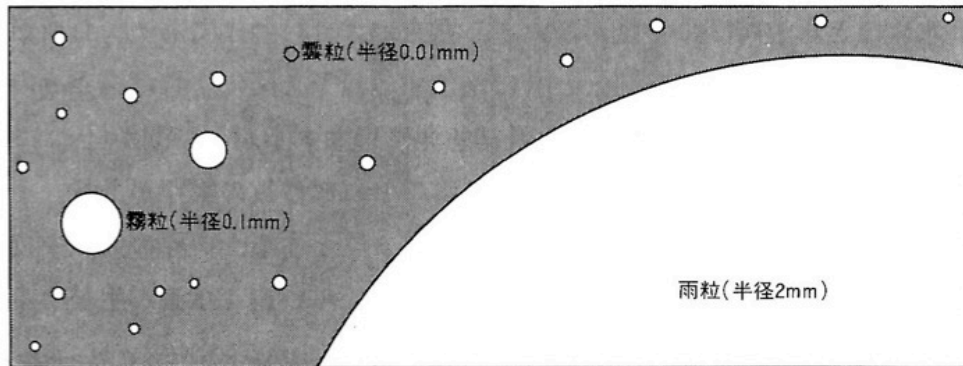


図 4.3 水滴の半径の比較 (小倉、「一般気象学」(1988)より)

### 4.2.3 飽和湿潤断熱過程

未飽和空気塊が上昇するときを考えてみよう。最初、飽和するまでは乾燥断熱減率

$$-\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_{pm}} \approx \frac{\Gamma_d}{1 + 0.846q} \approx 9.5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1} \quad (4.23)$$

で温度が下がる。この断熱膨張による気温低下のため、飽和となる水蒸気圧が気温に応じて下がり (C-P の式) ある高さで飽和水蒸気圧と水蒸気圧が同じになる。すなわち飽和する。(空気塊の圧力が下がるために、空気塊自体の水蒸気圧も下がることに注意) この点を持ち上げ凝結高度 (Lifting-condensation level、LCL) という。通常、雲底高度はこの高さの付近にある。ちなみに、良く見かける雲では雲底がほぼ水平である。すなわち、温度と湿度の分布が個々の雲程度のスケールではほぼ水平となっている。LCL以上の高度まで持ち上げると凝結熱放出のため空気塊の気温減少率は小さくなり、ついには周りの空気より温度が高くなる。この高度までは空気塊の方が周りの大気より気温が低く、空気塊に対して仕事をしてやって持ち上げている。この高度以上では周りの空気より温度が高くなるので、空気塊は仕事をしてやらなくても自分で上昇を始める。そこで、このようにして周りの空気と同じ気温になった高度を「自由対流高度」(Level of free convection: LFC) という。

持ち上げ凝結高度 (Lifting Condensation Level) の推定

露点は等圧的に空気塊を冷やしたときに飽和する温度だったが、大気中で空気塊を持ち上げると、圧力が変わる (減る) のでその空気塊に含まれている水蒸気圧も変化する (減る)。よって、初期の露点であるような気温に下がるまで上昇したときに飽和になるのではなく、もう少し高いところで飽和となる。

飽和に達するまでの空気塊の温度変化は

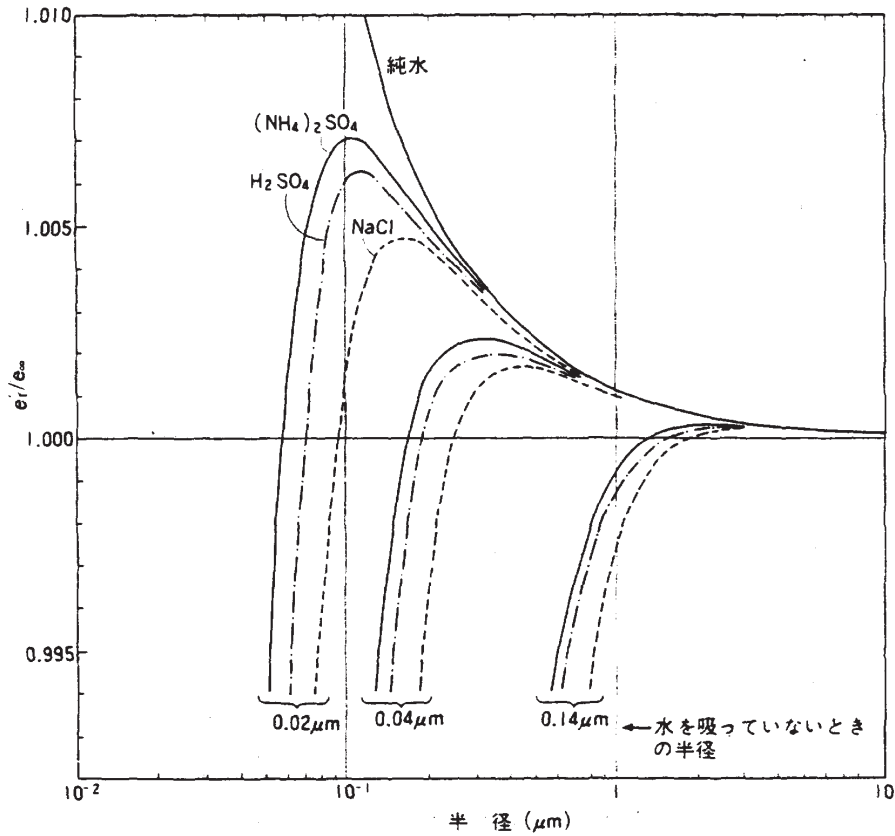


図 4.4 雨滴の半径と平衡水蒸気圧との関係 (281.45 K) (浅井ほか、「雲や降水を伴う大気」(1981)より)

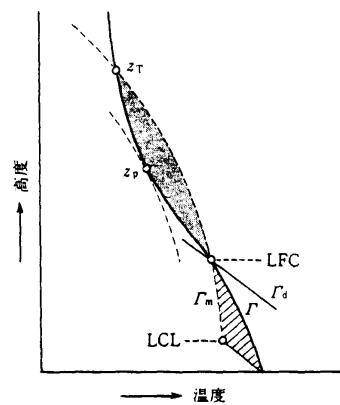


図 8.6 条件付不安定な大気中の対流雲の発達  
 太い実線が状態曲線、細い実線が乾燥断熱線、  
 破線が湿潤断熱線。LCLが持ち上げ凝結高度で、  
 LFCが自由対流高度。

