

# 連続体力学

早川尚男

京都大学大学院人間・環境学研究科  
606-8501 京都市左京区吉田二本松町  
Tel: 075-753-6782, Fax: 075-753-2999,  
e-mail: hisao@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

平成17年8月6日

# 目次

<b>第1章</b>	<b>連続体力学の目指すもの</b>	<b>4</b>
1.1	連続体とは何か	4
1.2	連続体の適用範囲	5
1.3	連続体の力学的分類	6
1.4	ラグランジュ的記述とオイラー的記述	7
<b>第2章</b>	<b>連続の式</b>	<b>9</b>
2.1	質量の保存	9
2.2	運動量の保存	12
2.2.1	体積力	12
2.2.2	面積力	13
2.2.3	運動方程式	13
2.3	エネルギーの連続の式	14
<b>第3章</b>	<b>ストレステンソル</b>	<b>17</b>
3.1	ストレステンソルの導入	17
3.2	テンソルの対称性について	19
3.3	歪みテンソルと歪み速度テンソル	21
3.3.1	歪みテンソル	22
3.3.2	歪み速度テンソル	24
3.4	フック弾性体とニュートン流体のストレステンソル	25
3.4.1	フック弾性体のストレステンソル	25
3.4.2	ニュートン流体のストレステンソル	27
3.5	応力仕事率	28
3.5.1	応力仕事率の一般論	28
3.5.2	フック弾性体の応力仕事率	29
3.5.3	ニュートン流体の応力仕事率	30
3.6	物質定数	31
3.6.1	Young 率	31
3.6.2	Poisson 比	32
3.6.3	粘性率	33

<b>第 4 章</b>	<b>等方線形弾性体のつりあいとヘルツの接触理論</b>	<b>34</b>
4.1	釣り合いの式	34
4.2	平面境界の弾性媒質の釣り合い	35
4.2.1	一般解	35
4.2.2	境界条件の設定	36
4.2.3	集中力に対する特解	38
4.3	固体接触	40
<b>第 5 章</b>	<b>弾性波</b>	<b>45</b>
5.1	等方媒質内の弾性波	45
5.2	表面波	47
5.3	1次元非線形格子とソリトン	50
5.4	KdV 方程式の解法	52
5.4.1	広田の方法	52
5.4.2	1ソリトン解	55
5.4.3	2ソリトン解	55
<b>第 6 章</b>	<b>流体方程式と完全流体</b>	<b>57</b>
6.1	流体方程式	57
6.1.1	状態方程式	57
6.1.2	境界条件	58
6.2	流線, 流管, 渦線	60
6.2.1	流線	60
6.2.2	流管	60
6.2.3	渦線と渦管, 循環	60
6.3	完全流体の一般論	61
6.3.1	基礎方程式	61
6.3.2	ベルヌーイの定理	62
6.4	渦の諸定理	64
6.4.1	ケルビンの循環定理	64
6.4.2	ヘルムホルツの渦定理	65
6.4.3	ラグランジュの渦定理	65
6.5	音波	65
<b>第 7 章</b>	<b>渦の動力学</b>	<b>67</b>
7.1	流体の渦とビオ・サバールの法則	67
7.1.1	渦の従う方程式	67
7.2	2次元渦糸系	70
7.2.1	2次元流と流れ関数	70
7.2.2	2次元流と複素関数論	71
7.2.3	渦糸群の正準方程式	71

7.3	渦糸群の運動 . . . . .	73
7.3.1	2個の渦糸の運動 . . . . .	73
7.3.2	単純渦列とその安定性 . . . . .	75
7.3.3	カルマン渦列 . . . . .	77

# 第1章 連続体力学の目指すもの

## 1.1 連続体とは何か

連続体力学は19世紀にその枠組が完成し、20世紀の科学・技術の基礎として揺るぎない信頼性を高めて来た。一方で、その完成度故に学問的な進展の見込みがないものとして学徒に敬遠され、またその実利性が故に工学等の応用科学の一分野と見なされて来た。同時に20世紀に入ってから2大革命である量子論と相対論のどちらにも与みしなかったために、古色蒼然とした印象を与えて来た。しかしソリトンに始まる可積分系の発展やカオスに始まる非線形動力学、または散逸構造等に見られるパターンの自己組織化等はいずれも1世紀も前の流体力学の研究にその萌芽を見る事ができ、現代こそ連続体力学の再考が求められている時代と言えるかもしれない。

このことは一方で日常スケールで生じている現象に対して20世紀に発達した物理学は余りにも無力であり、もう一方でそういった現象では多数個の粒子を含んでいて概ね構成要素の個性を問わないで済むという経験的事実と合致している。更に言えば連続体力学は無制限自由度の系を記述法を提供しており場の量子論は連続体力学の一つと考えても構わない。少なくともスカラー場の場の理論では理論形式は古典的な連続体とそれほど大きな違いはない。実際、場の量子論の導入のために流体や弾性体といった古典的な場を紹介する本もある。<sup>1</sup> 無論伝統的な連続体である流体の運動は古典的な流体力学で記述できるし、古典的な弾性体も連続体で記述できる。破壊現象はもとより弾性論の中で論じられる場合が殆んどである。一方、高分子等では粘弾性が関心の対象となるためにやはり連続体に基礎を置いている。更にプリゴジン (Prigogine) 以降注目されてきた散逸構造は流体中のパターンを議論しており、連続体が基礎となっている。星の集団や銀河団、プラズマ、或は粉体等もそのマクロな挙動を観測する限りにおいては連続体と考えていいであろう。筆者にとって最も印象深いのは2次相転移や超伝導におけるギンツブルク・ランダウ (Ginzburg-Landau) 理論の成功である。特に2次相転移の研究においてはウィルソン (K. G. Wilson) が従来主流であったミクロな局所モデルを採用せず疑似自由エネルギーとその局所的な結合に基づいた連続体モデルを採用し臨界現象の本質を明らかにした事である。最もミクロな構造が場の量子論によって記述され、臨界現象や流体、弾性体等の非常にマクロなスケールで連続体力学を用いるというこの事実がカリキュラム上での扱いと無関係に連続体力学が有効であることを示唆している。

その一方で最近ではマクロな系の記述からセミマクロな系へ関心が移り、従来看過されてきた構成要素の離散性をまともに扱わないといけない場合が増えて来た。星の場合も連続体的な取り扱いに比べ長距離多体的相互作用をする質点系といった側面が強く押し出され

<sup>1</sup> 高橋康「古典場から量子場への道」(講談社サイエンティフィック,1979)

る様になった. また流体に浮かぶコロイド粒子やサスペンションもやはり流体を媒介として長距離相互作用をする粒子系であって, それらの振舞は余りよく理解されているとは言い難い. これらの例はしかしながら離散的な系というより場という連続量を媒介とした連続体の域を出ないものと捉えるべきである. あるいは粉体のように構成要素の離散性を全面に出し, 尚且場の媒介を考慮しない場合は連続体の対極にあると考える向きがあるかもしれない. しかしそうした考えは幾つかの点で根本的誤謬を含んでいる. まず第一に粉体を内部構造のある粒子と考えた際にその内部構造を決める基礎となるのは弾性体力学である. 次にマクロな粉体集団の挙動の大部分はこの本で例として示していくように特異な連続体として特徴づけられる. 更に離散性が避けがたい場合にもその連続体的記述の限界を見定めて比較対象として無矛盾な体系を整備しておかなければならない.

簡単な例として朝のラッシュで生じる人の列の力学を挙げる事ができるだろう. 人は第1近似で粉体系として扱って良い. ラッシュの列は後ろの人によって押されることによってまっすぐな列を維持できなくなることはお馴染みであろう. この問題を連続体として扱う事は可能でそれは弾性論の問題となり, どれだけの力が加わるとどのような列の変形が生じるかが定性的に分かる. この両者の記述法の定量的比較は従来試みられていないが, それほど難しい問題ではなく連続体力学の範囲内にあると言って良い.

また高校で習う粒子の非弾性衝突も重要でまだ機構が解明されていない弾性論の問題である. 同時にこの問題は粉体力学の基礎を与える. おそらくは読者の大多数は非弾性衝突と云えばはねかえり(反発)係数を導入した散逸力学系であるという認識しかないであろう. しかしながら高速での衝突で生じる内部の化学反応, 破壊等を含んだ諸々の塑性変形を除いた理想的な弾性体に於いても反発係数は殆んど意味を持たない. つまりそれは衝突速度の関数であって決してある一定値に漸近しない様な量なのである. そのあたりの事情の説明も連続体力学の範囲内にあると云ってよい.

本書では古典的な連続体力学を構成する際に上記の様な問題を頭の片隅に置きつつスタンダードな連続体力学の内容を紹介している. 目的と実際に扱った内容に乖離があるためにやや中途半端な内容になっている可能性があるが, 読者諸賢の批判を待ちたい.

## 1.2 連続体の適用範囲

連続体力学は通常, 場の理論として定式化されている. 場の理論では次節で述べる様に観測点を「空間」に固定してその平均量を扱う. 勿論この「空間」というのは並進している弾性体球等を考えている場合にはその重心座標を原点とすべき種類のものであって絶対座標系の存在を仮定するものではない. その意味で常に(本書ではガリレオの)相対性原理の影響下にある.

連続体力学では通常, 粒子スケール等の物質の微視的尺度よりも大きな尺度で平均することで局所的な情報を得る. 例えば気体であれば平均自由行程と運動の空間的変化の尺度の比で表されるクヌーセン数は充分小さくならないし, 平均自由行程自体も粒子の直径より大きい事が期待される. この種の条件は気体であれば問題はなく成立し, その結果, ミクロなモデルから流体の方程式の導出が可能になる.

しかし一般の液体についてはその連続体モデルの成立条件が殆んど明らかになっていな

い。実際の処、最近の分子動力学法によるシミュレーションによれば思ったよりはるかに小さなスケールから流体的挙動が成り立っている様である。こうしたシステムでどこからどのようにして流体力学が成立していくのかを調べる事は今後重要になっていくことと思われる。

弾性体であれば高分子なり固体なりの基盤になる物質が通常存在する。固体の場合の線形弾性体は線形ばねで空間の格子点を接続したものと同等であり、その平衡点を分子間ポテンシャルの平衡点と考えるとほぼ分子スケールから弾性論を使って良い。勿論数学的には格子間距離をゼロに漸近させた極限を連続体として扱うのであるが、その極限自体は容易に格子系から類推できるのでその間には大きなギャップはない。まして線形弾性論に固執しなければ分子間の共有結合等が健在であればと固体の古典的表現は弾性体に他ならない。弾性体で用いられる概念や手法がほぼそのままの形で固体物理に応用されるのはこのように偶然ではない。こうした事はフォノンの古典模型が1次元的に結合した2種類の粒子の連成振動子であることから想像がつく。本書では連成振動子系等のように離散性が残っているものの連続極限がほぼ明らかなものを広義の連続体として扱う。こういう考え方を一つ取るだけで世界観はぐっと広がるし、弾性論等の適用範囲も広いものになる。

従来よりも連続体の適用範囲が広いであろうことは電磁気学を思い起こせば充分であろう。実際、 $\mathbf{r}_i$  に分布する点電荷系 ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) を扱う場合も電荷密度  $\rho_e$  はディラックのデルタ関数を使えば

$$\rho_e(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.1)$$

で導入可能である。電磁気学は連続体の理論であるから、従来のような狭い考え方で連続体を捉える必要はない。

では何が電磁気学は点電荷系迄取り扱い可能として、通常の流体や弾性体ではかなり強い制限をつけているのであろうか。それは微分の存在である。デルタ関数等のような特異点を持つものを形式的に場の連続変数として扱ってもその微分は出来ない。電磁気学では幸いな事に電荷密度の微分は理論形式に含まれていない。従って連続体としての記述が(量子論の存在を気にしない限り)、微小領域迄外挿できるのである。一方、流体や弾性体といった古典的連続体では質量の保存則から質量密度の微分が必要になることが分かる。これは電流とは違って質量流は密度に比例するからである。この辺りから強い制限が生まれる要因になる。しかし後で述べる様に体積力の概念を使えば必ずしもその制限にかからない場合が多く、広義の連続体の概念はかなり広い領域で有効であると思われる。<sup>2</sup>

### 1.3 連続体の力学的分類

連続体力学で専ら扱うのは弾性体と流体であるが、その定義がなされていない上に粘弾性を示す高分子等では両者の境界は曖昧である。ここでは応力-歪みの関係から連続体の力学的分類を行ってみる。

<sup>2</sup> 勿論デルタ関数等を含む超関数の微分等を使えばこうした困難を克服することが可能であるが、それに伴う数学的道具建て等を考えれば定性的にここに書いてある事情が成り立つ。

弾性体 応力と歪みが 1:1 に対応し、応力を除くと歪みもなくなる。応力が歪みに比例するものをフック (Hooke) 弾性体と呼ぶ。一般に静力学は境界値問題を解くことで解が求まる。

塑性体 応力がある臨界値 (降伏応力) を越えた場合に、歪みが残り、構造は何らかの意味で欠陥や破壊を含んだものになる。こうした連続体は塑性体と呼ぶ。塑性体では静力学でも破砕が波の様に伝わるために境界値問題に帰着せず波動方程式と同様の方程式で扱われる。

剛体 如何なる応力にも歪みを生じない。

流体 静止状態では接線応力 (shear stress) がなく、法線応力 (normal stress) のみが働く。運動によって一般に接線応力が働き、それが粘性となる。応力が歪み速度に比例する場合をニュートン (Newton) 流体と呼ぶ。

以上の分類は理想的な連続体に対するものであり、実在の物質は弾性体、塑性体、流体の性質を併せ持つ。例えば高分子溶液等は粘弾性流体と呼ぶに相応しい性質を持つし、破壊しながら流動する粉体は塑性流体と呼ぶべきかもしれない。従って現実の物質をどの連続体に分類するかという作業はそれほど簡単ではない。

## 1.4 ラグランジュ的記述とオイラー的記述

古典力学では粒子の運動の時間発展を追尾する理論形態を取る。多粒子系であっても本質的な変化はなく粒子の運動方程式を連立させて解くだけのことである。連続体がそうした粒子から構成されるという立場に立つならば、その一つの記述法に構成要素の時間発展を追いかける方法があると考えるのが自然である。これをラグランジュ的記述と呼ぶ。この場合、連続体の要素を実際の構成粒子と同定する必要はなく、形状は一般に時間と共に変化する。ラグランジュ的記述によれば時刻  $t$  の連続体粒子の位置は初期位置  $\mathbf{X}$  及び時刻  $t$  を独立変数として

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{X}, t) \quad (1.2)$$

となる。但しここでは粒子軌道が連続的であり、逆にたどることが出来るものとする。また同じ粒子の速度  $\mathbf{v}$  は

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(\mathbf{X}, t) \quad (1.3)$$

であり、加速度も同様にして与えられる。このように質点系の力学をそのまま連続体に持ち込んだ恰好になっている。

もう一つの記述法は電磁気学のように連続体を場の量として扱う方法である。この場合は位置座標は観測点として固定されており、もはや時間変数とは独立になる。従って例えば速度  $\mathbf{v}$  は位置  $\mathbf{r}$ 、時刻  $t$  の関数として  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) (= \mathbf{V}(\mathbf{X}, t))$  として表される。これをオイラー的記述と呼ぶ。言うまでもないことだがラグランジュ的記述における微分とオイラー的記述による微分は一致しない。ラグランジュ的な記述での時間微分 (ラグランジュ微分) を全微分  $d/dt$  で書く本も多いが、それは誤解を招くのでここでは  $D/Dt$  で表す。



両者の間の関係は以下の様に考えると分かりやすいであろう。ある関数

$$F(\mathbf{X}, t) = f(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t), t) = f(\mathbf{r}, t) \quad (1.4)$$

があったとして全微分を考えると

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t), t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.5)$$

という関係になる。但し  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  で  $\mathbf{r}$  の  $i$  成分を  $x_i$  と記した。上式を

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{X}, t) = \frac{D}{Dt}f(\mathbf{r}, t) \quad (1.6)$$

と記すのがラグランジュ微分の定義と考えれば良い。これを物質微分とも呼ぶ。(1.4) 及び (1.5) 式から関数  $f(\mathbf{r}, t)$  に対して演算  $D/Dt$  を施すと

$$\frac{D}{Dt}f(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t), t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right) f(\mathbf{r}, t) \quad (1.7)$$

が成り立つ。直交座標系であれば  $f$  をベクトル変数に置き換えてもこの関係が成立することは分かるので、一般に演算子の関係式

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \quad (1.8)$$

が成立する。

気をつける必要があるのは関係式 (1.8) を用いると極座標のような曲線座標系では一般に方位ベクトルが座標の関数であるために速度場などのベクトル各成分では (1.7) 式が成立していないことである。これらについては読者諸賢が自ら例題を解いてそのことを体感する他はない。

