

<超伝導状態>

<超伝導の簡単な考察>

① 磁束量子 (思考実験 1)

今, 超伝導線で半径 R のループが作られている場合の半古典物理的思考実験を見てみよう. そのループに電子が一つ最初止まっている (非現実的だが, 半古典的思考実験).

このループに磁場をかけていきループを貫く磁束が, $\phi = \pi R^2 B$ になったとする. このときループに生じている (電子が感じている) 起電力はファラデーの法則から,

$$V = -\frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt} \text{ となる.}$$

一方, V はループに沿って電場 E を積分したものだから, $V = 2\pi R E$ である.

電子の電荷を $-e$ とし, ニュートン方程式は

$$\frac{dp}{dt} = eE = F \text{ (=力)}$$

従って, これらの関係から,

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{-e}{2\pi R c} \right) \frac{d\phi}{dt}$$

ここで, $t=0$, $\phi=0$ で止まっていた電子の状態から出発し $t=t$ まで積分すると,

$$p = \left(\frac{-e}{2\pi R c} \right) \phi \text{ となる.}$$

ここで, 量子論的に de Broglie 波を導入する. すなわち,

$$p = \frac{2\pi}{\lambda} \hbar \quad (= \hbar k)$$

また, Bohr 条件から, $N\lambda = 2\pi R$ も導入する (超伝導が量子力学的な状態であると仮定). これらの関係から,

$$p = \frac{\hbar}{R} N \text{ と量子化され, 従って, 磁束 } \phi \text{ は}$$

$$\phi = \frac{\hbar c}{-e} N = \phi_0 N \text{ と量子化される} \Rightarrow \text{磁束量子 } \phi_0 = \frac{\hbar c}{-e} = 4 \times 10^{-15} \text{ Wb}$$

後に, 電子はクーパー対という 2 つの電子対に対凝縮することが明らかになり, 磁束量子 ϕ_0 は

$$\phi_0 = \frac{\hbar c}{-2e} = 2 \times 10^{-15} \text{ Wb} \text{ であることが, 理論的にも実験的にも明らかになる.}$$

このようなあらい思考実験でも超伝導の振る舞いが少し考察でき, 磁束量子 ϕ_0 が求まる.

② 完全反磁性（思考実験2）：マイスナー効果

今、丸棒状の超伝導体があったとする。丸棒の長さ方向を z 軸として z 軸に磁場 H_a をかける。超伝導体の十分内部には磁場は入らず、表面の厚さ λ 程度まで磁場が侵入しているとする（London の磁場侵入長 λ ）。

丸棒の半径方向を x 、それに垂直な方向を y として Maxwell 方程式 $j = \frac{c}{4\pi} \text{rot} B$ を

考えると、電流密度 j は $j_y = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_z}{\partial x}$ となる。

今、 $x = -\lambda$ から $x = 0$ （超伝導体の表面）までこの表面電流を積分する！

$$I_y = \int_{-\lambda}^0 j_y dx = \left[-\frac{c}{4\pi} B_z \right]_{-\lambda}^0 = \frac{c}{4\pi} [0 - H_a] = -\frac{c}{4\pi} H_a$$

z 軸方向の単位長さ当たりの電流 I_y は $\pi R^2 \times \frac{I_y}{c}$ の磁気モーメント M を作るの、

$$M = -\pi R^2 \times \frac{I_y}{c} / (\pi R^2 \times 1) = -\frac{H_a}{4\pi}$$

$B = H + 4\pi M$ だから超伝導体の内部では磁束密度 B はゼロになる。

<完全反磁性> $\chi = -1/4\pi$

Meissner-Ochsefeld 効果（1933）

③ 完全導体？（抵抗のない回路の思考実験）：（電気抵抗ゼロ）のループを考える。ループの面積を A とする。このループを貫く磁束を増やしていくと、Lenz の法則から、起電力 V が生じ電流 i が流れる（ R はループの抵抗（完全導体ではゼロ）、 L はループのリアクタンスである）。

$$V = -A \frac{dB}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

だが、今、電気抵抗 $R=0$ （完全導体）なので、

$$A \frac{dB}{dt} + L \frac{di}{dt} = 0$$

となる。すなわち、これを積分し、

$$AB + Li = \text{constant}$$

となる。

これがループ回路を貫く全磁束なのだから、したがって、この完全導体を貫く全磁束は時間変化できないことを示している。もし、完全導体に最初に全く磁束が入っていなかったら、磁場を加えてもループに磁束は入らない。

すなわち、この思考実験は完全導体に磁場をかけたときの超伝導体との類似点

を示しているが、超伝導体と全く異なるのは、完全導体では

$$\phi = AB + Li = \text{constant}$$

の条件さえ満たせば良いということである。

これは超伝導体との決定的な違いである。なぜなら、完全導体と超伝導体が、高温の電気抵抗がある状態にあったとし、その状態で磁場を加えて試料内に磁束を導入し、そのままの状態を温度を下げ、完全導体状態 ($R=0$) と超伝導状態になった場合を考えると、完全導体では、磁束は入ったまま（磁束が変化しなだけで磁束が入ったままでもいっこうに不都合はない）であるのに対し、超伝導体では必ず磁束を排除し Meissner 効果を生じることが実験的に認められているのである！

この思考実験は、超伝導体が単なる完全導体 ($R=0$) ではなく、それ以上の何者か（量子力学的状態）であることを明確に示している。