図 4.5 水蒸気を含む大気中を空気塊が上昇する時の温度変化 (小倉、「メソ気象の基礎理論」(1977)より)

$$T = T_0 - \Gamma_d(z - z_0)$$

それに対し、気圧変化による露点の変化が気温変化と同様に

$$T_{dew} = T_{dew0} - \Gamma_{dew}(z - z_0)$$

と表現できたと仮定する。ただし、露点は  $T_d$  と表記することが多いが、ここでは乾燥空気と紛らわしいので  $T_{dew}$  と表記する。すると、持ち上げ凝結高度は  $T = T_{dew}$  となる高さなので

$$z_{LCL} = z_0 + \frac{T_0 - T_{dew}}{\Gamma_d - \Gamma_{dew}}$$

となることになる。

具体的にもとめよう。まず、露点  $T_{dew}$  の定義は  $e = e_s(T_{dew})$  だから

$$\frac{de}{dz} = \frac{de_s}{dT} \Big|_{T=T_{dew}} \frac{dT_{dew}}{dz}$$

一方、 $e = \frac{q}{q+\varepsilon}p$  だから、飽和するまで混合比は一定であることを使うと  $\frac{de}{dz} = \frac{q}{q+\varepsilon} \frac{dp}{dz}$  となり、上の式は

$$\frac{de_s}{dT} \Big|_{T=T_{dew}} \frac{dT_{dew}}{dz} = \frac{de}{dz} = \frac{q}{q+\varepsilon} \frac{dp}{dz} \rightarrow \left( \frac{1}{e_s} \frac{de_s}{dT} \right) \Big|_{T=T_{dew}} \frac{dT_{dew}}{dz} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}$$

この式は、Clausius-Clapeyron の式と静水圧平衡の式をつかって変形すると

$$-\frac{dT_{dew}}{dz} = \Gamma_{dew} = \frac{g}{\varepsilon L} T_{dew} \approx 1.7 \sim 1.9 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$$

結局

$$z_{LCL} \approx z_0 + \frac{T_0 - T_{dew}}{8} \text{ km} \quad (4.24)$$

#### 湿潤断熱過程と偽断熱過程

凝結成分が考えている系内にとどまる場合、可逆的に変化させうる (reversible process)。このとき、系外と熱の交換がなければ ( $Q = 0$  なら、つまりエントリピーに変化がなければ) 湿潤断熱過程という。しかし、系外に脱落すると非可逆過程 (irreversible process) かつ、非断熱過程になる。凝結成分が系外へ直ちに抜けてしまう場合は、偽断熱過程 (pseudoadiabatic process) という。

#### 湿潤断熱減率

湿潤断熱減率は、大まかにいって、乾燥断熱減率に潜熱放出の効果が加わったものであるから

$$-\frac{dT}{dz} = \Gamma_m = \Gamma_d + \frac{L_v}{c_p} \frac{dq_s}{dz} = \frac{g}{c_p} + \frac{L_v}{c_p} \frac{dq_s}{dz}$$

となるだろう。これは、凝結した水の比熱を考慮していないことに注意。これをもう少し近似してみよう。

$q_s \equiv \varepsilon \frac{e_s}{p_d} \approx \varepsilon \frac{e_s}{p}$  だから

$$\frac{1}{q_s} \frac{dq_s}{dz} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} + \frac{1}{e_s} \frac{de_s}{dz} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} + \frac{1}{e_s} \frac{de_s}{dT} \frac{dT}{dz} = \frac{g}{R_d T_v} + \frac{L_v}{R_v T^2} \frac{dT}{dz}$$

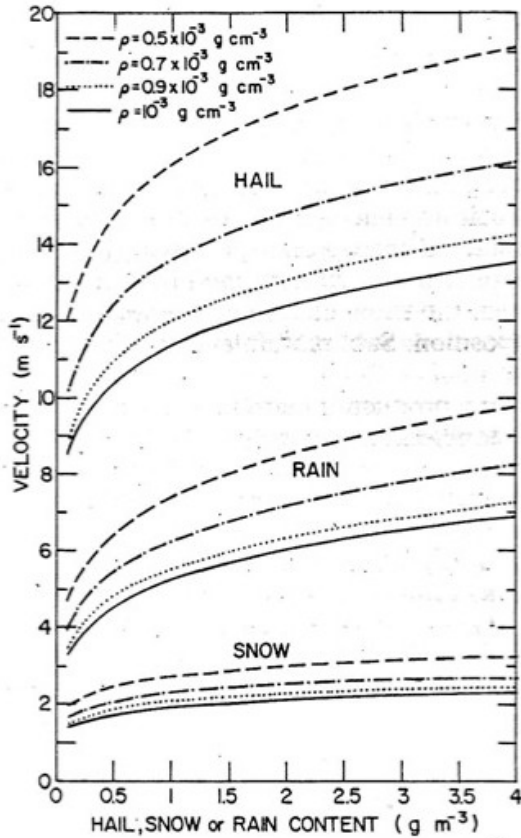


図 4.6 降水粒子の終端速度 Lin et al. (1983) より

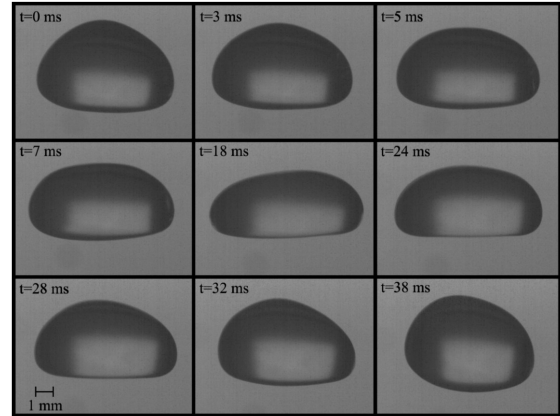


FIG. 1. One oscillation period of a water drop with 5.76-mm equivalent diameter floating freely in the Mainz vertical wind tunnel. The measurement was carried out at a recording speed of 1000 frames per second.