問題 1 スカラー  $\phi(\mathbf{r})$ , ベクトル  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  が存在したとき

- (1) 3次元極座標を考え  $\mathbf{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi) = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\phi \mathbf{e}_\phi$  としたときに  $\text{grad}\phi$ ,  $\nabla^2\phi$  を求めよ。但し  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$  はそれぞれ極座標の単位ベクトル。
- (2) 同様の座標系で  $\text{div}\mathbf{A}, \text{rot}\mathbf{A}, \nabla^2\mathbf{A}$  を求めよ。
- (3) 円筒座標で (1),(2) と同様の計算をせよ。

問題 2 3次元極座標において

$$D\mathbf{v}/Dt, \quad Dv_r/Dt, \quad Dv_\theta/Dt, \quad Dv_\phi/Dt$$

をそれぞれ計算せよ。

## 第2章 連続の式

物理学は保存則を基礎として構成している。連続体でも保存則が最も主要な役割を果たす。ソリトンの様に無限の保存則を持つ場合もない訳ではないが、現実の殆どどの系では保存する量は少数であり、いずれも物理的に重要な量となっている。それらの少数の保存量の中でも際立って重要なのは質量、運動量及びエネルギーの保存である<sup>1</sup>。このうち質量の保存は物質の不生不滅を表現しており、運動量の保存は運動方程式に対応する。注意が必要なのはエネルギーの保存である。連続体は巨視的な変数のみを論じているのでそこで捉え切れない自由度が残る場合が殆んどである。例えば弾性体の運動を考えても並進等の巨視的な自由度に分配されるエネルギーの他に格子振動等の内部の運動自由度に分配される。これらの内部の自由度にエネルギーが分配されたら殆んど再び巨視的な自由度に利用できる見込みはなく、「熱」としてエネルギーは散逸される。マクロな現象ではこのような散逸は大抵の場合に存在するのでエネルギーは保存しない散逸系を論じる必要が生じるのである。

本書では連続の式として最初に質量の保存を説明し、次いで運動量の保存を論じる。運動量の保存では面積力と体積力の概念が必要になるのでその違いを説明する。

### 2.1 質量の保存

保存則のうちで最も基本的なものは質量の保存である。質量が突如生成したり消滅したりしない事はラボアジエの発見以来物理学のみならず科学全体の基本概念となっている。勿論、相対論ではエネルギーと質量の等価性を考慮しないとならないが、その等価性を組み込めば質量は保存している。もとより、相対論はこの教科書の範囲外なので読者は直観的な質量概念をそのまま用いて保存則を論じれば良い。

オイラー的な記述による質量の保存では空間的に動かない仮想的な閉曲面を考えてその収支を考える事で表現される。従って、質量の保存則は連続体を自由に通す閉曲面内の質量の増加、減少は面を通して流入、流出した質量に等しい、と表現できる。この単純な事実を数学的に表現しよう。考えている閉曲面を  $S(t)$ 、その面で囲まれた領域を  $V(S(t), t)$  とし、その中に含まれる質量  $m$  は出入りがないとすると

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (2.1)$$

となる。従って質量密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$  は

$$\frac{d}{dt} \int_{V(S)} \rho(\mathbf{r}, t) dV = 0 \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup> 本書では非相対論的な連続体を扱うのでエネルギーと質量は等価という扱いはしない上に運動量と質量(エネルギー)で4元ベクトルを構成して一括して論じる事はない。

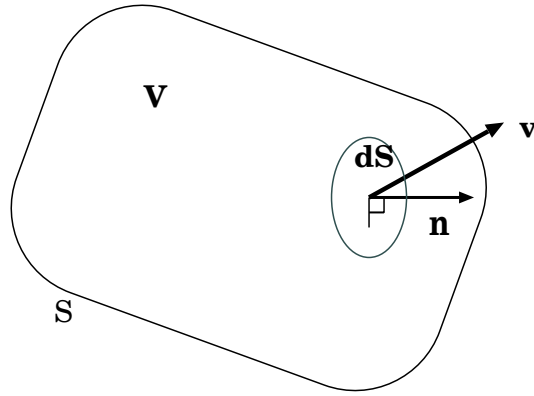


図 2.1: 表面  $S$  に囲まれた領域と法線ベクトル  $\mathbf{n}$  及び流速  $\mathbf{v}$

を充たす. この式から電磁気学の場合にも電荷の保存則としてお馴染みの質量密度  $\rho(\mathbf{r}, t)$  と質量流束密度  $\mathbf{j}$  に対する質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0 \quad (2.3)$$

となる. 初学者にありがちな疑問は  $\rho(\mathbf{r}, t)$  の時間微分が偏微分となっている事であろう.

(2.3) 式の導出をここでやや詳しく紹介する. ここで (2.2) 式で時間に対して全微分を使っていて (2.3) 式では偏微分になっており対応は分かりにくい.

本論では閉曲面を時間と共に動かさず空間に固定して考えた. ここで領域が

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.4)$$

を充たすように時間と共に変化するとしよう. ここで領域  $V$  は時間と共に変化し得るので  $V(t)$  と記した. その際

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{r}, t) dV = \int_{V(t)} dV \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} f + f \text{div} \mathbf{v} \right\} \quad (2.5)$$

という関係式が一般に成り立つ. (2.5) が成立すれば  $\rho = f$  として (2.4) 式を用いると (2.3) 式が導かれる.

その証明のためにヤコビアン  $J$

$$J_a \equiv J_a(\mathbf{X}, t) = \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \quad (2.6)$$

を導入して

$$\mathbf{r} : V(0) \rightarrow V(t), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{X}, t)$$

という運動を考える. また積分する量を明確に記すために  $dV = d^3 \mathbf{r}$  等と記す. (1.4) 式とヤコビアンの定義より

$$\int_{V(t)} d^3 \mathbf{r} f(\mathbf{r}, t) = \int_{V(0)} d^3 \mathbf{X} F(\mathbf{X}, t) |J_a(\mathbf{X}, t)|$$

が成り立つので

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}, t) = \int_{V(0)} d^3\mathbf{X} \left\{ \frac{d}{dt} F(\mathbf{X}, t) |J_a(\mathbf{X}, t)| + F(\mathbf{X}, t) \frac{d}{dt} |J_a(\mathbf{X}, t)| \right\} \quad (2.7)$$

となる. (2.7) の右辺第1項は (1.6) 式によって

$$\begin{aligned} \int_{V(0)} d^3\mathbf{X} |J_a(\mathbf{X}, t)| \frac{d}{dt} F(\mathbf{X}, t) &= \int_{V(0)} d^3\mathbf{X} |J_a(\mathbf{X}, t)| \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} f \right\} \\ &= \int_{V(t)} d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} f \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

と書ける.

また以下の様に

$$\frac{dJ_a}{dt} = J_a \text{div} \mathbf{v} \quad (2.9)$$

が証明でき,  $d|J_a|/dt = dJ_a/dt = |J_a| \text{div} \mathbf{v}$  ( $J_a > 0$  の場合),  $d|J_a|/dt = -dJ_a/dt = -J_a \text{div} \mathbf{v} = |J_a| \text{div} \mathbf{v}$  ( $J_a < 0$  の場合) であるので (2.5) 式が成り立つ. 実際、左辺は

$$\begin{aligned} \frac{dJ_a}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(x_1, \dots, \dot{x}_i, \dots, x_n)}{\partial(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(x_1, \dots, \dot{x}_i, \dots, x_n)}{\partial(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \cdot J_a = \text{div} \mathbf{v} \cdot J_a \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる. ここで2行目から3行目は3次元のときの

$$\frac{\partial(\dot{x}, y, z)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.11)$$

等を思い起こせば容易に分かる.

(2.5) 式で  $f = \rho$  とおけば直ちに (2.3) 式になり, 質量流束密度  $\mathbf{j}$  は

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (2.12)$$

となる. (2.12) 式を (2.3) 式に代入すると質量保存則は最終的に

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.13)$$

となる. またラグランジュ微分を用いて (2.13) 式は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.14)$$

と書き直す事も出来る. この表式もよく用いられる.

ここで任意のスカラー関数  $f$  と質量密度  $\rho$  の間で成り立つ有用な公式

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, t) = \int_{V(t)} dV \rho(\mathbf{r}, t) \frac{Df(\mathbf{r}, t)}{Dt} \quad (2.15)$$

を証明しておく. この式の左辺に (2.5) 式を代入して整理すると

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, t) = \int_{V(t)} dV \left[ f \left\{ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right\} + \rho \frac{Df}{Dt} \right] \quad (2.16)$$

となる. ここで (2.14) 式を用いると (2.16) 式の右辺第 1 項は 0 になるので (2.15) 式が成り立つ (証明終).

最後に質量の保存について幾つかの注意をしておこう. まず電磁気学との比較である. (2.12) 式の質量流束密度は運動量密度である. 一方, 電磁気学では電場  $\mathbf{E}$ , 磁場  $\mathbf{H}$ , 光速  $c$  に対して運動量密度は  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/c$  であって,  $\mathbf{j}$  には一致しない. これは電磁場の運動量とエネルギーの連続の方程式が電荷密度と電流に対して立てられていない事に由来する. 次に (2.12) 式は一成分系にのみ成り立っており, 多成分系の場合は必ずしも正しくない事である. 例えば多成分系であれば拡散流束がある場合がある. 最後に (2.13) 式の構造に注意して欲しい. 左辺第 1 項はスカラー変数であり, 左辺第 2 項はベクトルの発散を取っている. 従ってベクトルの保存則にはテンソルの発散が現われるであろうことは容易に想像がつくであろう.

## 2.2 運動量の保存

前節と同様に空間に固定した任意の閉曲面  $S$  に対して運動量の保存を考えてみよう. 体積要素  $dV$  に含まれる運動量は  $\rho \mathbf{v} dV$  であるから,  $S$  で囲まれた領域  $V(S)$  に含まれる全運動量は

$$\mathbf{P} = \int_{V(S)} \rho \mathbf{v} dV \quad (2.17)$$

与えられる. この時間変化はニュートンの運動方程式より

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{tot} \quad (2.18)$$

となる. ここで  $\mathbf{F}_{tot}$  は領域  $V(S)$  に含まれる連続体が受ける力である. 既に述べた通りこの力は物質の体積に比例した体積力と接触面を通して働く力である面積力に分類される.

### 2.2.1 体積力

物理現象に現われる重力, 電磁気力等の長距離力は, その大きさが物質の体積または質量に比例しているために, これらを体積力と呼ぶ. 体積力が連続体に働く場合, 体積要素  $dV$  に働く力は

$$\rho \mathbf{K} dV \quad (2.19)$$

ここで  $\mathbf{K}$  は連続体の単位質量当りに働く力を表す. 従って体積  $V(S)$  に働く力を  $\mathbf{F}_B$  とすると

$$\mathbf{F}_B = \int_{V(S)} \rho \mathbf{K} dV \quad (2.20)$$

である.

ここで重力が働いている場合は  $\mathbf{K}$  は重力加速度  $\mathbf{g}$ , 速度  $\mathbf{v}$  で運動する電磁気力であれば電場  $\mathbf{E}$ , 磁束密度  $\mathbf{B}$  に対して  $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  となる<sup>2</sup>. 質点系では体積力は基本的に外力に相当するが、長距離力であれば内力も体積力と成り得る.

## 2.2.2 面積力

連続体には体積力の他に接触面を通して働く力がある. この種の力は何もない空間を運動する粒子系には現われず, 連続体力学の特色となっている.

面を通しての相互作用は直観的に分かる通りに、極端な長距離相互作用を除くと面積力となっている. 面積力では微小面を考えて, 更に各成分が存在し得る. 例えば  $xy$  平面に平行な微小面積要素  $dxdy$  に対して働く力は

$$\mathbf{F} = dxdy \{ \sigma_{zx} \mathbf{e}_x + \sigma_{zy} \mathbf{e}_y + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z \} \quad (2.21)$$

と書けるであろう. ここで  $\mathbf{e}_i$  ( $i = x, y, z$ ) は  $i$  方向の単位ベクトルである. ここで  $\sigma_{ij}$  はストレステンソルであり, まとめて  $\sigma$  と書く. ストレステンソル  $\sigma_{ij}$  の最初の添字  $i$  は考えている面の法線ベクトルの成分を表し, 2 番目の添字  $j$  は力の成分を表す. 一般の座標軸と斜交する面の場合は各座標軸と平行な稜を持つ 4 面体を考えれば必ず (2.21) 式の様に座標軸と面が直交する様にする事ができる.

(2.21) 式は  $\mathbf{F} = dxdy \sigma \cdot \mathbf{e}_z$  と書ける. ここでは  $\mathbf{e}_z$  が面法線ベクトルであることを思い出すと微小面積要素  $dS$  に対して面法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると,  $d\mathbf{F} = \sigma \cdot \mathbf{n} dS$  と書き表すことができる. 従って一般の閉曲面  $S$  に対して

$$\mathbf{F}_S = \int_S dS \sigma \cdot \mathbf{n} = \int_{V(S)} dV \operatorname{div} \sigma \quad (2.22)$$

となる. ここでガウスの定理を用いた.

## 2.2.3 運動方程式

体積力と面積力を合わせた合力  $\mathbf{F}_{tot}$  は (2.20), (2.22) 式より

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_{V(S)} dV [\rho \mathbf{K} + \operatorname{div} \sigma] \quad (2.23)$$

となる. (2.17) 及び (2.18) 式に  $f \rightarrow \mathbf{v}$  として (2.15) 式を代入すると直ちに

$$\int_V dV \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \int_V dV [\rho \mathbf{K} + \operatorname{div} \sigma] \quad (2.24)$$

<sup>2</sup> ここでの表式は SI 単位系に基づいている

となる。積分領域は任意に取れるので運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K} \quad (2.25)$$

と書く事が出来る。上式を成分表示したら

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + K_i \quad (2.26)$$

となる。<sup>3</sup>

運動方程式 (2.24) 或は (2.25) 式は質量保存の式 (2.13) 式と連続体の基礎方程式を構成する。しかし未知数  $\rho, \mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}$  を決定するには不十分な情報のみしか含まれておらず、そのためにストレステンソルを決定する構成方程式が必要となる。この辺りの事情とどのような構成方程式が可能であるかについては次章で詳しく述べる事にしよう。

- 例：真空中の電磁場

電磁気学は通常の連続体とは若干趣を異にしている。それは光子が質量0であることと電磁場の記述に電子の運動が絡んでいることと関係している。詳細は電磁気学の本を参考するとして電場  $\mathbf{E}$ , 磁束密度  $\mathbf{B}$  に対して電磁運動量  $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ( $\epsilon_0$ : 真空中の誘電率) の連続の式は

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = -\nabla \cdot T_{em} + \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.27)$$

である。ここでストレステンソル  $T_{em}$  は

$$(T_{em})_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\epsilon_0 E_k E_k + \frac{1}{\mu_0} B_k B_k) \quad (2.28)$$

である。但し  $\mu_0$  は真空中の透磁率。電磁力の長距離性を反映して体積力が存在するが、面積力も混在するので単純に通常の連続体力学の枠組に入らない。

## 2.3 エネルギーの連続の式

エネルギーの保存も質量や運動量と同様であるが、テンソルが現われない分、直観に訴えやすい。もっともエネルギーそのものが熱力学変数であるので熱力学と切り離せず、連続体で話が閉じなくなってしまう点に注意が必要であろう。熱力学と関連して連続体力学で扱う系では全エネルギーが一般に保存しない。このあたりの事情はマクロな系では様々な内部自由度に分配されるので巨視的変数としてのエネルギーは保存されないのである。保存されないエネルギーは一般に熱の形で散逸される。

もう一つの大きな仮定は局所平衡の仮定である。一般に連続体は平衡から大きく離れているがそのずれ自体は連続体の運動に付随して生じる。この教科書で議論するように殆ん

---

<sup>3</sup> 以降では特に断らない限り Einstein の規約に従い、2 回現われた添字について和を取る、即ち  $v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \sum_k v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$  を意味する。

どの場合は歪み速度(や歪み)が小さくそれらで展開した線形理論を議論する. その場合は圧力は定数部分に当たり歪み速度に由来した非平衡の影響は受けない.<sup>4</sup> また温度が一樣でない場合もそのずれを小さいとして展開する 경우가多く, そのような場合は熱平衡からのずれは高次補正を与えるのに過ぎない. 言うまでもなくこの論法は変形や歪み速度が大きいときには使えない. 高分子等では大変形があっても非常にゆっくりした運動しかないのでエネルギー方程式そのものが議論の対象から外れる場合が多い. しかし粉体の様にそうでない場合もあるので一般論は難しい.

いずれの場合でも運動量の連続の式等と比較して様々なレベルの話が入り混じって錯綜した議論になる場合がある. その点については十分注意してからエネルギーの連続の式を用いる必要がある.

