フェルミ面の観測

金属ではフェルミ面近傍の電子のみが全ての性質を決めるから，物性はフェルミ面を反映する．
例えば，電子比熱 γ T，Pauli 常磁性磁化率 χ_P，電気伝導率や熱伝導度：Viedeman-Franz 則．

＜電子比熱＞

自由電子系のエネルギー：$U = \int_0^\infty \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon,T) d\varepsilon$

電子比熱：$C_V = \dfrac{\partial U}{\partial T} = \int_0^\infty \varepsilon D(\varepsilon) \dfrac{\partial f(\varepsilon,T)}{\partial T} d\varepsilon \approx D(\varepsilon_F) \int_0^\infty \varepsilon \dfrac{\partial f(\varepsilon,T)}{\partial T} d\varepsilon = \dfrac{\pi^2}{3} D(\varepsilon_F) k_B^2 T = \gamma T$

参考：$f(\varepsilon,T) = \dfrac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T}+1}$，$\dfrac{df}{d\varepsilon} = -\dfrac{1}{k_B T} f(1-f)$，$\dfrac{df}{dT} = -\dfrac{df}{d\varepsilon}\left(\dfrac{\varepsilon-\mu}{T} + \dfrac{d\mu}{dT}\right)$

＜Pauli 常磁性磁化率＞

$$\chi_P = \int \left\{ \left(D(\varepsilon + H\mu_B) - D(\varepsilon - H\mu_B) \right) f(\varepsilon,T) \right\} d\varepsilon / H$$

$$= 2\mu_B^2 D(\varepsilon_F) = \frac{3Ne\mu_B^2}{2\varepsilon_F} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + ... \right\}$$

直接，フェルミ面の形状を知る．

- de Haas-van Alphen 効果
  χ の 1/H の振動
- サイクロトロン共鳴
- Shubnikov-de Haas 効果
  ρ の磁場による振動　　など

＜磁場内の電子の運動＞

運動方程式：Lorentz 力を受けて運動する電子の Neuton 方程式

$\hbar \dfrac{dk}{dt} = -\dfrac{e}{c} v_k \times H$，　結晶内では電子の運動量 $p = \hbar k$，（電子の電荷：$-e$）

ここで，v_k は電子 $\psi_k(r)$ の速度ベクトル→速度演算子．

$v_k = \dfrac{1}{\hbar} grad_k \varepsilon(k)$，　（演算子 $p/m = \hbar k/m$，$\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$ より）

これらから $\dfrac{dk}{dt}$ は $\boldsymbol{H}$ にも $grad_k\varepsilon(k)$ にも垂直でなければならない！

$grad_k\varepsilon(k)$ は $\varepsilon(k) = constant$ の面に垂直だから，$\boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{H}$ に垂直に $\varepsilon(k) = constant$ の面にそって変化することになる.

$H // z$ とすると，（$\hbar\dfrac{dk_z}{dt} = 0 \Rightarrow k_z = constant$）

$v_k = \dfrac{1}{\hbar} grad_k\varepsilon(k)$ → $\dfrac{dr}{dt} = v_k = \dfrac{1}{\hbar}\dfrac{\partial\varepsilon(k)}{\partial k}$ を用いて運動方程式を書き下し，

$$
\begin{cases}
\hbar\dfrac{dk_x}{dt} = -\dfrac{e}{\hbar c}\dfrac{\partial\varepsilon(k)}{\partial k_y}H = -\dfrac{e}{c}H\dfrac{\partial y}{\partial t} \\
\hbar\dfrac{dk_y}{dt} = \dfrac{e}{\hbar c}\dfrac{\partial\varepsilon(k)}{\partial k_x}H = \dfrac{e}{c}H\dfrac{\partial x}{\partial t} \\
\hbar\dfrac{dk_z}{dt} = 0 \Rightarrow k_z = constant
\end{cases}
$$

これを積分して，

$$
\begin{cases}
\dfrac{\hbar c}{eH}k_x = -y + Y \\
\dfrac{\hbar c}{eH}k_y = x + X \\
k_z = Z
\end{cases}
$$
ここで，X, Y, Z は積分定数.

つまり，k 空間の軌道 C と実空間の C’は相似で C’は C を 90° 回転して $\dfrac{\hbar c}{eH}$ かければ良いことがわかる！⇨電子の運動はフェルミ面の形と密接に関係していることがわかる！

例えば，閉じた軌道⇨電子のサイクロトロン運動（振動数 ω_c，周期 T）

$$
\left|\frac{dk}{dt}\right| = \frac{eH}{c\hbar^2}\sqrt{\left(\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial k_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial k_y}\right)^2}
$$

$$
T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \oint_C dt = \oint_C \frac{dk}{(dk/dt)} = \frac{c\hbar^2}{eH}\oint_C \frac{dk}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial k_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial k_y}\right)^2}} = \frac{c\hbar^2}{eH}\frac{\partial A(\varepsilon, k_z)}{\partial\varepsilon}
$$

$$
\omega_c = \frac{2\pi eH}{c\hbar^2} / \frac{\partial A(\varepsilon, k_z)}{\partial\varepsilon}
$$

ここで A はフェルミ面の断面積.

これは，Lorentz 力に釣り合って電子がサイクロトロン運動しているのであるから（$evH = m_c^* v\omega_c$），サイクロトロン振動数 ω_c は，

$\omega_c = \dfrac{eH}{m_c^* c}$,　（m_c^*：電子のサイクロトロン質量．自由電子モデルでは $m_c^* = m$）

従って，

$$m_c^* = \frac{\hbar^2}{2\pi}\frac{\partial A(\varepsilon, k_z)}{\partial \varepsilon} = \frac{\hbar^2}{2\pi} / \frac{\partial \varepsilon}{\partial A(\varepsilon, k_z)}$$

フェルミ面で分散関係がフラットなほど電子は重い！

有効質量テンソルの逆テンソル

$$\left(\frac{1}{m^*}\right)_{ij} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 \varepsilon(k)}{\partial k_i \partial k_j}$$

最も単純な場合，主軸方向の３成分が等しい．

$m^* = \dfrac{\hbar^2}{\partial^2 \varepsilon / \partial k^2}$，　（$\varepsilon = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ からも明か！）

☆磁場下で，金属中の電子のエネルギーレベルは＜Landau 準位＞（一次元調和振動子と同じ形）に分裂する．

$$\varepsilon(n, k_z) = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}$$

磁化 M，磁化率 χ は，$\begin{cases} M = -\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial H} \\ \chi = -\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial H^2} \end{cases}$，　だから Landau 準位をよぎるごとに振動する．

（de Haas-van Alphen 効果）