図 4.7 降水粒子の形 Szakall et al. (2009) より

故に

$$\Gamma_m = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p} \frac{1 + L_v q_s / R_d T_v}{1 + L_v^2 q_s / c_p R_v T^2} = \Gamma_d \frac{1 + L_v q_s / R_d T_v}{1 + L_v^2 q_s / c_p R_v T^2} < \Gamma_d \quad (4.25)$$

これが湿潤断熱減率の(近似)式。値は1 km当たり5度弱になる。先ほどの現実大気の温度勾配は乾燥断熱減率と湿潤断熱減率の間になっている。つまり、乾燥断熱的な運動に対しては安定だが、湿潤断熱的な運動に対しては不安定となっていて、条件付き不安定 (conditional instability, conditionally unstable) と呼ぶ。

<きちんとした導出>

空気塊全体のエントロピーは  $S = M_v s_v + M_d s_d + M_w s_w$  である。断熱減率を導出するために、鉛直方向の変化を考える。まず、 $T \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial V} + p$  だから、平衡状態にある単位質量の水蒸気と水とを考え、式(4.13)を導出した際の考察を用いると

$$T \frac{s_v - s_w}{V_v - V_w} = \frac{U_v - U_w}{V_v - V_w} + p$$

$$\therefore T(s_v - s_w) = U_v - U_w + p(V_v - V_w) = H_v - H_w = L_v$$

これと  $\frac{dM_v}{dz} = -\frac{dM_w}{dz}$  をつかうと

$$\frac{dS}{dz} = \frac{dM_v}{dz} \frac{L_v}{T} + M_v \frac{ds_v}{dz} + M_w \frac{ds_w}{dz} + M_d \frac{ds_d}{dz}$$

となる。乾燥空気と水蒸気と水のエントロピー鉛直変化は式はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{ds_d}{dz} = \frac{c_{pd}}{T} \frac{dT}{dz} - \frac{R_d}{p_d} \frac{dp_d}{dz}$$

$$\frac{ds_v}{dz} = \frac{c_{pv}}{T} \frac{dT}{dz} - \frac{R_v}{e} \frac{de}{dz}$$

$$\frac{ds_w}{dz} = \frac{c_w}{T} \frac{dT}{dz}$$

さらに、湿潤断熱過程ではつねに飽和しているので、

$$\frac{de}{dz} = \frac{de_s}{dz} = \frac{de}{dT} \frac{dT}{dz}$$

よって、水蒸気のエントロピー鉛直変化は

$$\frac{ds_v}{dz} = \frac{c_{pv}}{T} \frac{dT}{dz} - \frac{R_v}{e_s} \frac{de}{dT} \frac{dT}{dz}$$

となる。これらの式を大気全体のエントロピーの式に代入し、

$$\frac{\partial L_v}{\partial T} = \frac{\partial H_v}{\partial T} - \frac{\partial H_w}{\partial T} = c_{pv} - c_w$$

を使うと

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dz} &= \frac{dM_v}{dz} \frac{L_v}{T} + (M_v c_{pv} + M_w c_w + M_d c_{pd}) \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} - \frac{M_v R_v}{e_s} \frac{de_s}{dT} \frac{dT}{dz} - \frac{M_d R_d}{p_d} \frac{dp_d}{dz} \\ &= (M c_w + M_d c_{pd}) \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} + \frac{d}{dz} \left( \frac{M_v L_v}{T} \right) - \frac{M_d R_d}{p_d} \frac{dp_d}{dz} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$M = M_w + M_v$$

となり、結局  $c_p \equiv \frac{M c_w + M_d c_{pd}}{M_d}$  とすると、飽和混合比を使って

$$\frac{T}{M_d} \frac{dS}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} + T \frac{d}{dz} \left( \frac{q_s L_v}{T} \right) - \frac{R_d T}{p_d} \frac{dp_d}{dz}$$

と書ける。これに、 $p = p_d + e_s$  と Clausius-Claperyon の式と  $q_s \equiv \rho_{vs}/\rho_d = (p_v R_d)/(p_d R_v)$  をつかうと

$$-\frac{R_d T}{p_d} \frac{dp_d}{dz} = -\frac{R_d T}{p_d} \frac{dp}{dz} + \frac{q_s L_v}{T} \frac{dT}{dz}$$

となるから

$$\frac{T}{M_d} \frac{dS}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} + \frac{d}{dz} (q_s L_v) - \frac{R_d T}{p_d} \frac{dp}{dz}$$

と変形できる。さらに、静水圧を仮定すると

$$-\frac{R_d T}{p_d} \frac{dp}{dz} = g \frac{R_d}{R} \frac{p}{p_d} = g R_d \frac{p}{p_d} \left( \frac{p_d}{p R_d} + \frac{e}{p R_v} \right) = g \left( 1 + \frac{e}{p_d} \frac{R_d}{R_v} \right) \approx g \quad \text{for } \frac{e}{p_d} \ll 1$$

と近似できるので，

$$\frac{T}{M_a} \frac{dS}{dz} \approx c_p \frac{dT}{dz} + \frac{d}{dz} (q_s L_v) + g$$

となる。断熱過程ではエントロピーが変化しないから、結局、湿潤断熱過程では

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p} - \frac{1}{c_p} \frac{d}{dz} (q_s L_v)$$

となる。

この式はもう少し簡単にできる。

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p} - \frac{L_v}{c_p} \frac{dq_s}{dz} - \frac{q_s}{c_p} \frac{dL_v}{dT} \frac{dT}{dz} \rightarrow \frac{dT}{dz} \left( 1 + \frac{q_s}{c_p} \frac{dL_v}{dT} \right) = -\frac{g}{c_p} - \frac{L_v}{c_p} \frac{dq_s}{dz}$$

凝結熱の定義から

$$\frac{dT}{dz} \left( 1 + \frac{q_s (c_{pv} - c_w)}{c_p} \right) \approx \frac{dT}{dz} \approx -\frac{g}{c_p} - \frac{L_v}{c_p} \frac{dq_s}{dz}$$