力学的エネルギー密度は運動エネルギー密度  $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2$  と内部エネルギー  $\epsilon$  に分割出来る. 従って総量は

$$\int_V \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \epsilon \right) dV \quad (2.29)$$

となる. この時間変化を議論する訳になる. ここで体積力と面積力のなす仕事率は

$$\int_V \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS \quad (2.30)$$

である. 勿論第1項,2項がそれぞれ体積力,面積力に対応している.

マクロな連続体では全ての自由度の動きを把握することは出来ない. 例えば格子振動一つ取っても全部の運動の自由度をフォローすることは難しい. また一般の運動では格子振動以外にも様々な自由度が絡み合っており, そのモデル化は不十分であるおそれがある. また非晶質や流体では格子振動は存在せず, 流体そのものがずり粘性を示す点で固体における熱とかなり違うが, 連続体の一般論は適用物質に限定せずに普遍的に成立する. その際, 注目している少数の自由度以外は熱として散逸する. またその熱は一般に熱伝導と呼ばれ, 熱の流れが存在し, 熱流と呼ぶ. 最も良く知られている熱流の現象論はフーリエ (Fourier) の法則であり, 熱流  $\mathbf{q}$  は温度  $T$  の勾配

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad} T \quad (2.31)$$

で表される. ここで比例定数  $\kappa$  を熱伝導率と呼び, 一般に正の値を取る.

(2.31)式は電磁気学のジュール (Joule) の法則に対応する. 電場  $\mathbf{E} = -\text{grad} \Phi$  という風にポテンシャル  $\Phi$  で記述できるとすると, 電流密度  $\mathbf{j}_e$ , 電気伝導率  $\kappa_e$  の媒質に対するジュールの法則は  $\mathbf{j}_e = \kappa_e \mathbf{E} = -\kappa_e \text{grad} \Phi$  と書ける.

熱流は流れなので面を通して現われる. 従って熱流  $\mathbf{q}$  によるエネルギーの増加は

$$- \int_S dS \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \quad (2.32)$$

<sup>4</sup> 実際には有限濃度の粒子系ではロングタイムテールと呼ばれる遅い緩和があり, それに伴って長距離相関が存在するので局所平衡仮説は使えない可能性が高い. しかしそういう微妙な問題は現在研究の対象であり, ここで詳しく説明することは出来ないのだから以上深入りはしない.



である. ここで  $\mathbf{q}$  の符号は領域から出ていく方を正とした. (2.29) から (2.32) 迄を組み合わせて

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \epsilon \right) dV = \int_V \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS - \int_S dS \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \quad (2.33)$$

となる. 上式 (2.33) にガウスの定理と公式 (2.15) 式で  $f$  を  $|\mathbf{v}|^2/2 + \epsilon$  と置き換えたものを用いると

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} v_i v_i + \epsilon \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} v_i - q_i) + K_i v_i \quad (2.34)$$

となる.

一方 (2.26) 式から

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} v_i v_i \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} v_j + K_i v_i \quad (2.35)$$

が成立する. (2.34), (2.35) の辺々引くと

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (2.36)$$

となる. 尚, 連続体中に発熱がある場合は更に熱源の項を加えないといけないのは言うまでもない.

注意すべきはここまでの議論で熱流を (2.31) 式に取る必然もないし, またストレステンソルの決定は何も議論されていないことである. また弾性体とも流体とも連続体を限定していない点である.

- 電磁気学のエネルギーの連続の式:

真空中の電磁気学では電磁エネルギー密度  $w_{em}$  は  $w_{em} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E_k E_k + \frac{1}{\mu_0} B_k B_k)$  に対して

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (2.37)$$

である. ここで  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0$  はポインティングベクトル, 右辺第2項はジュール熱によるエネルギー散逸である. ジュール熱は電流が長距離相互作用を持つことを反映して体積力の形で現われる. ここでも電磁気学はかなり特異であることが分かる.

# 第3章 ストレステンソル

## 3.1 ストレステンソルの導入

既に述べた通り面力の記述にはストレステンソルが必要になる. このテンソルは直観に訴えるものではないがよく考えれば難しい概念を含んでいる訳ではない.

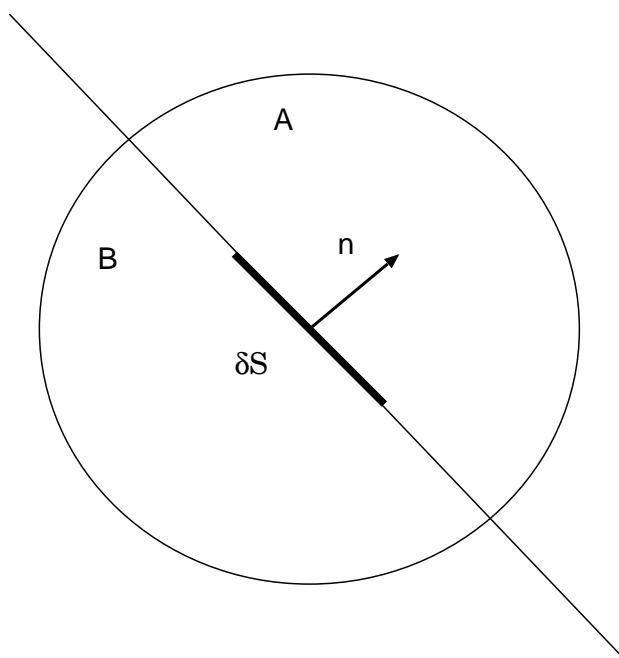


図 3.1: 連続体を仮想面で分割する際の概念図. 太線で示された面  $\delta S$  は図の奥行き方向に広がりを持つ微小面素

さて考えている連続体を A,B の 2 つに分割してみよう. 図の面  $\delta S$  中の単位面積に働く力を  $\mathbf{f}$ , 面法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  しよう. ここで

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}) // \mathbf{n} \tag{3.1}$$

を法線応力,

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}) \perp \mathbf{n} \tag{3.2}$$

を接線応力と呼ぶ. 一般に面を指定した場合には法線応力と接線応力の混合になるのでテンソルの記述が必要になる.

さて応力が内力の場合には作用・反作用の法則から

$$\mathbf{f}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{f}(\mathbf{n}) \tag{3.3}$$

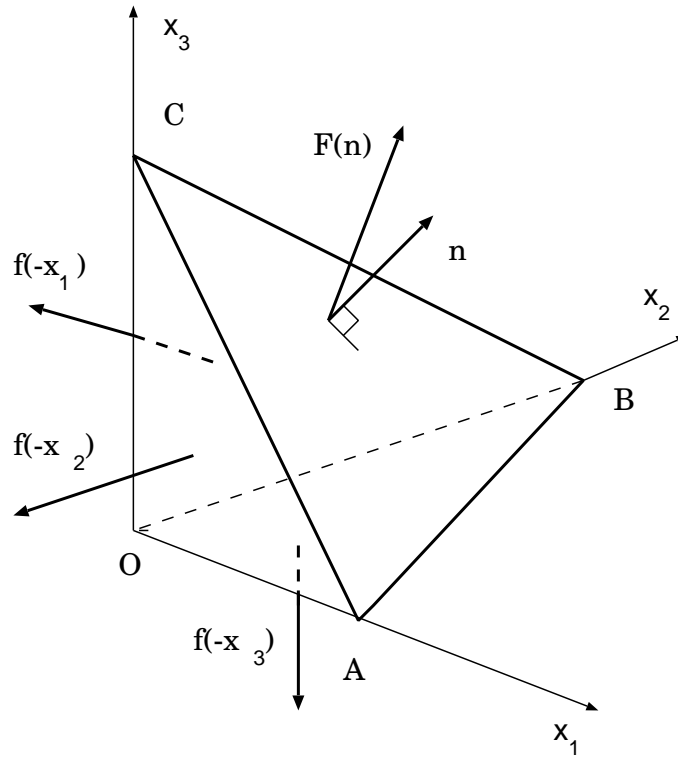


図 3.2: 4 面体 OABC に働く力

が成り立つ. 図の 4 面体 OABC についての力の釣り合いを考えてみよう. 面 ABC, OBC, OAC, OAB の面積をそれぞれ  $\delta S, \delta S_1, \delta S_2, \delta S_3$  として各面に働く力を  $\mathbf{f}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  としよう. 体積力を  $\mathbf{K}$ , 密度を  $\rho$ , 4 面体の加速度を  $\mathbf{a}$  すれば、運動方程式は

$$\rho \delta V \mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{n}) \delta S + \mathbf{f}(-x_1) \delta S_1 + \mathbf{f}(-x_2) \delta S_2 + \mathbf{f}(-x_3) \delta S_3 + \rho \delta V \mathbf{K} \quad (3.4)$$

である. ここで 4 面体を相似的に辺長を 0 にする極限を取ってみる. すると

$$\delta V / \delta S_i \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{n}) &= -\mathbf{f}(-x_1) \frac{\delta S_1}{\delta S} - \mathbf{f}(-x_2) \frac{\delta S_2}{\delta S} - \mathbf{f}(-x_3) \frac{\delta S_3}{\delta S} \\ &= \mathbf{f}(x_1) \frac{\delta S_1}{\delta S} + \mathbf{f}(x_2) \frac{\delta S_2}{\delta S} + \mathbf{f}(x_3) \frac{\delta S_3}{\delta S} \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる. ここで方向余弦  $n_i$  を導入すると

$$\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i \quad (3.7)$$

であるので

$$\frac{\delta S_i}{\delta S} = n_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.8)$$

と書ける. ここで  $\mathbf{e}_i$  は  $i$  成分の単位ベクトルである. 実際,  $\triangle OAB$  は  $\triangle CAB$  の  $x_1x_2$  面への射影であり  $\delta S_3 = \delta S(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3)$  である. 同様に  $\triangle CAO$ ,  $\triangle COB$  はそれぞれ  $\triangle CAB$  の  $x_1x_3$  平面,  $x_2x_3$  平面への射影であるので (3.8) が成り立つ. (3.8) を (3.6) に代入することで

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}) = \mathbf{f}(x_1)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{f}(x_2)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{f}(x_3)(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{f}(x_i)n_i \quad (3.9)$$

を得る. 一方,  $\sigma_{ik}$  を  $i$  軸に垂直な単位面積を通して  $k$  方向に働く力とすると

$$\mathbf{f}(x_i) = \sigma_{ik}\mathbf{e}_k \quad (3.10)$$

となるので (3.9), (3.10) から  $\mathbf{f}(\mathbf{n})$  の  $k$  成分  $f_k$  に対して

$$f_k = \sigma_{ik}n_i \quad (3.11)$$

という式が成り立つ. このように考えることでストレステンソル  $\sigma_{ik}$  が自然に導入できる.

### 3.2 テンソルの対称性について

特別な外力がない場合にストレステンソルは対称テンソルであるという著しい性質を持つ. これは基本的にトルクバランスを考える事で証明可能である.

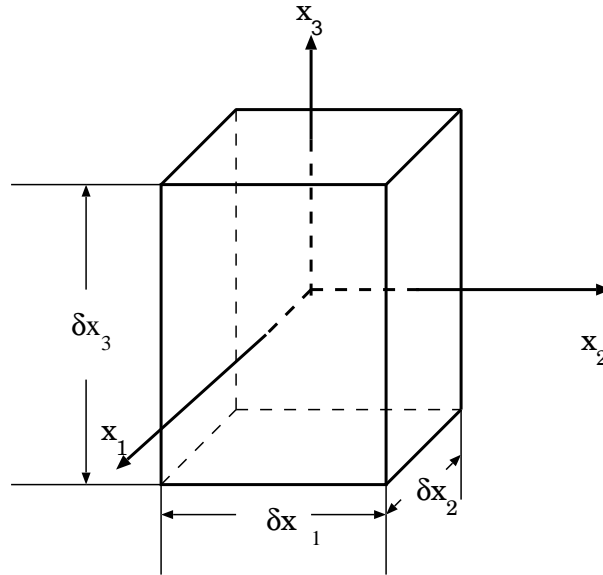


図 3.3: 直方体に働く力

図の様な連続体中の直方体を考える. 中心軸を  $x_3$  軸としてそのまわりの面積力によるモーメントは

$$M_3 = (\sigma_{12}\delta x_2\delta x_3)\delta x_1 - (\sigma_{21}\delta x_1\delta x_3)\delta x_2 = (\sigma_{12} - \sigma_{21})\delta x_1\delta x_2\delta x_3 \quad (3.12)$$

である。従って面積力によるモーメントは考えている微小体積に比例する。一方体積力によるモーメントは長さの4乗に比例するので

$$\delta V \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

という極限を取ると  $M_3$  以外の寄与は消える。一方で物体は回転せず静止しているためには  $M_3$  がバランスする必要がある

$$M_3 = 0 \quad (3.14)$$

が成立する。従って

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (3.15)$$

が成り立つ。回転軸を 1,2 軸にすれば同様に、一般の  $(i, j)$  の組に対して  $i \neq j$  であれば

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.16)$$

を示す事ができる。

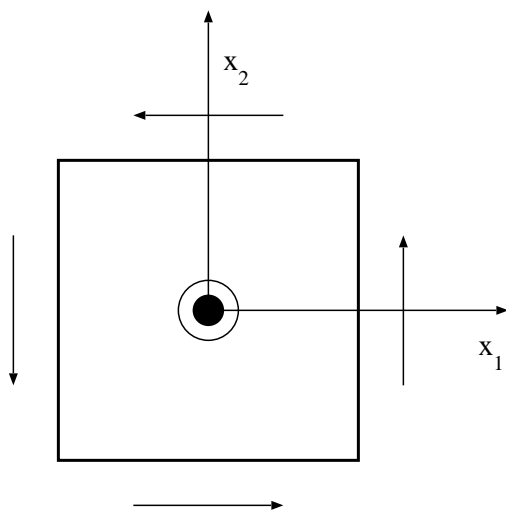


図 3.4:  $x_3$  軸まわりに働くトルク

ストレステンソルの対称性について以下の様な別証も可能である。まず既に2章で証明したように

$$\frac{D}{Dt} \int dV \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \int dV \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \int dV \rho \left( \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) \quad (3.17)$$

と書ける。体積力が存在しない状況ではこの式とバランスするのは面積力のつくるトルクなので

$$\int dS \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_i = \int dS \epsilon_{lij} x_i \sigma_{kj} n_k \quad (3.18)$$

である。但し最後の式では成分表示を用いた。ここで  $\epsilon_{ijk}$  は Levi-Civita 記号と呼ばれ

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k \text{ が偶置換}) \\ -1 & (i,j,k \text{ が奇置換}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (3.19)$$

である。この Levi-Civita 記号を使うと外積が

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

と表現できることは容易に確かめられる。

ガウスの定理を用いて表面積分を体積積分に直し、 $\partial_k x_i = \delta_{ik}$  に注意すると

$$\int dS \epsilon_{ijl} x_i \sigma_{kj} n_k = \int dV \epsilon_{ijl} \left\{ x_i \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} + \sigma_{ij} \right\} \quad (3.20)$$

となる。よって

$$\int dV [\mathbf{r} \times \left( \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right)] = \int dV \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \quad (3.21)$$

が成り立ち  $\sigma_i^{(a)} \equiv \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$  となる。 $\boldsymbol{\sigma}^{(a)}$  はストレステンソルの反対称部分から構成したベクトルなので (3.21) 式はストレステンソルの反対称部分が残らない事を意味する。

このテンソルの対称性は磁性流体等では破れている。例えば磁化  $\mathbf{M}$  が

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = \rho M_1 \quad (3.22)$$

のようにトルクとバランスし得る。従って非対称部分は

$$\sigma_{ij}^{(a)} = \frac{\rho}{2} \begin{pmatrix} 0 & M_3 & -M_2 \\ -M_3 & 0 & M_1 \\ M_2 & -M_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

となって有限に残る。この様な連続体をマイクロポーラー連続体と呼び、その一般論が存在する。

結局、ストレステンソルによって力  $\mathbf{F}$  と方向余弦  $n_i$  の間には

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

という関係式が成り立つ。

### 3.3 歪みテンソルと歪み速度テンソル

この節では弾性体及び流体のストレステンソルに現れる歪みテンソル及び歪み速度テンソルを紹介してみる。

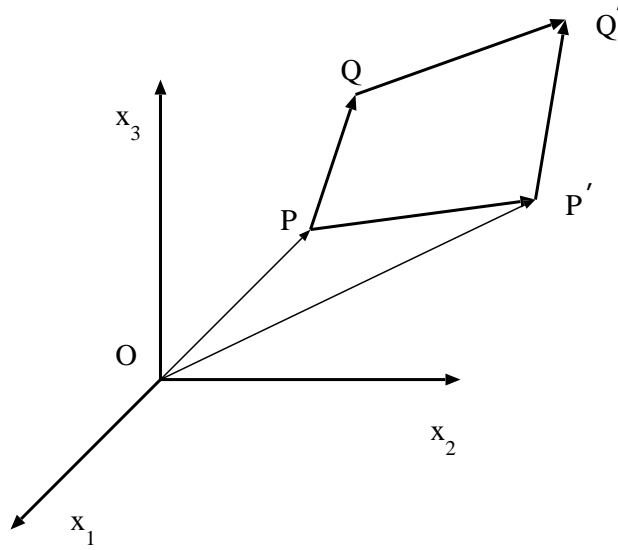


図 3.5: 連続体の微小変形  $P \rightarrow P'$ ,  $Q \rightarrow Q'$

### 3.3.1 歪みテンソル

図 3.3.1 の様に  $\delta \mathbf{x} = \overrightarrow{PQ}$  として点  $P$  を  $P'$  に移してみる.

$$x_i(P) \rightarrow x'_i(P') \quad (3.25)$$

このとき

$$x_i + \delta x_i \rightarrow x'_i + \delta x'_i \quad (3.26)$$

という変換を受ける. 当然  $\delta \mathbf{x}' = \overrightarrow{P'Q'}$  である. この操作は連続体の変形を意味する.