<以上>

相当温位 湿潤断熱過程にも乾燥断熱過程と温位と同様な保存量「相当温位」がある。いろいろな導出法や近似式がある。

発見的導出法：(小倉)

保存量だから、湿潤断熱と同様な方法で導けるであろう。飽和空気塊が周りとの熱をやりとりせずに(湿潤断熱的に)上昇すると、発生する凝結熱は  $dQ = -L_v dq_s$  になる。 $q_s$  は飽和混合比。このとき、生成した水の質量や比熱を無視すると(偽断熱)、乾燥空気の熱力学の式に凝結熱が加わることになる。乾燥空気では  $\frac{dQ}{T} = c_p \frac{d\theta}{\theta}$  だから、

$$-L_v dq_s = dQ = c_p T \frac{d\theta}{\theta} \rightarrow -\frac{L_v}{c_p T} dq_s = \frac{d\theta}{\theta} \quad (4.27)$$

ここの左辺を微分中に入れた形にしたい。地球の気象学の扱う範囲では、気温は  $300 \text{ K} \pm$  数十程度だが、混合比はゼロ近くまでなりうるので

$$\frac{dq_s}{q_s} \gg \frac{dT}{T}$$

となって、式(4.27)の左辺は

$$-\frac{L_v}{c_p T} dq_s \approx -d \left( \frac{L_v q_s}{c_p T} \right)$$

と近似できる。結局

$$-d \left( \frac{L_v q_s}{c_p T} \right) \approx \frac{d\theta}{\theta} \rightarrow 0 \approx d \left( \frac{L_v q_s}{c_p T} + \ln \theta \right) = d \left\{ \ln \left( \theta \exp \left[ \frac{L_v q_s}{c_p T} \right] \right) \right\}$$

これを積分して



$$\theta \exp \left[ \frac{L_v q_s}{c_p T} \right] = \theta_1 \exp \left[ \frac{L_v q_{1s}}{c_p T_1} \right]$$

ここで、積分の上限を充分上方の  $q_s \rightarrow 0$  となる高さとし、そのときの温位を  $\theta_e$  とすると、

$$\theta_e = \theta \exp \left[ \frac{L_v q_s}{c_p T} \right] \quad (4.28)$$

となる。これを相当温位という。このように、相当温位は「飽和した空気塊が偽断熱的に上昇してすべての水蒸気を凝結させてしまったときに持つ温位」として定義できる。相当温位は、偽湿潤断熱過程ではほぼ保存量である。

#### <より厳密な導出法>

式 (4.26) において全水物質（水と水蒸気）の混合比を  $q_t$  とすると

$$\frac{1}{M_d} \frac{dS}{dt} = (q_t c_w + c_{pd}) \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{d}{dz} \left( \frac{q_v L_v}{T} \right) - \frac{R_d}{p_d} \frac{dp_d}{dt} \quad (4.29)$$

ここで、次のような温位に良く似た量

$$\theta_d \equiv T \left( \frac{p_0}{p_d} \right)^{R_d/c_{pt}} \quad c_{pt} \equiv c_{pd} + q_t c_w$$

を導入する。比熱の項に乾燥空気と全水物質（気相と液相の水の和）に関する比熱が入っていること、分母の圧力が乾燥空気の圧力であることに注意してほしい。この量を使うと式 (4.29) は

$$\frac{1}{M_d} \frac{dS}{dt} = c_{pt} \frac{d \ln \theta_d}{dt} + \frac{d}{dz} \left( \frac{q_v L_v}{T} \right) = \frac{d}{dz} \left( c_{pt} \ln \theta_d + \frac{q_v L_v}{T} \right) \quad (4.30)$$

となる。

系全体で断熱（等エントロピー）過程では  $dS/dt = 0$  なので、式 (4.30) を積分して

$$c_{pt} \ln \frac{\theta_{df}}{\theta_d} = - \left( \frac{q_{vf} L_{vf}}{T_f} - \frac{q_v L_v}{T} \right)$$

空気塊を十分高いところまで可逆湿潤断熱的に上昇させ、総ての水蒸気を凝結させたときの  $\theta_{df}$  を相当温位と呼び、 $\theta_e$  と表記すると、相当温位の定義は

$$\theta_e = \theta_d \exp \left[ \frac{q_v L_v}{c_{pt} T} \right] \quad (4.31)$$

となる。このように定義された相当温位は、直感的な導出で定義した際の意味「飽和空気塊を偽断熱的に上昇させ、総ての水蒸気を凝結させたときの温位」とは近似的にしか一致していない。なぜなら、この相当温位の定義中に使われているの  $\theta_d$  定義には全水物質の混合比が含まれているからである。こうして定義された相当温位は（可逆的）湿潤断熱過程において保存量となる。

#### <より厳密な導出・終り>

相当温位は、飽和していない空気に対しては、持ち上げ凝結高度に達したときの乾燥大気の温位

$$\theta_{LCL} \equiv T_{LCL} \left( \frac{p_0}{p_{LCL} - e_{sLCL}} \right)^{R_d/c_p}$$

を用いて次のように定義できる。

$$\theta_e = \theta_{LCL} \exp \left[ \frac{L_v q_{LCL}}{c_p T_{LCL}} \right] \quad (4.32)$$

このように定義を拡張すると、不飽和空気塊に対しても相当温位は保存量となる。

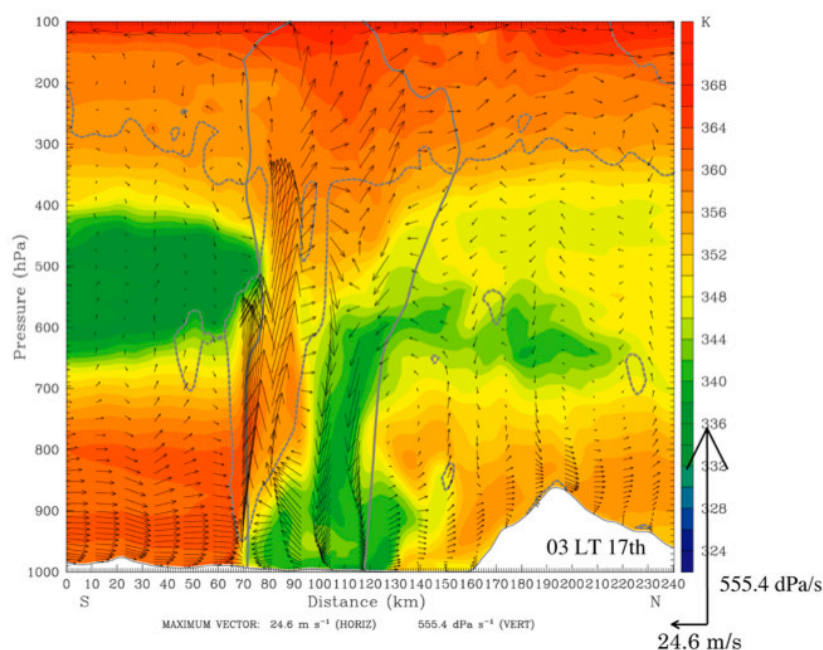


図 4.8 相当温位の利用例 Kataoka & Satomura (2005) より

相当温位の定義には  $T_{LCL}$  などが含まれているので、正確に計算するのはやっかいである。実際にはそれほど精度が求められないことも多いので、近似式が用いられることもある。数度程度の誤差でよいのなら、次の式を使うことができる。

$$\theta_e \approx \theta \exp \left[ \frac{q L_v}{c_p T_{LCL}} \right] \approx \theta + \frac{\theta}{T_{LCL}} \frac{q L_v}{c_p} \approx \theta + \frac{q L_v}{c_p}$$

例えば、空気中に  $1\text{g/kg} = 10^{-3}\text{kg/kg}$  の水蒸気が含まれていたとすると、相当温位の方が乾燥温位より約 2.5 度高くなる。

**飽和相当温位** 未飽和の空気塊に対し、その空気塊が同じ温度・圧力 ( $T, p$ ) の下で飽和しているとしたときに持つ相当温位を飽和相当温位という：

$$\theta_{es} = \theta \exp \left[ \frac{q_s(T, P) L_v}{c_p T} \right]$$

## 条件付き安定性

飽和相当温位の鉛直変化を見てみよう。

$$\frac{d \ln \theta_{es}}{dz} = \frac{1}{\theta_{es}} \frac{d\theta_{es}}{dz} = \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dz} + \frac{L_v}{c_p} \frac{d}{dz} \left( \frac{q_s}{T} \right) = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} - \frac{R_d}{c_p p} \frac{dp}{dz} - \frac{L_v q_s}{c_p T^2} \frac{dT}{dz} + \frac{L_v}{c_p T} \frac{dq_s}{dz}$$

ここで,

$$-\frac{R_d}{c_p p} \frac{dp}{dz} = \frac{g}{c_p T} = \frac{\Gamma_d}{T}$$

$$q_s = \frac{\varepsilon e_s}{p_d} \approx \frac{\varepsilon e_s}{p}$$

$$\frac{L_v}{c_p T} \frac{dq_s}{dz} = \frac{\varepsilon L_v}{c_p T} \frac{d}{dz} \left( \frac{e_s}{p} \right) = \frac{\varepsilon L_v}{c_p T p} \left( \frac{de_s}{dz} - \frac{e_s}{p} \frac{dp}{dz} \right) = \frac{\varepsilon L_v}{c_p T p} \frac{de_s}{dz} - \frac{\Gamma_d \varepsilon e_s L_v}{R_d T^2 p}$$

を使うと

$$\frac{1}{\theta_{es}} \frac{d\theta_{es}}{dz} = \frac{1}{T} \left[ \frac{dT}{dz} \left( 1 + \frac{\varepsilon L_v}{c_p p} \frac{de_s}{dT} - \frac{\varepsilon L_v e_s}{c_p p T} \right) + \Gamma_d \left( 1 + \frac{\varepsilon e_s L_v}{R_d T p} \right) \right]$$

となる。さらに,  $\frac{dq_s}{q_s} \gg \frac{dT}{T}$  と Clausius-Claperyon の式  $\frac{1}{e_s} \frac{de_s}{dT} = \frac{L}{R_v T^2}$  を使うと

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_{es}} \frac{d\theta_{es}}{dz} &\approx \frac{1}{T} \left[ \frac{dT}{dz} \left( 1 + \frac{\varepsilon L_v}{c_p p} \frac{de_s}{dT} \right) + \Gamma_d \left( 1 + \frac{\varepsilon e_s L_v}{R_d T p} \right) \right] \\ &= \frac{1 + \frac{\varepsilon L_v}{c_p p} \frac{de_s}{dT}}{T} \left[ \frac{dT}{dz} + \Gamma_d \frac{1 + q_s L_v / R_d T}{1 + L_v^2 q_s / c_p R_v T^2} \right] \\ &= \frac{1 + \frac{\varepsilon L_v}{c_p p} \frac{de_s}{dT}}{T} (\Gamma_m - \Gamma) \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる。即ち,  $d\theta_{es}/dz$  と  $\Gamma_m - \Gamma$  の符号は等しい。これは, 飽和相当温位勾配である種の安定性を判断できることを示している。つまり, 飽和相当温位の鉛直微分が負ならば  $\Gamma > \Gamma_m$  となり, 周りの大気の気温減率は湿潤断熱減率より大きい。空気塊が飽和していて  $d\theta_{es}/dz < 0$  だと, 凝結を始めた空気塊は上昇するにつれ周りの大気より暖かくなり, 不安定である。このような安定度を持つ大気を「条件付き不安定」な大気と呼ぶ。

これまでの安定性をまとめると

$$\Gamma_d < \Gamma \quad \text{or} \quad \frac{d\theta}{dz} < 0 \quad : \quad \text{absolutely unstable} \quad (4.34)$$

$$\Gamma_m < \Gamma < \Gamma_d \quad \text{or} \quad \frac{d\theta_{es}}{dz} < 0 < \frac{d\theta}{dz} \quad : \quad \text{conditionally unstable} \quad (4.35)$$

$$\Gamma < \Gamma_m \quad \text{or} \quad 0 < \frac{d\theta_{es}}{dz} \quad : \quad \text{absolutely stable} \quad (4.36)$$