ここで変位  $\mathbf{u} = \overrightarrow{PP'}$  の  $i$  成分を

$$u_i = x'_i - x_i \quad (3.27)$$

で導入してみよう. 変形後の位置は元の位置の関数なので

$$x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3) \quad (3.28)$$

と書けるだろう. 従って微小変形の場合は

$$\delta u_i = \delta x'_i - \delta x_i \simeq \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_n} \delta x_j \delta x_n + \dots \quad (3.29)$$

と展開可能である. 線形近似の範囲内で

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \delta x_j \quad (3.30)$$

と書く事が可能である. これを

$$\delta u_i = (u_{ji} + \Omega_{ji}) \delta x_j \quad (3.31)$$

と書き直してみよう. 第1項, 第2項は(3.30)の第1項, 第2項に対応しており, それぞれ対称, 反対称(交代)テンソル ( $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$  を充たす) になっている.

ここで  $\Omega_{ji}$  の意味を明かにするために回転(rotation)と比較してみよう.

$$\Omega \equiv \frac{1}{2} \text{rot} u \quad (3.32)$$

とすると, 明かに

$$\Omega_k = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \quad (3.33)$$

が成り立つので

$$\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk} \Omega_k \quad (3.34)$$

という関係があることが分かる.<sup>1</sup>

ここで対称テンソル

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.35)$$

の物理的意味について説明しよう. 対称テンソルは対角化可能なので主軸と主歪みが決まる. このとき対角和(trace)  $u_{ii}$  が最も重要であるが, それは体積歪みを表している. 実際, 微小体積要素  $\delta V$  が  $\delta V'$  に変形されたとする. このとき

$$\delta V' = \delta x'_1 \delta x'_2 \delta x'_3 = (1 + u_{11})(1 + u_{22})(1 + u_{33}) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \simeq (1 + u_{ii}) \delta V \quad (3.36)$$

が成り立つ.

実際, 体積の増加は3つの軸に沿っての独立な変形の積と考えられる. 1軸変形を考えると  $\delta u_1 = (\partial u_1 / \partial x_1) \delta x_1 = u_{11} \delta x_1$  でそれ以外の変形は0である. このとき  $\delta x'_1 = (1 + u_{11}) \delta x_1$ . 同様に2,3軸変形を考えると(3.36)となる.

よって

$$u_{ii} = \frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} \quad (3.37)$$

である.

このように対角和は体積歪みを表すのでそれを分けて考える事が可能である. 実際歪みテンソルを

$$u_{ij} = \left( u_{ij} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ij} \quad (3.38)$$

という恒等式で書き直す事がしばしば行われる. 言うまでもなく右辺第1項は等積歪みを表し, 第2項は静水歪みを表す.

問1 (1)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jk}$$

を示せ.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 外微分形式に詳しい人には  $\Omega_{ij}$  と  $\Omega_k$  の間には duality があることが分かるであろう.

<sup>2</sup>  $i = j$  の場合は  $\epsilon_{iik} = 0$  ( $i$  について和を取らない) から左辺は0. このとき右辺 =  $\delta_{il} \delta_{im} - \delta_{im} \delta_{il} = 0$  ( $i$  について和を取らない) が成り立つ.  $i \neq j$  の場合, 例えば  $i = 1, j = 2$  とすると左辺 =  $\epsilon_{12k} \epsilon_{lmk} = \epsilon_{123} \epsilon_{lm3} = \epsilon_{lm3}$  となる. この値は  $l = 1, m = 2$  では1,  $l = 2, m = 1$  で-1, その他の場合は0である. 一方右辺は  $\delta_{1l} \delta_{2m} - \delta_{1m} \delta_{2l}$  であって  $l, m$  の値で同じ値となる.  $i, j$  が他の組み合わせのときも同様.



(2)

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$$

を示せ.<sup>3</sup>

(3)

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$$

を示せ.<sup>4</sup>

(4)

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_k$$

を示せ.<sup>5</sup>

### 3.3.2 歪み速度テンソル

流体運動では原子や分子の平衡位置からの変位に依存せず、局所的な速度変化  $\mathbf{b}$  の影響が運動方程式に現れる。従って前小節で議論した歪みテンソルの代わりに歪み速度テンソルが現れる。時刻  $t$  での  $x_j$  での速度を  $v_i$ 、近傍  $x_j + \delta x_j$  での速度を  $v_i + \delta v_i$  とすると

$$\begin{aligned}\delta v_i &\equiv v_i(x_j + \delta x_j) - v_i(x_j) \\ &= (v_{ji} + \omega_{ji})\delta x_j\end{aligned}\tag{3.39}$$

と展開できる。ここで  $v_{ij}$  は

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)\tag{3.40}$$

は歪み速度テンソルであり、 $\omega_{ij}$  は

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)\tag{3.41}$$

である。

歪みテンソルのときと同様に対称部分  $v_{ij}$  の対角要素は  $x_i$  軸に平行な微小線素の伸縮率の変化率であり対角和は体積の時間変化率になる。また非対角要素  $2v_{ij}$  ( $i \neq j$ ) は  $x_i$  軸と  $x_j$  軸に平行な微小線素間の角度の変化率である。 $\omega_{ij}$  は渦度 (vorticity) と次の様な関係がある。渦度を  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{v}$  とすると歪みテンソルの場合と同様に

$$\omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}, \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k\tag{3.42}$$

という関係式を充たす。

<sup>3</sup> (1) で  $j, m$  について縮約すれば  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl} = (3-1)\delta_{il} = 2\delta_{il}$ .

<sup>4</sup> (3) で  $i, l$  について縮約すると  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6$ .

<sup>5</sup> 右辺 =  $\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_l u_m = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_l u_m = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i) = \Omega_{ij}$  となる。

### 3.4 フック弾性体とニュートン流体のストレステンソル

本節では典型的な弾性体と流体として歪みテンソル及び歪み速度テンソルの線形で記述できるフック (Hooke) 弾性体及びニュートン (Newton) 流体を紹介し, そのストレステンソルの形を示す.

#### 3.4.1 フック弾性体のストレステンソル

フック弾性体とは変形が小さくストレスが歪みテンソルの線形で記述できるものを指す. このとき

$$\sigma_{ij} \simeq \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} \right)_0 u_{kl} = C_{ijkl} u_{kl} \quad (3.43)$$

と書ける. ここで添字 0 は変形がないときの微分値を用いる事を表している. 無論 (3.43) は歪みがないときにストレスがかからない, 即ち  $\sigma_{ij} = 0$  であることを用いている.

ここで等方弾性体とするとストレステンソルと歪みテンソルの対称性  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,  $u_{kl} = u_{lk}$  が成り立つ. 後述の様に (3.70) 式で導入される変形の自由エネルギーは  $\delta F = C_{ijkl} u_{ij} u_{kl} / 2$  という形をしており  $u_{ij}$ ,  $u_{kl}$  の入れ換えに対する対称性がある. これは直観的には自明であって自由エネルギーがそのどちらかに入れ換えに反対称な部分があったら変形順序によるポテンシャルになり, そもそも保存力場のポテンシャルとして不適である. 詳しい証明は後で触れるとしてとりあえずそれを認めると

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3.44)$$

が成り立つ. 従って本来  $3^4 = 81$  自由度のある系が 21 自由度まで簡略化できる.<sup>6</sup>

ここで等方テンソルを用いると更に簡略化できる. 4 階の対称等方テンソルは一般に

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.45)$$

と書ける事が知られている (問参照). 従ってストレステンソルは

$$\sigma_{ij} = \{ \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \} u_{kl} = \lambda u_{kk} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij} \quad (3.46)$$

となる. 後述の様に自由エネルギーの安定性から  $\lambda$ ,  $\mu$  は正でなくてはならないということが分かる.  $\lambda$ ,  $\mu$  はラメ (Láme) の弾性定数と呼ばれる.

4 階の等方テンソルが (3.45) 式で現されることについての証明は間に譲る様に数学的かつやや面倒な議論が必要であるが, その意味することは明白である. 等方弾性体の変形を考えると圧縮または膨張という体積変化に伴うものと接線応力による変形 (一般に等積変化) の 2 種類しか考え付かない. 数学的証明

<sup>6</sup> 最初の 2 つの条件式では  $(i, j)$ ,  $(k, l)$  について対称になっている. 例えば  $(i, j)$  の取り得る指標の組み合わせは重複も含めて  $3 \times 2 = 6$  通りである. 2 つの指標の組は独立なので  $6 \times 6 = 36$  の独立な成分がある. 3 つめの対称性で  $(i, j)$ ,  $(k, l)$  が取る指標の組み合わせのうち同時に入れ替わったものは同じであるから 21 通りになる. (サイコロ 2 つの独立な組み合わせを考えればよい).

はこの物理的直観が正しいことを示しただけであり, その事を自明と思う読者は証明を思い患う必要はない. 数学的に不備を感じる読者は問を考えてみて欲しい.

ストレステンソルが分かったために運動方程式は

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda u_{kk} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}) + \rho K_i \quad (3.47)$$

と書ける. ここで  $K_i$  は体積力である. ベクトル形式で方程式 (3.47) を書き直せば

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{K} \quad (3.48)$$

となる. ここで

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.49)$$

はラプラシアン (Laplacian) である. 運動方程式 (3.48) で注意すべきは左辺の時間発展は速度場  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  に対するものであるのに右辺は変形場  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  に対するものである. 線形弾性体の場合には定義に従って各原子・分子は元の平衡点近傍に留まる. 従ってラグランジュ微分とオイラー微分の違いは殆んどの場合問題にならず  $D\mathbf{v}/Dt \simeq \partial\mathbf{v}/\partial t = \partial^2\mathbf{u}/\partial t^2$  が成り立つ. そのため殆んどの弾性論の文献では

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{K} \quad (3.50)$$

を運動方程式として採用している.

問 (1) 4 階の等方テンソル  $C_{ijkl}$  が

$$\epsilon_{hia} C_{ajkl} + \epsilon_{hja} C_{iakl} + \epsilon_{hka} C_{ijal} + \epsilon_{hla} C_{ijka} = 0$$

を充たすことを示せ.<sup>7</sup>

(2) 2 階の等方テンソルは

$$v_{ij} = \frac{1}{3} v_{kk} \delta_{ij}$$

と書けることを示せ.<sup>8</sup>

<sup>7</sup> 4 階テンソルは直交基底の変換が  $\mathbf{e}'_i = a_{ia} \mathbf{e}_a$  であるとき変換則  $C'_{ijkl} = a_{ia} a_{jb} a_{kc} a_{ld} C_{abcd}$  を充たす. 任意の直交基底に関する成分も直交基底変換によって値が変わらないテンソルを等方テンソルと呼ぶ. 従って直交基底変換の行列  $A(t) = (a_{ij}(t))$  とすると直交行列の性質  ${}^T A A = I$  により任意の  $t$  に対し  $a_{ij}(t) a_{ik}(t) = \delta_{jk}$  であり  $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$  である. この式を  $t$  で微分して  $t=0$  と置くと  $(da_{ij}/dt)_{t=0} = \omega_{ij}$  に対して  $\omega_{kj} + \omega_{jk} = 0$  を充たす.

また等方テンソルは  $t$  に独立なので  $C'_{ijkl} = C_{ijkl}$  であり  $t$  で微分すれば 0 である. よって 4 階テンソルの変換則の式を  $t$  について微分して  $t=0$  とおくと  $\omega_{ia} C_{ajkl} + \omega_{ja} C_{iakl} + \omega_{ka} C_{ijal} + \omega_{la} C_{ijka} = 0$  となる. ここで  $\omega_{jk}$  は反対称テンソルなので  $\omega_i = \epsilon_{ijk} \omega_{jk}/2$  および  $\omega_{jk} = \epsilon_{ijk} \omega_i$  とおける. よって  $\omega_h (\epsilon_{hia} C_{ajkl} + \epsilon_{hja} C_{iakl} + \epsilon_{hka} C_{ijal} + \epsilon_{hla} C_{ijka}) = 0$  を充たす. この式は任意の  $\omega_h$  で成立するので与式が成り立つ.

<sup>8</sup> 2 階のテンソルで (1) に相当する式は  $\epsilon_{hia} v_{aj} + \epsilon_{hja} v_{ia} = 0$  である.  $\epsilon_{hkl}$  をかけて  $h$  について縮約すれば  $(\delta_{ki} \delta_{la} - \delta_{ka} \delta_{li}) v_{aj} + (\delta_{kj} \delta_{la} - \delta_{ka} \delta_{lj}) v_{ia} = 0$  すなわち  $\delta_{ki} v_{ij} - \delta_{li} v_{kj} + \delta_{kj} v_{il} - \delta_{lj} v_{ik} = 0$  となる. ここで  $k=j$  として縮約すると  $2v_{il} + v_{li} = v_{jj} \delta_{il}$  である. またこの式で  $i, l$  を入れ換えた式  $2v_{li} + v_{il} = v_{jj} \delta_{il}$  である. 2 つの式から  $v_{il}$  について解けば与式を得る.

(3) 3階の等方テンソルは

$$w_{ijk} = \alpha \epsilon_{ijk}$$

と書けることを示せ.<sup>9</sup>

(4) 4階の等方テンソルが2つの指標の入れ換えに対して対称ならば (3.45) 式のように表せることを示せ.

(5) 反対称(交代)性をもつ4階のテンソルの場合には

$$S_{ijkl} = \gamma(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})$$

と書けることを示せ.

### 3.4.2 ニュートン流体のストレステンソル

線形の粘性流体であるニュートン流体でも同様にストレステンソルを決めることが可能である. 流体では変形がないときにもストレスを感じる. 流体を入れた容器の底でその圧力を感じることもこのことの正しさは分かる. しかしながら静止状態では接線応力は働かない. もし接線応力が働いたとすれば流体は流れておらず固まった状態にあると言える. 静止状態で接線応力が働かないことを流体の定義としてもよい. 逆に言えば流体に接線応力が働いたとすると静止状態に留まり得ない. この場合は流体に変形が生じ, 接線応力がない状態になって改めて静止する.

変形が小さいときにストレステンソルが展開できるのは弾性体と同様である. 注意すべきは弾性体では変形歪みテンソルを用いて平衡状態から展開したが, 流体では歪み速度テンソル (3.40) の関数として展開されることである. 従って

$$\sigma_{ij} \simeq (\sigma_{ij})_0 + \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial v_{kl}} \right)_0 v_{kl} = \tilde{C}_{ij} + \tilde{C}_{ijkl} v_{kl} \quad (3.51)$$

と展開可能である. ここで  $\tilde{C}_{ij}$ ,  $\tilde{C}_{ijkl}$  はそれぞれ2, 4階のテンソルである. 流体の一樣等方性を仮定すると前節の議論及び前節の間から

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda_0 v_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_0 v_{ij} \quad (3.52)$$

となる. ここで  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$  はそれぞれ第2粘性率, (ずり)粘性率と呼ばれ, 添字0は流体と弾性体を区別するために付けた. 一方, 第1項は変形のないときに働く法線応力であり  $p$  は静水圧に他ならない.

<sup>9</sup> 3階テンソルで (1) に相当する式は  $\epsilon_{hia}w_{ajk} + \epsilon_{hja}w_{iak} + \epsilon_{hka}w_{ija} = 0$  となる.  $\epsilon_{hlm}$  をかけて  $h$  について縮約すれば  $\delta_{li}w_{jk} - \delta_{mi}w_{ljk} + \delta_{lj}w_{imk} - \delta_{mj}w_{ilk} + \delta_{lk}w_{ijm} - \delta_{mk}w_{ijl} = 0$  となり  $k = l$  とおくと  $2w_{ijm} + w_{mji} + w_{imj} = \delta_{mi}w_{ljl} + \delta_{mj}w_{ill}$  となり, さらに  $i = j$  とおくと  $w_{ill} = 0$  を得る. 同様に  $w_{iil} = w_{ljl} = w_{llk} = 0$  となる. これらを先の式に代入すると  $2w_{ijm} + w_{imj} + w_{mji} = 0$  を得る. 指標を循環的に入れ換えるた2つの式と足し合わせることで  $w_{ijm} + w_{mij} + w_{jmi} + w_{imj} + w_{mji} + w_{jim} = 0$  を充たす. また先の式で  $j, m$  および  $i, m$  を入れ換えた2つの式とこの式とを辺々引くと  $w_{imj} + w_{mji} + w_{ij} = w_{jim}$  が成り立つ. この式と  $i, j$  を入れ換えた式を循環的に指標を入れ換えて得た式に代入すると  $w_{ijm} + w_{jim} = 0$  となる. よって  $w_{ijm}$  は最初の2つの指標について反対称である. 同様に他の指標についても反対称なので  $w_{ijk} \propto \epsilon_{ijk}$  となる.

(3.52) 式のトレースを取ってみると

$$\sigma_{ii} = 3(-p + \chi_0 v_{kk}) : \quad \chi_0 = \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu_0 \quad (3.53)$$

となる。この式から明らかな様に  $\chi_0$  は流体の体積変化に対する抵抗を表す係数で体積粘性率と呼ばれる。  $\chi_0$  を用いると (3.52) 式は

$$\sigma_{ij} = (-p + \chi_0 v_{kk})\delta_{ij} + 2\mu_0 \left( v_{ij} - \frac{1}{3}v_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (3.54)$$

と書ける。ストレステンソルのトレースを括り出したこの形の方が (3.52) よりも使われる機会が多い。

粘性流体の法線応力は一般に方向に依存している。実際法線応力は

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = (-p + (\chi_0 - \frac{2}{3}\mu_0)v_{kk}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\mu_0 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{22} \\ v_{33} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

で与えられ各法線応力は一致しないし、 $p$  とも等しくない。圧力の定義は任意性が残るが、本書では静水圧  $p$  と等しく取る。

ここで陽に運動方程式を書いておくのは無駄ではない。外力  $\mathbf{K} = 0$  として各種粘性率を定数としたとき

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \chi_0 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu_0 \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.56)$$

である。これをナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式と呼ぶ。音速より充分遅ければ  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  という非圧縮条件が成立するので (3.72) は簡単になって

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu_0 \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.57)$$

となる。但し  $\nu_0 = \mu_0/\rho$  である。(3.73) 式を狭義のナビエ・ストークス方程式と呼ぶ。

(註) (3.72) 式は4変数3方程式なのでそれだけでは閉じた偏微分方程式となっておらず、圧力  $p$  を別に決める必要がある。通常、(3.72) 式の発散をとって圧力関数  $P \equiv p/\rho$  に対するポアソン方程式

$$-\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla^2 P \quad (3.58)$$

を連立させる。

## 3.5 応力仕事率

### 3.5.1 応力仕事率の一般論

エネルギー方程式

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} v_{ij} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.59)$$

を考える。左辺は内部エネルギーの時間変化であり、右辺第一項は応力のする仕事、第二項は熱散逸を表す。

(3.59) 式の右辺第二項をもう少し詳しく見てみよう。(2.31) 式を (3.59) に代入すると

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \sigma_{ij} v_{ij} + \text{div} (\kappa \text{grad } T) \quad (3.60)$$

となる。 $S$  を単位質量当たりのエントロピーとして熱力学関係式  $d\epsilon = -pdV + Tds = -pd(1/\rho) + Tds$  を用いると

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \text{div} \mathbf{v} + T \frac{Ds}{Dt} \quad (3.61)$$

が成立する。但しここで (2.14) 式を用いた。従ってエントロピー変化の式

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \sigma'_{ij} v_{ij} + \text{div} (\kappa \text{grad } T) \quad (3.62)$$

が導かれる。但し  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$  である。

ここで (3.62) 式の第 2 項は考えている体積へ伝導される熱であることを示す。公式 (2.15) を思い出すと

$$\frac{d}{dt} \int_V dV \rho s = \int_V dV \rho \frac{Ds}{Dt} \quad (3.63)$$

が成り立つ。従って (3.62) を  $T$  で割って体積積分すると (3.62) 式の第 2 項は

$$\int_V dV \frac{1}{T} \text{div} (\kappa \text{grad } T) = \int_V dV \text{div} \left( \frac{\kappa \text{grad } T}{T} \right) + \int_V dV \kappa \frac{(\text{grad } T)^2}{T^2} \quad (3.64)$$

と変形できる。連続体の温度が無遠慮で十分早く一定値に近付くとすれば表面上で  $\text{grad } T = 0$  である。(3.64) 式の右辺第 1 項を表面積分に書き換えれば積分を 0 とすることが出来るのでこの寄与はない。

結局全エントロピー  $S$  の変化は  $S = \int dV \rho s$  より

$$\frac{d}{dt} \int_V dV \rho s = \int_V dV \kappa \frac{(\text{grad } T)^2}{T^2} + \int_V dV \sigma_{ij} v_{ij} \geq 0 \quad (3.65)$$

に従う。ここから明らかな様に第 1 項は熱伝導によるエントロピーの増加率である。第 2 項は弾性体等では独立に 0 となり得るのでエントロピーの増加を保証する必要条件は熱伝導度  $\kappa$  は正でなくてはならない。

### 3.5.2 フック弾性体の応力仕事率

この系の弾性歪みエネルギーを考えてみよう。弾性体の準静的な微小変形  $\delta u_i$  に対して応力  $\sigma_{ij} n_i$  がする単位体積あたりの仕事  $\delta W$  を計算してみる。但し準静的変形では常に  $\partial \sigma_{ij} / \partial x_i = 0$  が充たされている。この微小変形に伴う全仕事は

$$\begin{aligned} \int_V \delta W dV &= \int_S \sigma_{ij} n_i \delta u_j dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} \delta u_j) dV \\ &= \int_V dV \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta u_j \right\} = \int_V dV \sigma_{ij} \delta \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \int_V dV \sigma_{ij} \delta u_{ij} \quad (3.66) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで  $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0$  及び  $\sigma_{ij}\Omega_{ij} = 0$  を用いた. よって

$$\delta W = \sigma_{ij}\delta u_{ij} \quad (3.67)$$

及び

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial u_{ij}} = \frac{\partial \delta F}{\partial u_{ij}} \quad (3.68)$$

が成り立つ. 最後の  $\delta F$  は変形の (ヘルムホルツの) 自由エネルギー密度であり、準静的な最大仕事がヘルムホルツの自由エネルギーの差に等しいという熱力学の関係式を用いた.

(3.68) 式を用いると変形の自由エネルギー及び準静的な等温仕事は

$$W = \delta F = \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{ij} u_{kl} \quad (3.69)$$

と書ける. (3.44)-(3.46) 式を (3.69) 式に代入すると変形の自由エネルギー密度  $\delta F$  は

$$\delta F = \frac{\lambda}{2} u_{kk} u_{ll} + \mu (u_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} u_{kk})^2 + \frac{\chi}{2} u_{kk} u_{ll} \quad (3.70)$$

となる. 但し  $\chi = \lambda + 2\mu/3$  である. 熱力学的安定性から平衡位置はエネルギー極小の条件が課される. 従って前節に述べた様に  $\lambda, \chi$  は正でなくてはならないということが分かる.

ここで (熱流がないときの) 応力仕事率  $\sigma_{ij}v_{ij}$  を考えてみよう. (3.46) と  $v_{ij} = \partial u_{ij}/\partial t$  を使って

$$\sigma_{ij}v_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\lambda}{2} u_{kk} u_{ll} + \mu u_{ij} u_{ij} \right) = \frac{\partial \delta F}{\partial t} \quad (3.71)$$

という関係式が導かれるので仕事率という名称が適切であることが分かる. この様に (熱流等がなければ) 弾性体の場合は応力による仕事は内部エネルギーとして蓄えられるので全エネルギーは保存する.

### 3.5.3 ニュートン流体の応力仕事率

ニュートン流体の応力仕事率は

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}v_{ij} &= (-p\delta_{ij} + \lambda_0 v_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_0 v_{ij})v_{ij} \\ &= -pv_{kk} + \Phi \end{aligned} \quad (3.72)$$

と書ける. ここで  $\Phi$  は粘性散逸関数と呼ばれ, 単位時間、単位体積当たりの力学的エネルギーの熱への変換率である.  $\Phi$  の具体的表式は (3.72) 式から

$$\Phi = \lambda_0 v_{kk}^2 + 2\mu_0 v_{ij}v_{ij} = 2\mu_0 (v'_{ij})^2 + \chi_0 v_{kk}^2 \quad (3.73)$$

で与えられる. ここで  $v'_{ij} = v_{ij} - \frac{1}{3}v_{kk}\delta_{ij}$  は偏差速度勾配と呼ばれる量である. (3.62) 式に戻り断熱過程を考えると,  $\nabla T = 0$  及び熱力学第2法則から  $\Phi \geq 0$  が要求され, その結果粘性率  $\chi_0, \mu_0$  が正であることが必要になる. この様に同じ線形の構成方程式を用いても弾性体が保存系であったのに対して粘性流体は散逸系となる.

熱力学的な議論が出て来たのでエネルギー方程式 (2.36) 式に戻ってみよう. (3.72) を (2.36) 式に代入すると

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = -pv_{kk} + \Phi - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (3.74)$$

となる. (3.61) 式を (3.74) 式に代入するとエントロピーの変化式

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (3.75)$$

が成立する.  $\kappa$  を定数として (2.31) が成り立つ場合は

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi + \kappa \nabla^2 T \quad (3.76)$$

と書くことができる. これがエントロピー変化を記述する方程式となる.

## 3.6 物質定数

ストレステンソルには弾性定数或は粘性率が含まれる. ここでは弾性定数や粘性率の充たすべき性質を簡単に説明しよう.

### 3.6.1 Young 率

弾性論の議論で Lamé の弾性定数を導入したが, 実際には異なった弾性定数が用いられる事が多い. その理由は以下に述べる弾性定数が直接実験で測ることが可能であり, どのような物理的特性を反映したものであるのかがはっきりしているからである.

その準備のためにストレステンソル (3.46) の対角和を取ってみよう.

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)u_{ii} \Leftrightarrow u_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (3.77)$$

となる.

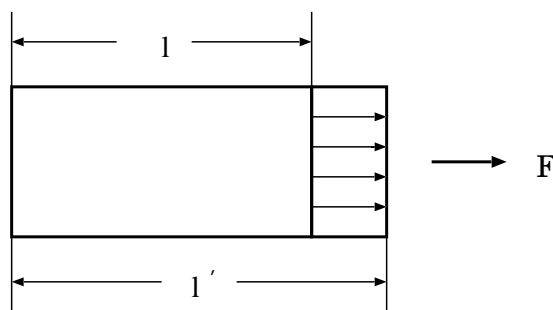


図 3.6: 連続体の 1 軸変形.



Young 率は 1 軸方向の力に対するどのような 1 軸変形が起こるかを示した定数であり、物体の幅を無視すればばね定数に対応している。今  $x_1$  軸方向に  $F = \sigma_{11}S$  を加えてみる。ここで  $S$  は断面積である。(3.77) から

$$u_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{11}, \quad u_{22} = u_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{11} \quad (3.78)$$

となる。ここで

$$u_{11} = \frac{1}{Y}\sigma_{11} : \quad Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (3.79)$$

と書いたときの  $Y$  が Young 率である。

Young 率の物理的な意味を明らかにするために断面積  $S$  の変化しない棒を 1 軸方向に  $\delta l$  だけ伸長することを考えてみよう。この場合、棒の端は力  $F = \sigma_{11}S$  の力がかかっており、 $u_{11}$  は伸びと元の長さの比になるので  $u_{11} = \delta l/l$  である。従って

$$Y = \frac{\sigma_{11}}{u_{11}} = \frac{F/S}{\delta l/l} \quad (3.80)$$

となり、ばね定数との対応関係もはっきりするであろう。この場合  $Y > 0$  であることは物質の安定性から要請される。

### 3.6.2 Poisson 比

一般に図の様に棒を引っ張ると横方向に縮む。その割合を表す弾性定数が Poisson 比である。この本では  $\sigma$  で表し、定義は

$$\sigma \equiv -\frac{u_{22}}{u_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{3\chi - 2\mu}{2(3\chi + \mu)} \quad (3.81)$$

で与えられる。明らかに Poisson 比は垂直方向の縮みと軸方向の伸びの比であり殆んどの場合に正の値を取る。また硬い物質程横の変形が小さく、0 に近い値を取り、軟らかい物質は大きな値を取りやすい。

或は体積弾性率

$$\chi = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (3.82)$$

を導入して (3.80)-(3.82) の弾性定数を  $Y, \sigma$  で表してみると

$$\lambda = \frac{\sigma Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{Y}{2(1 + \sigma)}, \quad \chi = \frac{Y}{3(1 - \sigma)} \quad (3.83)$$

となる。熱力学的な安定性より  $\mu, k, Y$  が正であり

$$-1 < \sigma < 1/2 \quad (3.84)$$

という制限がつく。何度も言うように実質的に  $\sigma > 0$  なので (3.84) は

$$0 \leq \sigma < 1/2 \quad (3.85)$$

に置き換えてもよい。

### 3.6.3 粘性率

粘性率の性質については既に述べたのでここでは繰り返さない。若干の補足説明をしておくのみに留めよう。

各種粘性率は簡単な分子構造を持つ気体において分子運動論に基づき系統的に計算することは可能である。それ以外の一般の流体においては直接計測する他はない。(ずり)粘性率は一般にレオノメーターと呼ばれる実験装置を用いて計測可能である。そこでは(殆んどは回転)ずりを加えて、その抵抗力から粘性率を測定する。体積粘性率は気体分子運動論を用いることで単原子分子気体の場合は0であることを理論的に示すことが可能である。一方多原子分子では一般に有限であり音波吸収から測定する。液体について体積粘性率は殆んど分かっていない。それは常態では液体は非圧縮( $\text{div } \mathbf{v} = 0$ )と考えられ体積粘性率が現れないためである。もしその影響を論じるのであれば音速に近い速い流れを議論する必要がある。そこでの体積粘性率の計測が必要になる。

# 第4章 等方線形弾性体のつりあいとヘルツの接触理論

## 4.1 釣り合いの式

本章では弾性体の静力学の例としてヘルツ (Hertz) の接触理論を紹介する. Hertz の接触理論は2つの弾性体の接触の際の基礎理論であり、発表後100年以上を経てもその価値は失われていない。ここではその概要をできるだけ初等的に説明する。

まず (2.26) 式の左辺を0とおいた力のバランスの式

$$\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0 \quad (4.1)$$

を考えてみる. ここで  $g_i$  は重力加速度を想定しているが任意の体積力と考えて良い. (3.46) 式からストレステンソルは歪テンソル  $u_{ij}$  を用いて

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{kk} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij} \quad (4.2)$$

と書けることを思い出そう. ここで  $\lambda, \mu$  はラメ (Láme) の弾性率でありヤング (Young) 率  $Y$ 、ポアソン (Poisson) 比  $\sigma$  を用いて

$$\lambda = \frac{\sigma Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{Y}{2(1 + \sigma)} \quad (4.3)$$

と書ける. (4.3) を (4.2) に代入すると

$$\sigma_{ij} = \frac{Y}{1 + \sigma} \left( u_{ij} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} u_{ll} \delta_{ij} \right) \quad (4.4)$$

となる.

(4.4) を (4.1) に代入すると

$$\frac{Y}{2(1 + \sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{Y}{2(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0 \quad (4.5)$$

となる. この式をベクトル形式で書くと

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{2(1 + \sigma)}{Y} \rho \mathbf{g} \quad (4.6)$$

となる. 或は恒等式  $\text{grad div } \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u}$  を用いて

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1 - 2\sigma}{2(1 + \sigma)} \text{rot rot } \mathbf{u} = -\frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{Y(1 - \sigma)} \rho \mathbf{g} \quad (4.7)$$

と書き直すことも可能である. (4.7) の発散を取ると重調和方程式

$$\Delta\Delta\mathbf{u} = 0 \quad (4.8)$$

が導かれる.