条件付き不安定の判別には (湿潤断熱減率以外では) 飽和相当温位を用いることに注意すること。単なる相当温位を用いて

$$\frac{d\theta_e}{dz} < 0$$

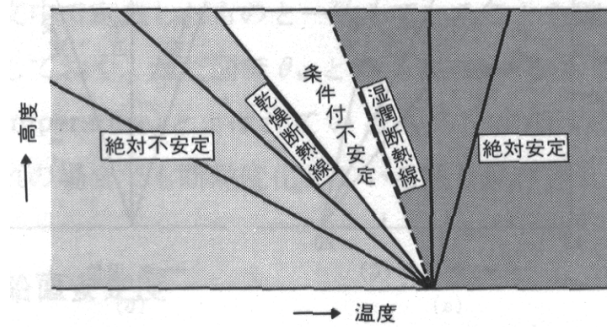


図 4.9 湿潤大気の静的安定性 (小倉、「メソ気象の基礎理論」(1997) より)

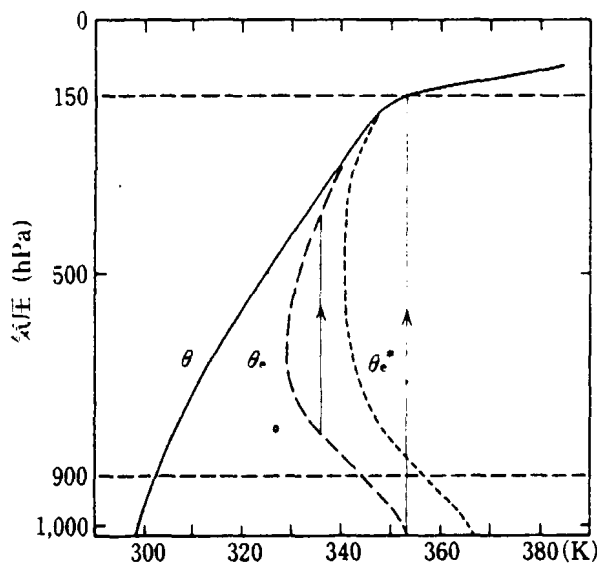


図 4.10 熱帯海上の典型的な温位 ( $\theta$ )、相当温位 ( $\theta_e$ )、飽和相当温位 ( $\theta_e^*$ ) の高度分布 (小倉、「メソ気象の基礎理論」(1997) より)

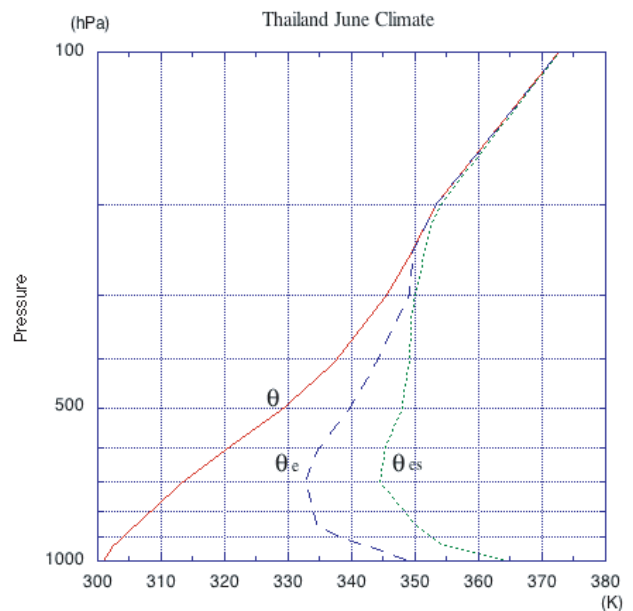


図 4.11 インドシナ半島中央部の温位 ( $\theta$ )、相当温位 ( $\theta_e$ )、飽和相当温位 ( $\theta_e^*$ ) の高度分布 (6月気候値)

となる場合は、対流不安定(convectively unstable)と呼ぶ。この不安定はこれまでのような空気塊の上昇ではなく、層全体が大規模上昇流や山などによって上昇するときに顕在化する不安定である。

water loading (水の荷重) 凝結物質があることによる大気密度への影響を見ておこう。密度は単位体積当たりの質量だから

$$\rho \equiv \frac{M}{V} = \frac{M_d + M_v + M_w}{V}$$

気体部分の密度は  $\rho_{air} = \frac{M_d + M_v}{V}$  だから、空気塊全体の密度は

$$\rho = \frac{M_d + M_v + M_w}{V} = \rho_{air} \left( 1 + \frac{M_w}{M_d + M_v} \right) = \rho_{air} (1 + s_w) \approx \rho_{air} (1 + q_w)$$

と表現できる。凝結物質があると、その比湿または混合比だけ空気の密度が高く、つまり、重たくなっているのと同じ効果を生み出す。これを water loading (水の荷重)という。そのため、凝結物質があるところでは、気体部分だけで静水圧平衡となっているような圧力分布だけでは下向きの加速度を生じることになる。

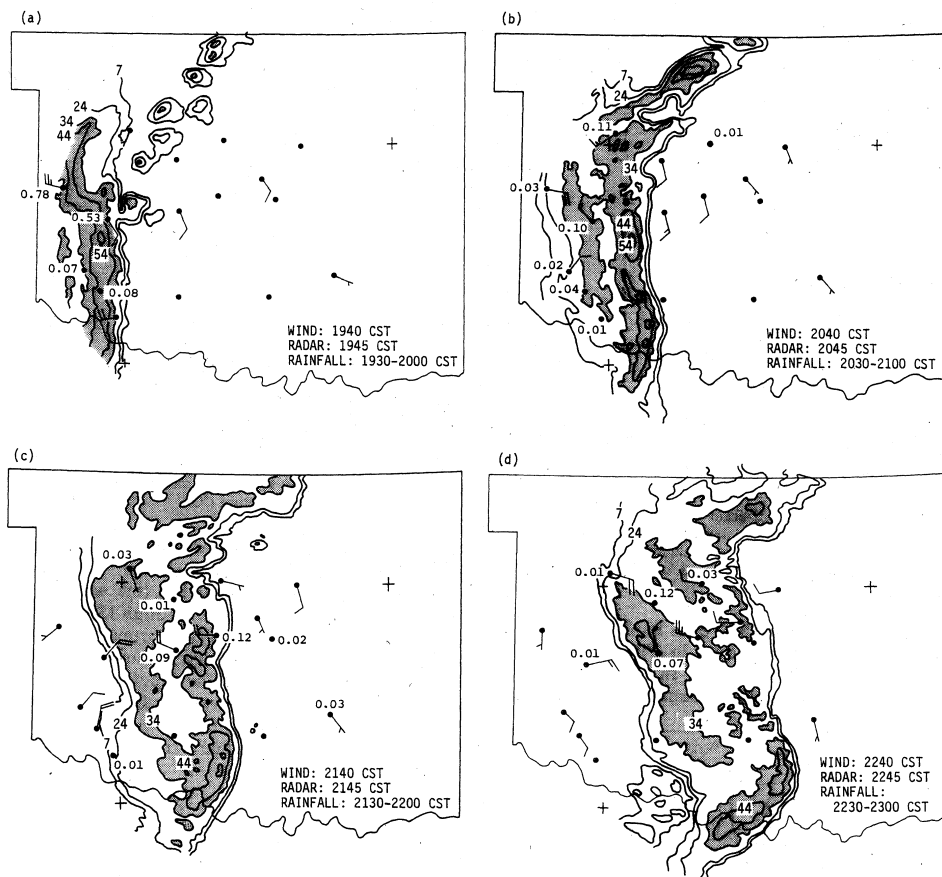


FIG. 6. The PPI radar scan showing radar reflectivity contours at  $0^\circ$  elevation angle on 22 May 1976: (a) 1945 CST, (b) 2045 CST, (c) 2145 CST and (d) 2245 CST. The contours are drawn at 7, 24, 34, 44 and 54 dBZ. The shaded areas indicate radar reflectivity higher than 34 dBZ. Numbers next to the station locations indicate rainfall rate [inches (30 min) $^{-1}$ ]. Surface winds are also shown with full barb for 10 kt.

図 4.12 Ogura and Liou (1980) より

### 断熱図

大気の状態を把握するのに、いつも温位や相当温位を計算して安定度等を見るのは、計算機が手元にない場合は大変である。そのため、簡便に大気の成層状態を知ることのできるような図(断熱図)が考案された。この種のダイアグラムを考案したのは周波数の単位にもなっている物理学者 Hertz と言われている(なぜ彼がこのようなことに興味を持ったかは不明だが、指導教官の Helmholtz の意向という説と気晴らしのためという説がある)。

これらの図から大気状態を一目で了解できるので、今でも使われ続けている。現在の日本でよく使われているのはエマグラムであり、アメリカでは状態曲線(温度の鉛直分布)の変化がよりよくわかる skew-T ダイアグラムが良く用いられる。

<フェーンの例>

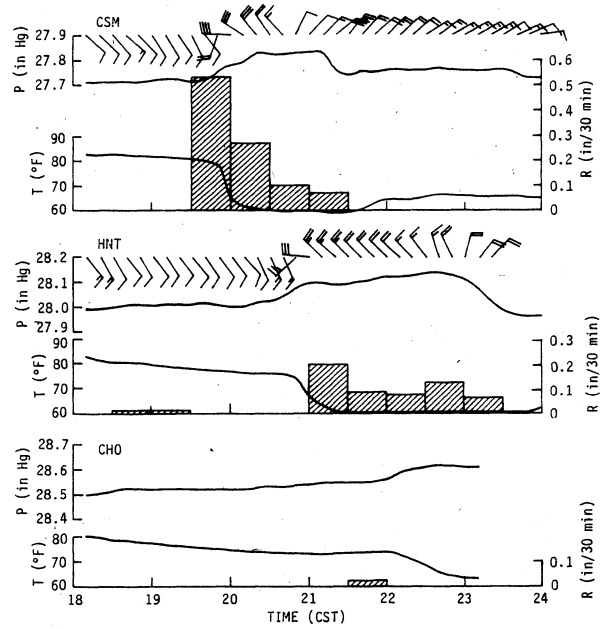


FIG. 7. Temporal variations of surface wind, pressure (inches Hg), temperature (°F) and rainfall rate [inches (30 min)<sup>-1</sup>] measured at CSM, HNT and CHO. Full barb for wind is 10 kt.

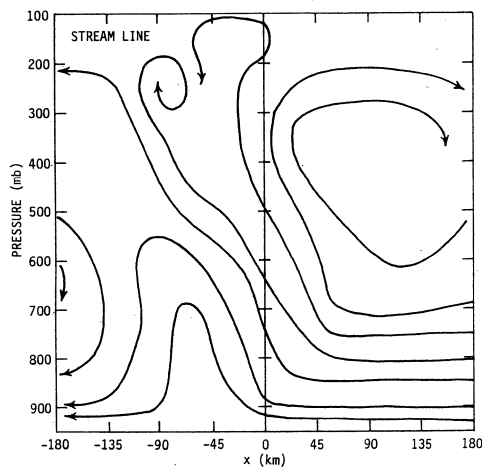


FIG. 17. As in Fig. 13 except for stream lines determined from  $u$  and  $\omega$ .

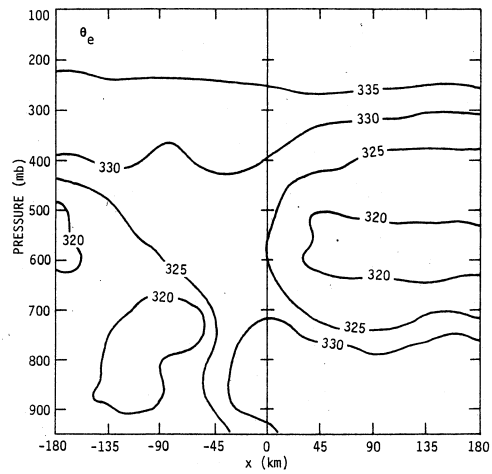


FIG. 19. As in Fig. 13 except for equivalent potential temperature (K).