## 4.2 平面境界の弾性媒質の釣り合い

### 4.2.1 一般解

以下では重力等の体積力の影響は無視できるとする. すると (4.6) は

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) = 0 \quad (4.9)$$

となる. この解をヘルムホルツ (Helmoltz) 分解

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} + \nabla\varphi \quad (4.10)$$

の形で求めてみる. 但し  $\mathbf{f}$  は  $\Delta\mathbf{f} = 0$  を満たす. (4.10) を (4.9) に代入すると

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{f} + 2(1-\sigma)\Delta\varphi) = 0 \quad (4.11)$$

を得る. 必然的にこの式の括弧内は定数であるが  $\mathbf{f}, \varphi$  の任意性を考慮すると, その定数は 0 としても構わない. よって

$$2(1-\sigma)\Delta\varphi = -\nabla\cdot\mathbf{f} \quad (4.12)$$

が成り立つ.

今, 弾性媒質の表面が  $xy$  平面であるとしよう. 媒質は  $z > 0$  に広がっているとして

$$\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{\partial g_x}{\partial z}, \frac{\partial g_y}{\partial z}, f_z\right) \quad (4.13)$$

とおく. ここで  $\Delta\mathbf{f} = 0$  より

$$\Delta g_x = \Delta g_y = 0 \quad (4.14)$$

とすることが可能である.

(4.13) を (4.12) に代入してみる. 左辺は

$$2(1-\sigma)\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial g_x}{\partial z} + \frac{\partial g_y}{\partial z} + f_z \right) = -\frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.15)$$

となる. ここで  $h$  は (4.15) 式の第 2 式の括弧内によって定義される調和関数である. (4.12), (4.15) より

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{2(1-\sigma)}\partial_z h \quad (4.16)$$

を得る. 注意すべきはこの式は  $z = 0$  の平面に対してのみ成立する点である. また以下では簡単のために  $\partial_z = \partial/\partial z$  等という記号を用いる.

まず (4.16) の一般解は

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\sigma)}h + \psi \quad (4.17)$$

と書ける事を示してみよう. 但し

$$\Delta\psi = 0 \quad (4.18)$$

を充たすとする.  $\psi$  は (4.16) 式の斉次の一般解であるので, 非斉次の特解を求めれば十分である.

$$\tilde{\varphi} \equiv zh \quad (4.19)$$

に対して

$$\nabla\tilde{\varphi} = (z\partial_x h, z\partial_y h, h + z\partial_z h) \quad (4.20)$$

及び,  $z = 0$  に於いて

$$\Delta\tilde{\varphi} = z\Delta h + 2\partial_z h = 2\partial_z h \quad (4.21)$$

を充たすので

$$\varphi = -\frac{\tilde{\varphi}}{4(1-\sigma)} \quad (4.22)$$

は

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{2(1-\sigma)}\partial_z h \quad (4.23)$$

を充たす特解となっている. 従って (4.16) の一般解は

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\sigma)}\left(f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + \psi \quad (4.24)$$

で与えられる.

## 4.2.2 境界条件の設定

一般解を求めただけでは役に立たない. ここで境界条件の設定を試みる. 外法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を  $z$  軸負方向に設定してみよう. すると接触面で

$$\sigma_{zi} = -P_i \quad (4.25)$$

が成り立つ. ここで  $\mathbf{P}$  は物体表面の単位面積上に働く外力である.

以下では簡単のために  $z$  成分についてのみ論じる. (4.10) より

$$u_z = f_z + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (4.26)$$

及び (4.10) 式が成立する. 一方 (4.24) から

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\sigma)}(f_z + \hat{G}) + \psi \quad (4.27)$$

が成り立つ。但し

$$\hat{G} = \partial_x g_x + \partial_y g_y \quad (4.28)$$

とする。

(4.4) 式の  $zz$  成分を考えて (4.25) を考慮すると

$$\sigma_{zz} = \frac{Y}{1+\sigma} (u_{zz} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}) = -P_z \quad (4.29)$$

となる。ここで

$$u_{ll} = \nabla \cdot \mathbf{f} + \Delta\varphi = -(1-2\sigma)\Delta\varphi = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial z} (f_z + \hat{G}) \quad (4.30)$$

に注意しよう。ここで (4.12), (4.15) を用いた。(4.26) 及び (4.29) 式から  $z=0$  において

$$\begin{aligned} -\frac{1+\sigma}{Y} P_z &= \partial_z f_z + \partial_z^2 \varphi + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \\ &= \partial_z f_z + \partial_z^2 \varphi + \frac{\sigma}{2(1-\sigma)} \partial_z (\hat{G} + f_z) \\ &= \partial_z f_z + \partial_z^2 \psi - \frac{1}{4(1-\sigma)} \partial_z^2 [z(f_z + \hat{G})] + \frac{\sigma}{2(1-\sigma)} \partial_z (f_z + \hat{G}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

が成り立つ。途中の変形で (4.24), (4.30) 式を用いている。また

$$\partial_z^2 [z(f_z + \hat{G})] = z \partial_z^2 (f_z + \hat{G}) + 2 \partial_z (f_z + \hat{G}) \quad (4.32)$$

が成り立つことから  $z \rightarrow 0$  で

$$-\frac{1+\sigma}{Y} P_z|_{z=0} = \frac{1}{2} \partial_z f_z - \frac{1}{2} \partial_z \hat{G} + \partial_z^2 \psi|_{z=0} \quad (4.33)$$

となる。(4.28) 式の  $\hat{G}$  を代入することで

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (f_z - (\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z}) \right\} |_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{Y} P_z|_{z=0} \quad (4.34)$$

が  $z$  成分の境界条件を与えることになる。

全く同様の計算を  $x, y$  成分について行うと ( $i = x$  あるいは  $y$  として)

$$\partial_z^2 g_i|_{z=0} + \partial_i \left\{ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)} (\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} |_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{Y} P_i \quad (4.35)$$

が成り立ち、それぞれが  $x, y$  成分の境界条件を与える。ここで  $\partial_i$  は  $x_i$  に対する偏微分である。

### 4.2.3 集中力に対する特解

更に簡単化するために自由表面上に集中力が働く場合を考えてみよう. さらにその力も  $z$  成分しか持たないとする. この力は

$$\mathbf{P} = F\mathbf{e}_z\delta(x)\delta(y) \quad (4.36)$$

に従って分布する面力である. 但し  $\hat{z}$  は  $z$  方向の単位ベクトルである.

一般に  $\mathbf{P}' = \mathbf{F}\delta(x)\delta(y)$  の解が分かれば Green tensor を用いて任意の解が構成できるのはスカラーの場合と同様である.

調和関数  $f(x, y, z)$  に対して遠方で 0,  $z = 0$  の平面上で  $\partial f/\partial z$  が与えられているとする. このとき  $f$  は

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int \int \frac{\partial_z f(x', y', z)|_{z=0}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' \quad (4.37)$$

で与えられることを示そう. 但し

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (4.38)$$

である.

**証明** 今グリーン (Green) 関数が

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.39)$$

を充たし,  $f$  が調和関数

$$\Delta f(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.40)$$

であるとする.  $\partial/\partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla$  としてグリーン関数の公式<sup>1</sup>

$$\int dV (G\Delta f - f\Delta G) = \int dS (G\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial G}{\partial n}) \quad (4.41)$$

を用いると

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' = \int dS (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial G}{\partial n}) \quad (4.42)$$

となる. 但し (4.42) の左辺と (4.40), (4.41) を比較して最終表式を得た. 一般に  $f$  の不定性 (斉次解) を利用して表面積分の自由度の片方のみを残るようにすることが可能である. ここでは  $f$  が表面上で与えられ  $z = 0$  上で

$$\partial_n G = 0 \quad (4.43)$$

を充たすとしよう.  $\mathbf{n}$  の方向は  $-z$  方向なので

$$f(x, y, z) = - \int \int dx' dy' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=0+} \quad (4.44)$$

<sup>1</sup> ガウスの定理より  $\int_S f\nabla^2 G \cdot dS = \int dV \nabla \cdot (f\nabla G) = \int dV (\nabla f \cdot \nabla G + f\nabla^2 G)$  が成り立つ. この式で  $f, G$  を入れ換えたものを辺々引けばグリーン関数の式を得る.

である. ここでは  $z < 0$  の半空間のみを考えるので

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.45)$$

である. よって (4.37) を得る. (証明終り)

(4.34) 式に戻ってみよう.  $f_z, g_x, g_y, \psi$  は調和関数であるから (4.34) の括弧内は調和関数であり、左辺はその法線微分を与える. よって

$$f_z - \partial_x g_x - \partial_y g_y + 2\partial_z \psi = \frac{1 + \sigma}{\pi Y} \int \int \frac{P_z(x', y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' = \frac{1 + \sigma}{\pi Y} \frac{F}{r} \quad (4.46)$$

が成り立つ. ここで  $r = |\mathbf{r}|$  であり, 導出に (4.36), (4.37) を用いた. 実際

$$Q \equiv f_z - \partial_x g_x - \partial_y g_y + 2\partial_z \psi \quad (4.47)$$

とすると (4.37) より

$$Q = -\frac{1}{2\pi} \int \int \partial_z Q|_{z=0} \frac{dx' dy'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1 + \sigma}{\pi Y} \int \int \frac{P_z(x', y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' \quad (4.48)$$

である. 但し最後の等式では (4.34) を用いている.

ここで (4.35) を利用してみる. 不定性を利用すると括弧内は 0 とでき

$$(1 - 2\sigma)f_z - (\partial_x g_x + \partial_y g_y) + 4(1 - \sigma)\partial_z \psi = 0 \quad (4.49)$$

を課することが可能になる.  $P_x = P_y = 0$  より (4.35) は

$$\partial_z^2 g_x|_{z=0} = 0, \quad \partial_z^2 g_y|_{z=0} = 0 \quad (4.50)$$

となる. 一方 (4.14) 式から  $\partial_z g_x, \partial_z g_y$  は調和関数なのでそれぞれ

$$\partial_z g_x = -\frac{1}{2\pi} \int \int \partial_z^2 g_x|_{z=0} \frac{dx' dy'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0 \quad (4.51)$$

及び

$$\partial_z g_y = 0 \quad (4.52)$$

が成り立つ. (4.37) と (4.51) を用いると

$$\partial_x g_x = -\frac{1}{2\pi} \int \int \partial_x \partial_z g_x|_{z=0} \frac{dx' dy'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0 \quad (4.53)$$

が成り立つ. 同様に  $\partial_y g_y = 0$  が成り立つので  $\hat{G} = \partial_x g_x + \partial_y g_y = 0$  が成立する. 従って (4.49) 式は

$$\partial_z \psi = -\frac{1 - 2\sigma}{4(1 - \sigma)} f_z \quad (4.54)$$



となる. (4.46)式に代入し  $1 - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} = \frac{1}{2(1-\sigma)}$  を用いると

$$f_z = \frac{2(1-\sigma)(1+\sigma)}{\pi Y r} F \quad (4.55)$$

及び

$$\partial_z \psi = -\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{2\pi Y r} F \quad (4.56)$$

を得る.

ここで一般解 (4.10),(4.17) に戻って  $\hat{G} = 0$  に注意すると

$$\begin{aligned} u_z &= f_z + \partial_z \left( -\frac{z}{4(1-\sigma)} f_z \right) + \partial_z \psi \\ &= \frac{1+\sigma}{2\pi Y} \frac{F}{r} \left\{ 4(1-\sigma) - 1 + \frac{z^2}{r^2} - (1-2\sigma) \right\} \\ &= \frac{1+\sigma}{2\pi Y} \frac{F}{r} \left\{ 2(1-\sigma) + \frac{z^2}{r^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

となる. ここでの導出に 1 行目に (4.26)-(4.28) 2,3 行目に (4.55),(4.56) 式を用いた.

### 4.3 固体接触

いよいよ 2 個の固体 (弾性体) の接触を考える. 今共有接触面を  $x, y$  面に取り、 $z, z'$  軸をそれぞれ物質の内部に向かう方向に設定する. 平面上の接触点近傍で物質表面は

$$z = \kappa_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (4.58)$$

と展開できる. ここで  $\kappa_{\alpha\beta}$  は 2 次元対称テンソルであり物体表面の曲率を特徴づける. 同様にもう一つの物体についても

$$z' = \kappa'_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (4.59)$$

が成り立つ.

今双方の物体に圧縮力が準静的に加わって互いの中心間の距離が  $h$  だけ接近するとしよう.  $u_z, u'_z$  をそれぞれ表面での  $z$  軸方向の変位とすると

$$z + u_z + (z' + u'_z) = h \Leftrightarrow (\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}) x_\alpha x_\beta + u_z + u'_z = h \quad (4.60)$$

が成立する. 第 2 式には (4.58),(4.59) を用いている. 接触していない処でも変位  $u_z, u'_z$  を用いれば

$$z + z' + u_z + u'_z > h \quad (4.61)$$

が成立する. また  $x, y$  軸をテンソル  $\kappa_{\alpha\beta} + \kappa'_{\alpha\beta}$  の主軸に選び、その主値を  $A, B$  とすると (4.60) は

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h \quad (4.62)$$

となる。

両物体の接触点に働く圧縮力を  $P_z(x, y)$  とし、接触面を平面  $z = 0$  とする。(4.57) はグリーンテンソルを求めたことに他なら無いので  $z = 0$  とおくことで  $u_z = (1 - \sigma^2)F/(\pi Y r^2)$  より一般解

$$u_z = \frac{1 - \sigma^2}{\pi Y} \iint dx' dy' \frac{P_z(x', y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad u'_z = \frac{1 - \sigma'^2}{\pi Y'} \iint dx' dy' \frac{P_z(x', y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.63)$$

が求められる。但し積分範囲は接触域に限るとする。(4.63) からたちどころに導かれるのが

$$\frac{u_z}{u'_z} = \frac{(1 - \sigma^2)Y'}{(1 - \sigma'^2)Y} \quad (4.64)$$

という関係式である。

(4.63) を (4.62) に代入すると

$$\frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \sigma^2}{Y} + \frac{1 - \sigma'^2}{Y'} \right) \iint dx' dy' \frac{P_z(x', y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = h - Ax^2 - By^2 \quad (4.65)$$

となる。この問題を  $P_z(x, y)$  について解けばよいのである。

ここで問を見れば分かる通り電荷分布を与えたときの静電ポテンシャルを求める問題と等価である。特に一様に帯電している楕円体の電荷分布によって生じる静電ポテンシャルは2次関数であることが知られており、その結果を利用できる。実際楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.66)$$

の体積内で一様に分布した電荷 (電荷密度  $\rho$ ) があるとき楕円体内部のポテンシャルは

$$\varphi(x, y, z) = \pi abc\rho \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}} \quad (4.67)$$

で与えられる。

問 (4.67) 式を示せ。<sup>2</sup>

さて (4.67) で  $z = 0, c \rightarrow 0$  という極限を考えてみる。すると  $\varphi$  は  $x, y$  のみの関数となり

$$\varphi(x, y) = \pi abc\rho \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}\xi} \quad (4.68)$$

となる。一方初等電磁気学よりポテンシャルは

$$\varphi(x, y, z) = \iiint dx' dy' dz' \frac{\rho(x', y', z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.69)$$

<sup>2</sup> 解答は例えば後藤憲一、山崎修一郎「詳解電磁気学演習」(共立 1982)を参照せよ。

で決まる。但し積分領域は楕円体の内側である。この式での  $z = 0$  における  $\varphi$  の値と (4.68) は一致しなければならない。

(4.69) において  $z$  方向の積分は先に実行しなければならない。その後  $z = 0$  の操作を行う必要がある。 $z$  に関する積分の範囲は

$$X \equiv 1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = \frac{z'^2}{c^2} \quad (4.70)$$

を導入すれば明らかに  $-cX$  から  $cX$  までである。従って

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (4.71)$$

に対して

$$\varphi(x, y) = \lim_{z \rightarrow 0} \int \int dx' dy' \rho(x', y') J(x', y', z) \quad (4.72)$$

と書ける。但し

$$J(x, y, z) \equiv \int_{-cX}^{cX} \frac{dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{R^2 + (cX - z)^2} + cX - z}{\sqrt{R^2 + (cX + z)^2} - (cX + z)} \right| \quad (4.73)$$

である。

ここで

$$U \equiv \frac{cX - z}{R}, \quad V \equiv \frac{cX + z}{R} \quad (4.74)$$

とおく。(4.70) から分かる通り  $z \rightarrow 0$  及び  $c \rightarrow 0$  の極限を取ることは  $U, V$  を小さく取る (或は  $R$  を大きく取る) 極限と等しい。従って

$$\lim_{z \rightarrow 0} J(x, y, z) = \ln \left( \frac{\sqrt{1 + U^2} + U}{\sqrt{1 + V^2} - V} \right) \simeq U + V = \frac{2cX}{R} \quad (4.75)$$

となる。よって (4.72) は

$$\varphi(x, y) \simeq 2\rho c \int \int dx' dy' \frac{X}{R} = 2\rho c \int \int \frac{dx' dy'}{R} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} \quad (4.76)$$

となる。

(4.68) と (4.76) の比較から

$$\int \int \frac{dx' dy'}{R} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} = \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} \quad (4.77)$$

が成立する。この式と (4.65) 式を比較することで

$$P_z(x, y) = \text{const.} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (4.78)$$

と書ける. 比例定数は合力  $F$  が

$$F = \int dx \int dy P_z(x, y) \quad (4.79)$$

であることから求まり, その結果は

$$P_z(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (4.80)$$

となる.