図 4.13 Ogura and Liu (1980) より

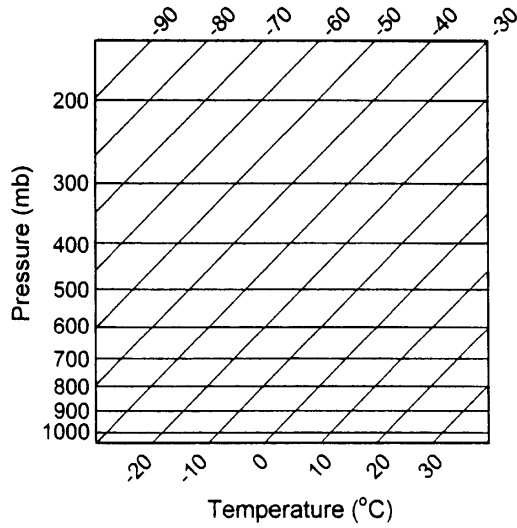


Figure 6.5 Basic coordinates of the skew- $T$  diagram.

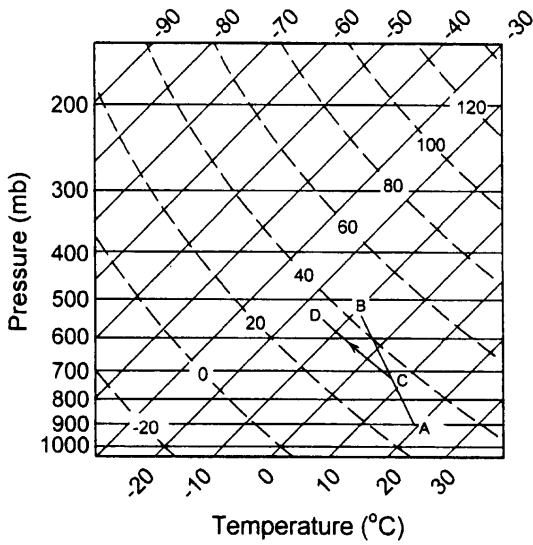


Figure 6.6 Skew- $T$  diagram of Fig. 6.5 with dry adiabats (dashed) added. The line segment  $AB$  shows the temperature structure for a hypothetical sounding between about 500 and 900 mb. Dry adiabatic ascent from 725 mb is illustrated by the line segment  $CD$ .

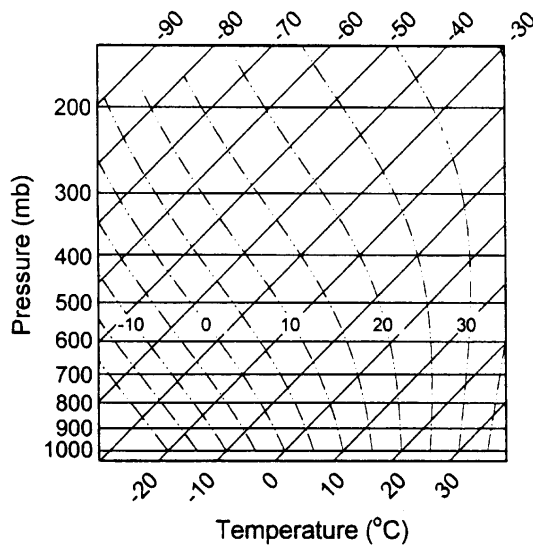


Figure 6.7 Skew- $T$  diagram of Fig. 6.5 with moist adiabats (chain-dashed) added; the isopleths are labeled with the value of the wet-bulb potential temperature (temperature at 1000 mb).

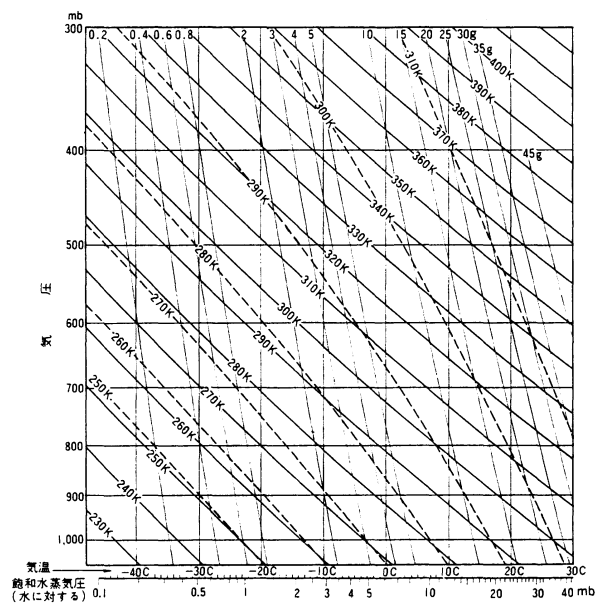
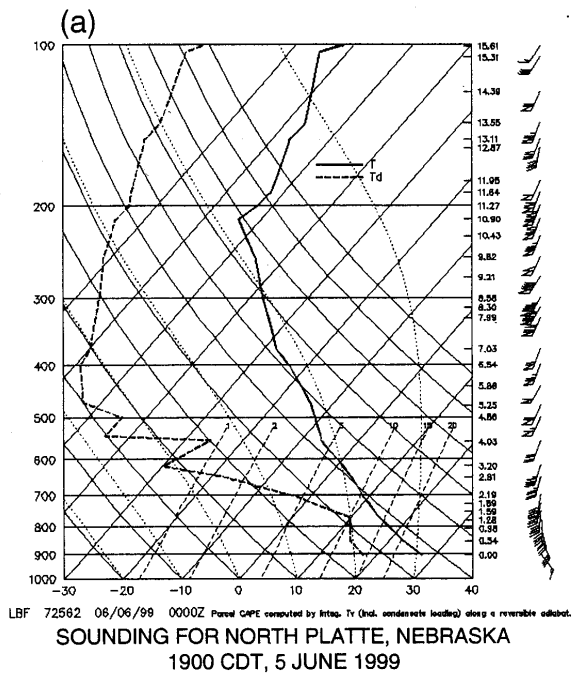


図 4.15 浅井ほか、「雲や降水を伴う大気」(1981) より