(4.80) を (4.65) に代入すると

$$\frac{FD}{\pi} \int d\xi \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} = h - Ax^2 - By^2 \quad (4.81)$$

となる. 但し

$$D = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \sigma^2}{Y} + \frac{1 - \sigma'^2}{Y'} \right) \quad (4.82)$$

である. この等式は任意の  $x, y$  で成立するので各係数が等しい. よって

$$\begin{aligned} h &= \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \\ A &= \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \\ B &= \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2 + \xi)\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} \end{aligned} \quad (4.83)$$

が成立する. これらは  $F$  が与えられたときの接触域の長軸と短軸を与える.

上述の公式 (4.83) を半径  $R, R'$  の 2 球の接触問題に適用してみよう. このとき対称性等より

$$A = B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (4.84)$$

となり  $a = b$  を充たす. 接触域の半径は (4.83) 式より

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)^2 \sqrt{\xi}} = \frac{FD}{2a^3} \quad (4.85)$$

となる. 但し最後の積分はベータ関数  $B(1/2, 3/2) = \int_0^\infty dx / ((1+x)\sqrt{x}) = \pi/2$  を用いた. よって接触域の半径  $a$  は

$$a = F^{1/3} \left( \frac{DRR'}{R + R'} \right)^{1/3} \quad (4.86)$$

となる.

また接触に伴う変形  $h$  は  $B(1/2, 1/2) = \pi$  から

$$h = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{\xi}} = \frac{FD}{a} \quad (4.87)$$

より

$$h = F^{2/3} \left\{ D^2 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right\}^{1/3} \quad (4.88)$$

となる. この様に変形  $h$  は力  $F$  の  $2/3$  乗に比例する.

- 問 (1) 2次元の Hertz の接触理論を求めてみよ.  
(2) 接触する等半径の球の外形を求めてみよ.

# 第5章 弾性波

## 5.1 等方媒質内の弾性波

変形物体中の運動では一般に温度変化を伴うが、熱伝導等のエネルギー輸送は極めてゆっくりと起こる。従って物体内に波動を励起した際にその振動周期時間程度の間で熱交換が起こらないと考えられる状況は多々あり、その場合には断熱的に運動を扱える。本章では断熱的な弾性媒質内の波動を考えてみる。以下ではヤング率やポアソン比等の物質定数は断熱変形の際の値を与えるものとする。以下では体積力の影響はないものとして取り扱う。

弾性媒質の運動方程式は (2.25) で与えられる

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (5.1)$$

線形弾性論では3章で述べた通り原子・分子は平衡位置近傍に留まるためにラグランジェ微分とオイラー微分の違いを区別する必要はない。従って (5.1) では  $\ddot{u}_i = \partial^2 u_i / \partial t^2$  を導入している。等方弾性体では (5.1) 式は (3.50) 式、即ち

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i = \frac{Y}{2(1+\sigma)} \Delta \mathbf{u} + \frac{Y}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \Delta (\Delta \cdot \mathbf{u}) \quad (5.2)$$

に書き換えることができる。(5.2) を

$$\ddot{\mathbf{u}} = c_l^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (5.3)$$

と書き直す。(5.2) と (5.3) の比較から

$$c_l = \sqrt{\frac{Y(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (5.4)$$

及び

$$c_t = \sqrt{\frac{Y}{2\rho(1+\sigma)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (5.5)$$

である。この  $c_l$  及び  $c_t$  は以下の議論から分かる通り縦波、横波の伝播速度である。

変形場  $\mathbf{u}$  を4章にならってヘルムホルツ分解

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t = \text{grad } \Phi + \text{rot } \mathbf{A} \quad (5.6)$$

としてみる。言うまでもないが  $\mathbf{u}_l = \text{grad } \Phi$  である。ベクトル解析の公式から

$$\text{div } \mathbf{u}_t = 0 \quad (5.7)$$

及び

$$\text{rot } \mathbf{u}_l = 0 \quad (5.8)$$

が成立する. 従って (5.6) を (5.3) に代入して発散を取ると

$$\text{div} (\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l) = 0 \quad (5.9)$$

となる. 任意の点で (5.9) が成り立つので  $\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l$  は空間的に一様な定数である. 一方で  $\mathbf{u}_l$  は平衡位置からの変位であるという定義から空間平均が 0 になる量であり

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0 \quad (5.10)$$

を充たす必要がある. 云う迄もないが (5.10) は波動方程式であり, 圧縮・膨張波の伝播を表す. 例えば  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(x, t) = (u_x, u_y, u_z)$  とすると波の進行方向の横成分は恒等的にゼロ, 即ち  $u_y = u_z = 0$  を充たすので (5.10) は

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0 \quad (5.11)$$

となる. このように進行方向と変位が一致するために圧縮・膨張波は縦波とも呼ばれる一方, (5.6) を (5.3) に代入して回転を取ると

$$\text{rot} (\ddot{\mathbf{u}}_t - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t) = 0 \quad (5.12)$$

となる. ここで縦波のときと同じ議論を用いることで回転波或は横波の

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t = 0 \quad (5.13)$$

という波動方程式が導かれる. (5.13) 式が横波を表しているのは縦波のときと同様に  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$  とおいてみて進行方向と垂直な成分しか残らないことから分かる.

(5.4), (5.5) 式から

$$\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}} \quad (5.14)$$

が成り立つ. ここで (3.84) 式即ち  $-1 \leq \sigma \leq 1/2$  を思い出すと

$$c_l/c_t > \sqrt{4/3} \quad (5.15)$$

が成り立つ. しかし (3.85) 式で述べた様に実質的に  $\sigma \geq 0$  なので現実には  $c_l/c_t \geq \sqrt{2}$  と考えてよい. このような縦波と横波の速度の違いは地震の際の縦揺れと横揺れの時間差で体感できるであろう.

## 5.2 表面波

前節では媒質内の波動を論じたが、本節では表面付近で伝播し媒質内部に侵入しないレーレー (Rayleigh) 波と呼ばれる弾性波を紹介する。

(5.10) と (5.13) をひとまとめにして

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (5.16)$$

と表す。但し  $\mathbf{u}$  は  $\mathbf{u}_l$ ,  $\mathbf{u}_t$  の任意の成分の一つであり,  $c$  はそれに対応した  $c_l$  または  $c_t$  である。進行方向を  $x$  軸方向に取り

$$\mathbf{u} = e^{i(kx - \omega t)} f(z) \mathbf{e}_x \quad (5.17)$$

という平面波を考えてみよう。関数  $f(z)$  は (5.17) を (5.16) に代入することで導かれる方程式

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) f \quad (5.18)$$

の解である。ここで

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} < 0 \quad (5.19)$$

とすると  $f(z)$  は  $z$  の周期関数であり波は深部迄伝わり表面波ではない。本節では表面波を論じるので

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0 \quad (5.20)$$

という条件を課す。従って  $f(z)$  は

$$f(z) = \text{const} \cdot \exp\left(z \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\right) \quad (5.21)$$

で与えられる。ここで指数関数内の符号は  $z = 0$  に表面,  $z < 0$  に媒質があり波が減衰することを考慮している。よって (5.17) で  $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$  とおけば

$$u = \text{const} \cdot e^{i(kx - \omega t)} e^{\kappa_R z} \quad (5.22)$$

と書ける。ここで

$$\kappa_R = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (5.23)$$

である。

境界条件の存在によって媒質内で独立だった  $\mathbf{u}_l$ ,  $\mathbf{u}_t$  の間に関係がつく。この関係式が表面波の分散関係 (角振動数  $\omega$  と波数  $k$  の関係) を与える。

自由表面では力が働かないので任意の  $i$  成分に対して

$$\sigma_{ki} n_k = 0 \quad (5.24)$$



という境界条件が存在する. ここで

$$n_k = \delta_{k,3} \quad (5.25)$$

は表面の法線ベクトルである. (5.24) から

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (5.26)$$

が成り立つ. (3.46) 或は (3.77) 式を思い出せば  $u_{xz}$ ,  $u_{yz}$  は  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  に比例するので

$$u_{xz} = u_{yz} = 0 \quad (5.27)$$

が成り立つ. 一方  $\sigma_{zz}$  は

$$\sigma_{zz} = \lambda(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + 2\mu u_{zz} = 0 \quad (5.28)$$

を充たすので (3.83) から得られるポアソン比の関係式

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (5.29)$$

を用いると

$$\sigma(u_{xx} + u_{yy}) + (1 - \sigma)u_{zz} = 0 \quad (5.30)$$

と書くことができる.

仮定 (5.17) 式から  $u_{ij}$  は  $y$  には依存しない. よって

$$u_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad (5.31)$$

が成り立つ. 一方 (5.17) から

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \sim \kappa \mathbf{u} \rightarrow 0 \quad (5.32)$$

である. 従って

$$u_y = 0 \quad (5.33)$$

が成立する. つまり変位は  $xz$  平面に存在する ( $u_x \neq 0$ ,  $u_z \neq 0$ ) ことになる.

縦波を考えてみよう. (5.17) から

$$u_{lx}, u_{lz} \sim e^{\kappa_l z + i(kx - \omega t)} \quad (5.34)$$

である. 但し

$$\kappa_l = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}} \quad (5.35)$$

である. この波が

$$\text{rot } \mathbf{u}_l = 0 \quad (5.36)$$

即ち

$$-ik(u_l)_z - \kappa_l(u_l)_x = 0 \quad (5.37)$$

を充たす. よって

$$\begin{aligned} u_{lx} &= ka \exp\{\kappa_l z + i(kx - \omega t)\} \\ u_{lz} &= -i\kappa_l a \exp\{\kappa_l z + i(kx - \omega t)\} \end{aligned} \quad (5.38)$$

である. 但し  $a$  は適当な定数である.

一方, 横波についても  $u_{tx}, u_{tz} \sim e^{\kappa_t z + i(kx - \omega t)}$  を充たすので

$$\kappa_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}} \quad (5.39)$$

となる. また

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0 \rightarrow ik(u_t)_x + \kappa_t u_{tz} = 0 \quad (5.40)$$

より

$$\begin{aligned} u_{tx} &= \kappa_t b \exp\{\kappa_t z + i(kx - \omega t)\} \\ u_{tz} &= -ikb \exp\{\kappa_t z + i(kx - \omega t)\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

と表現できる.

(5.6) 式の  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$  より (5.27) の  $u_{xz} = 0$  は

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \quad (5.42)$$

と書き換えることができる. 同様に (5.30) は

$$c_l^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (5.43)$$

となる. 実際 (5.30) で  $u_{yy} = 0$  と (5.4), (5.5) 或は (5.14) から導かれる関係式

$$\sigma = \frac{c_l^2 - 2c_t^2}{2(c_l^2 - c_t^2)} \quad (5.44)$$

を用いると (5.43) を示すのは容易である.

(5.38) と (5.41) を (5.42) に代入すると第一式は

$$2ak\kappa_l + (\kappa_l^2 + k^2)b = 0 \quad (5.45)$$

となり, 第2式は

$$2bc_t^2 \kappa_t k + a[c_l^2(\kappa_l^2 - k^2) + 2c_t^2 k^2] = 0 \quad (5.46)$$

となる. 連立方程式 (5.45), (5.46) が非自明解を持つ条件は

$$a(k^2 + \kappa_t^2) + 2bk\kappa_t = 0 \quad (5.47)$$

であり,

$$(k^2 + \kappa_t^2)^2 = 4k^2 \kappa_t \kappa_l \quad (5.48)$$

と書き直すことができる.

$$\omega = c_t k \xi \quad (5.49)$$

と置き (5.48) に代入すると

$$\xi^8 - 8\xi^4 + 8\xi^2 \left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16 \left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0 \quad (5.50)$$

となる. この結果から  $\xi$  は比  $c_t/c_l$  のみで決定されることがわかる.

### 5.3 1次元非線形格子とソリトン

微分方程式が与えられた場合に任意の初期条件に対する解が決定できる場合にその微分方程式を可解と呼ぼう. 線形の問題であれば大抵は可解である. 一方、非線形問題は一般に可解ではないが一部の方程式にはソリトンと呼ばれる可解なクラスが存在する. ここでは弾性波の問題としてソリトンのごく簡単な側面を紹介してみよう.

今、図の様に1次元格子上の質点の運動を考えてみる. 各質点の位置を  $y_n(t)$  として相対位置を  $r_n(t) \equiv y_{n+1}(t) - y_n(t)$  とする. 全ての質点の質量を等しいとしてそれを  $m$  とすると運動方程式は

$$m\ddot{y}_n(t) = -\phi'(r_{n-1}) + \phi'(r_n) \quad (5.51)$$

と書けるだろう. ここで  $\phi(r)$  はポテンシャルであり、相対変位の関数である. 格子変位はそれほど大きくないとして平衡位置のまわりで展開すると

$$\phi(r) \simeq \frac{k}{2}r^2 + \frac{1}{3}kar^3 + \dots \quad (5.52)$$

となる.  $y_n(t)$  が  $n$  について充分滑らかに変化し  $x = nh$  の連続関数として扱えるとしよう. 但し  $h$  は格子の平衡間隔である. このとき  $y(x, t) \equiv y_n(t)$  に対して

$$y_{n\pm 1}(t) = y(x, t) \pm h \frac{\partial}{\partial x} y(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, t) \pm \dots \quad (5.53)$$

と展開できる. (5.52), (5.53) を (5.51) に代入して

$$c_0 \equiv h\sqrt{k/m}, \quad \epsilon = 2ah \quad (5.54)$$

とする. (5.51) の右辺が

$$k\{(y_{n+1} - y_n - (y_n - y_{n-1}))\} + ka\{(y_{n+1} - y_n)^2 - (y_n - y_{n-1})^2\} + \dots$$

と書けることを利用することで

$$c_0^{-2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \epsilon \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dots \quad (5.55)$$

が導かれる. この方程式はソリトン方程式の一つでブジネ (Boussinesq) 方程式と呼ばれる.

ブジネ方程式は更に簡略化できる。それは方程式が時間に対して2階微分であり左右両方向に進む波を解として持っているからである。実際にはそのどちらかだけが重要な役割を果たすことが多い。ここで線形近似では伝播速度  $c_0$  の波を解に持つ波動方程式であったことを思い出そう。その波が右に進む場合にはその並進速度を除いた座標系を用いると便利である。そこで

$$\xi = x - c_0 t, \quad \tau = \frac{1}{2} \epsilon c_0 t \quad (5.56)$$

というスケールされた座標、時間を用い、新しい変数

$$u(\xi, \tau) = \frac{\partial y(x(\xi), t(\xi, \tau))}{\partial \xi} \quad (5.57)$$

を導入してみる。(5.56)式から

$$\partial_t = \frac{\epsilon c_0}{2} \partial_\tau - c_0 \partial_\xi, \quad \partial_x = \partial_\xi \quad (5.58)$$

という変換を受けるので(5.55)式は

$$-\epsilon \partial_\tau u + \frac{1}{4} \epsilon^2 \partial_\tau^2 y = \epsilon u \partial_\xi u + \frac{h^2}{12} \partial_\xi^3 u \quad (5.59)$$

となる。

ここで元々  $\epsilon = 0$  とおくと波動方程式になることから  $\epsilon$  は微小パラメーターである。従って(5.59)式で  $\epsilon^2$  に比例する項は高次の微小量として無視することが可能であろう。また右辺の第2項が他の項と釣り合う条件を考えるならば  $\epsilon \sim h^2$  と考えるべきである。従って(5.59)式は

$$\partial_\tau u + u \partial_\xi u + \frac{h^2}{12\epsilon} \partial_\xi^3 u = 0 \quad (5.60)$$

を得る。この方程式は前世紀に浅水波に対する方程式として Kortweg, de Vries によって導かれ、KdV(Kortweg-de Vries) 方程式と呼ばれる。3階微分は波の分散関係の最も主要な補正を与えるために分散性を表す。一方、第2項は最低次の非線形性を表す。第1、第2項のみであると波は突っ立ちを示し、やがて3価になるので解は爆発する。しかし、その突っ立ちを波をばらばらにする分散項とバランスさせることで正則な偏微分方程式を得る。

このKdV方程式の真価が広く認識されたのは1967年にZabusky, Kruskalによる数値計算によって波が衝突によってもその個性を失わない孤立波としての性質を持つこと、初期条件への再帰性を持つことなどが発見されたからである。彼らは粒子的特性を持つ孤立波をソリトンと名付けた。その後、直ちに厳密解等が次々と発見されて応用数学の中で今世紀後半の屈指の重要な発見となった。歴史的には1950年代初頭のFermi-Pasta-Ulamによる非線形格子(5.51),(5.52)の数値計算が先行したが、Los Alamos研究所内部のレポートとして刊行されたに留まりその重要性が認識されることは少かった。しかしながら不可逆性、あるいはエルゴード性が非線形性だけで作り出す事ができないことはおおきな驚きであった事は想像に難くない。

その後、様々な系で研究が進みソリトンを持つ方程式系が続々と発見されていった。そのなかでも有名なのは指数関数的相互作用をする格子力学系で戸田盛和によって発見され

た戸田格子である。戸田格子では (5.52) のかわりに

$$\phi(r) = ae^{-r} + br \quad (5.61)$$

というポテンシャルを用いる。

ソリトンを持つ物理系は様々存在する。元来KdV方程式は浅水波の表面形状を表す方程式として導出された。その後、深い波も異なった方程式系ではあるがソリトン系であることが示された。1次元プラズマや電気回路系もソリトンに帰着することが知られているし、光通信の基礎にソリトンは用いられている。また白川博士のノーベル賞の対象となったポリアセチレン等の伝導性高分子での電荷移動のメカニズムはソリトンである。他にもスピン系や渦糸系等数限りなくソリトン系は発見されている。変わったところではアインシュタイン方程式が厳密に解けるブラックホール解はソリトンと等価である。また1次元電子系等で厳密に解けるモデルは何らかの意味でソリトンに変換できる。この様に可解系の殆んど場合は何らかの意味でソリトンと関係があり、その基礎を学ぶ事は今後重要になっていくであろう。

問 (1)

$$\phi(r) = \frac{k}{2}r^2 + \frac{ka'}{4}r^4$$

のとき、格子力学系 (5.51) 式の連続体近似を考えてみる。 $v = \partial_{\xi}y$ ,  $\tau = \epsilon c_0 t/2$ ,  $\mu = 2a'$  とおくことで

$$\partial_{\tau}v + v^2\partial_{\xi}v + \mu\partial_{\xi}^3v = 0$$

という modified KdV(MKdV) 方程式が導かれることを示せ。

(2) MKdV 方程式は Miura 変換

$$u = v^2 + \partial_x v$$

によって

$$\partial_t u - 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = (\partial_x + 2v)(\partial_t v - 6v\partial_x v + \partial_x^3 v)$$

と書かけることを示せ。このように MKdV 方程式は KdV 方程式に変換可能である。

## 5.4 KdV 方程式の解法

### 5.4.1 広田の方法

KdV, MKdV, 戸田等のソリトン方程式が可解なのは非線形変換によって線形化が可能であるからである。歴史的にはこれらの方程式が非線形ポテンシャル中の散乱問題に変換でき、散乱データから逆にポテンシャルを推定するという逆散乱の問題として定式化された。しかしこの方法は道具立てが面倒なのでここでは、その後、広田良吾によって発見された直接解を求める方法（直接法）を紹介しよう。

広田の方法では方程式を双線形形式に書き直して解く。そこで広田は任意の関数  $a(x)$ ,  $b(x)$  の双線形形式  $a(x) \cdot b(x)$  に作用する演算子  $D_x$  を

$$D_x a(x) \cdot b(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) a(x) b(x') \Big|_{x=x'} \quad (5.62)$$

で定義する。この演算子を  $l$  回作用させると

$$D_x^l a(x) \cdot b(x) = (\partial_x - \partial_{x'})^l a(x) b(x') \Big|_{x=x'} \quad (5.63)$$

となる。

すぐ分る通り広田の演算子は

$$D_x^l a(x) \cdot 1 = (\partial_x)^l a(x), \quad D_x^l a(x) \cdot b(x) = (-1)^l D_x^l b(x) \cdot a(x) \quad D_x^{2l+1} a(x) \cdot a(x) = 0 \quad (5.64)$$

等が成立する。<sup>1</sup> ここで  $l$  は整数である。また

$$D_x a(x) \cdot b(x) = 0 \rightarrow a(x) \propto b(x) \quad (5.65)$$

もすぐ分る。その他、定数  $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$  に対して

$$D_x^l e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x} = (\alpha - \beta)^l e^{(\alpha+\beta)x}, \quad e^{\epsilon D_x} a(x) \cdot b(x) = a(x + \epsilon) b(x - \epsilon) \quad (5.66)$$

の成立も容易に分るであろう。更に (5.66) を用いて  $D_t, D_x$  の任意の多項式  $F(D_t, D_x)$  に対して

$$F(D_t, D_x) e^{\Omega_1 t + p_1 x} \cdot e^{\Omega_2 t + p_2 x} = F(\Omega_1 - \Omega_2, p_1 - p_2) \exp[(\Omega_1 + \Omega_2)t + (p_1 + p_2)x] \quad (5.67)$$

や

$$F(D_t, D_x) e^{\Omega_1 t + p_1 x} \cdot e^{\Omega_2 t + p_2 x} = \frac{F(\Omega_1 - \Omega_2, p_1 - p_2)}{F(\Omega_1 + \Omega_2, p_1 + p_2)} F(\partial_t, \partial_x) \exp[(\Omega_1 + \Omega_2)t + (p_1 + p_2)x] \quad (5.68)$$

が成立する。

この広田の方法を用いると KdV 方程式

$$\partial_t u + 6u \partial_x u + \partial_x^3 u = 0 \quad (5.69)$$

は変換

$$u = 2\partial_x^2 \ln f \quad (5.70)$$

を施すと

$$D_x(D_t + D_x^3) f \cdot f = 0 \quad (5.71)$$

となる。

---

<sup>1</sup> (5.64) の最後のものは  $D_x^{2l+1} a \cdot a = \sum_{r=0}^{2l+1} C_r a^{(r)} a^{(2l+1-r)}$  という定義式とライプニッツルールを組み合わせて表現する。ここで  $a^{(r)} = d^r a / dx^r$  及び  ${}_{2l+1}C_r = (2l+1)! / (r!(2l+1-r)!)$  である。和を  $r=0$  から  $l$  までと  $r=l+1$  から  $2l+1$  までに分割して後半のものを  $k=2l+1-r$  で書き直す事で  $D_x^{2l+1} a \cdot a = 0$  が証明できる。

証明 (5.71) から (5.69) を導こう。定義 (5.62) から

$$\begin{aligned}
D_x D_t f \cdot f &= (\partial_x - \partial_{x'}) (\partial_t - \partial_{t'}) f(x, t) f(x', t') |_{x=x':t=t'} \\
&= (\partial_x - \partial_{x'}) \{ \partial_t f(x, t) f(x', t) - f(x, t) \partial_t f(x', t) \} |_{x=x'} \\
&= 2 \{ \partial_x \partial_x f f - \partial_t f \partial_x f \}
\end{aligned} \tag{5.72}$$

が成り立つ。また

$$D_x^4 f \cdot f = D_x^3 (\partial_x f f - f \partial_x f) = 2 D_x^3 (\partial_x f f) \tag{5.73}$$

も成り立つ。ここで

$$v = \partial_x \ln f = \frac{\partial_x f}{f} \tag{5.74}$$

と置くと

$$D_x D_t f \cdot f = 2 (\partial_x \partial_t f - \partial_x f \partial_t f) = 2 f^2 \partial_t v \tag{5.75}$$

が成立する。また恒等式<sup>2</sup>

$$\partial_x^3 \frac{a}{b} = \frac{D_x^3 a \cdot b}{b^2} - 3 \left( \frac{D_x a \cdot b}{b^2} \right) \frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2} \tag{5.76}$$

において  $a = \partial_x f$ ,  $b = f$  とすると

$$\partial_x^3 \frac{f_x}{f} = \partial_x^3 v = \frac{D_x^3 f_x \cdot f}{f} - 6 (\partial_x v)^2$$

から

$$\frac{D_x^3 \partial_x f \cdot f}{f^2} = \partial_x^3 v + 6 (\partial_x v)^2 \tag{5.77}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}
D_x f_x \cdot f &= \partial_x^2 f f - (\partial_x f)^2 = f^2 \partial_x v \\
D_x^2 f \cdot f &= 2 (\partial_x^2 f f - (\partial_x f)^2) = 2 f^2 \partial_x v
\end{aligned} \tag{5.78}$$

を用いている。

(5.75), (5.77) より

$$\frac{1}{f^2} D_x (D_t + D_x^3) f \cdot f = 2 (\partial_t v + 6 (\partial_x v)^2) + \partial_x^3 v \tag{5.79}$$

となる。最後に  $u = 2 \partial_x v$  とおき KdV 方程式 (5.69) が導かれる。

(証明終)

---

<sup>2</sup> 証明は直接計算に基づく。 $D_x^3 a \cdot b / b^2 = a''' / b - 3a'' b' / b^2 + 3a' b'' / b^2 - a b''' / b^2$ ,  $D_x a \cdot b / b^2 = (a' b - a b') / b^2$ ,  $D_x^2 b \cdot b / b^2 = 2b'' / b - 2b'^2 / b^2$  より (5.76) の右辺は  $a''' / b - 3a'' b' / b^2 - 3a' b'' / b^2 - a b''' / b^2 + 6a' b^2 / b^3 - 6a b^3 / b^4 + 6a b' b'' / b^3$  となる。一方、左辺は普通の微分を3回繰り返す事でこの恒等式は証明できる。

### 5.4.2 1ソリトン解

1ソリトン解は容易に求められる。(5.71)で  $f$  を

$$f(x, t) = 1 + \epsilon f^{(1)}(x, t) + \epsilon^2 f^{(2)}(x, t) + \dots \quad (5.80)$$

として  $\epsilon^1$  の係数を書き下すと

$$\partial_x(\partial_t + \partial_x^3)e^{2\eta} = 0 \quad (5.81)$$

である。但し

$$\eta = -kx - \eta_0 + 4k^3t \quad (5.82)$$

である。従って

$$f^{(1)} = e^{2\eta}, \quad f^{(2)} = f^{(3)} = \dots = 0 \quad (5.83)$$

となる。 $u(x, t)$  で表現すれば  $\beta = 4k^3$  に対して

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx - \beta t + \eta_0) \quad (5.84)$$

となる。(5.84)は1ソリトン解に他ならない。

### 5.4.3 2ソリトン解

2ソリトン解はやや面倒である。2ソリトンでは

$$\eta_i = -k_i x - \eta_{0,i} + 4k_i^3 t$$

として ( $\eta_{0,i}$  は位相パラメーター)

$$f = 1 + f^{(1)} + f^{(2)} = 1 + e^{2\eta_1} + e^{2\eta_2} + B e^{2(\eta_1 + \eta_2)} \quad (5.85)$$

とおく。ここで  $f^{(1)}$  は前節の結果から  $f^{(1)} = e^{2\eta_1} + e^{2\eta_2}$  であり  $f^{(2)}$  は

$$f^{(2)} = B e^{2(\eta_1 + \eta_2)} \quad (5.86)$$

である。

定義及び (5.85) から

$$D_x(D_t + D_x^3)f \cdot f = D_x(D_t + D_x^3)f^{(1)} \cdot f^{(1)} + 2D_x(D_t + D_x^3)f^{(2)} \cdot 1 = 0 \quad (5.87)$$

となる。ここで1ソリトンが  $D_x(D_t + D_x^3)f^{(1)} \cdot 1 = 0$  を満たすこと及び (5.64) の性質を用いている。(5.68),(5.86),(5.87) より

$$\begin{aligned} D_x(D_t + D_x^3)f^{(1)} \cdot f^{(1)} &= D_x(D_t + D_x^3)(e^{2\eta_1} \cdot e^{2\eta_2} + e^{2\eta_2} \cdot e^{2\eta_1}) \\ &= 2 \frac{(k_1 - k_2)[2(\beta_1 - \beta_2) - \{2(k_1 - k_2)\}^3]}{(k_1 + k_2)[2(\beta_1 + \beta_2) - \{2(k_1 + k_2)\}^3]} \partial_x(\partial_t + \partial_x^3)e^{2(\eta_1 + \eta_2)} \\ &= -2\partial_x(\partial_t + \partial_x^3)B e^{2(\eta_1 + \eta_2)} \end{aligned} \quad (5.88)$$



が成り立つ。 $\beta_i = 4k_i^3$ を考慮すると

$$B = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (5.89)$$

となる。ここで  $\beta_i = 4k_i^3$  を用いた。この式で2ソリトン解が求まったことになる。元の変数に戻すのは容易であるが表式が煩雑になるので省略する。

2ソリトン解は指数関数の重ね合わせに共鳴項とも呼ぶべき  $f^{(2)}$  の項が足された形になっている。従って  $\eta_1 \simeq \eta_2$  の処を除くと殆んど共鳴項はゼロであり1ソリトンの重ね合わせで表現できる。一方、1ソリトンが互いに接近した場合には共鳴項の寄与が重要になる。 $x$  軸正方向へ伝播する2つのソリトンの相互作用を考えてみよう。1ソリトンの伝播速度は振幅の3乗に比例するので先行する振幅の小さなソリトンは後から進行してくるソリトンに追い付かれる。その後、 $f^2$  で表現される共鳴を起こした後、再び2つのソリトンは分離をし、独立に振舞うことになる。この波の独立性がソリトンがソリトンたるゆえんである。

問 戸田格子の1ソリトン, 2ソリトン解を求めてみよ.

# 第6章 流体方程式と完全流体

## 6.1 流体方程式

前章迄では専ら弾性体を扱ったが、本章から流体の方程式を議論してみよう。外力の働かないニュートン (Newton) 流体では密度  $\rho$ , 速度  $\mathbf{v}$  に対して質量の保存則 (2.13)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (6.1)$$

運動量の保存則 (Navier-Stokes 方程式) (3.56)

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \chi_0 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu_0 \Delta \mathbf{v} \quad (6.2)$$

及び、エネルギーの連続の式 (3.75)

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi + \kappa \nabla^2 T \quad (6.3)$$

が成り立つ。但し粘性率  $\chi_0, \mu_0$  及び熱伝導率  $\kappa$  は一定であるとし、 $T, s$  はそれぞれ温度場と単位体積当たりのエントロピーを表す。また  $\Phi$  は

$$\Phi = 2\mu_0 \left( v_{ij} - \frac{1}{3} v_{kk} \delta_{ij} \right)^2 + \chi_0 v_{kk} v_{jj} \quad (6.4)$$

で与えられる粘性散逸関数である。

### 6.1.1 状態方程式

流体力学では粘性率等の定数パラメータは実験結果等から推定する。従って求めるべき変数は (6.1)-(6.3) 式の場合は  $\rho, \mathbf{v}, p, s, T$  である。このうち  $\rho, p, s, T$  はいずれも熱力学変数であり、独立ではない。殆んどの場合は流体力学では局所平衡を仮定してよい。これは流体が静止して外部境界の温度が一定であれば平衡状態であることと、熱平衡からの偏差は歪み速度  $v_{ij}$  と同程度と期待され、圧力はストレステンソルを歪み速度で展開したときの定数項に相当するために偏差の影響は受けないと期待される。従って局所的に熱平衡の式をしばしば用いる。

熱力学では状態変数として独立に選べるものは2つである。例えば状態変数として圧力  $p$ , 密度  $\rho$ , 温度  $T$  を取ると1つの関係式

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (6.5)$$

で関係づけられる。例えば十分に希薄な気体であれば圧力が温度に比例するという理想気体の状態方程式がよく知られており、この種の状態方程式が必要となる。この種の状態方程式として代表的なのは以下の3つである。

### 等温変化

流体の外部境界が等温熱浴に接しており、流体の熱伝導度が十分に大きいときには流体は空間的に温度一定となる。このとき (6.5) 式は

$$f(p, \rho) = 0 \quad (6.6)$$

となる。

### 断熱変化

流体が断熱的なとき ( $\kappa \rightarrow 0$ ) には (6.3) 式及び  $\Phi \geq 0$  から

$$\frac{Ds}{Dt} \geq 0 \quad (6.7)$$

となる。即ち熱力学の第2法則となる。特に粘性効果が無視できる完全流体では流れは等エントロピー的になる。従って (6.6) 式と同様な式が成り立つ。

### 順圧変化

上記2つの例ではいずれも圧力と密度の間に一定の関係があった。これを一般化して密度と圧力の間にある関係式が成り立っている状態変化を順圧変化という。例えば

$$\rho = f(p) \quad (6.8)$$

という関係式は順圧変化の式を表す。勿論、流体に沿って密度一定が成り立つ非圧縮性流体は順圧変化をする流体の例である。

## 6.1.2 境界条件

流体の運動は偏微分方程式によって記述されるのであるから、流体境界において境界条件を課す必要がある。同時に非定常問題では時間軸上の境界条件と解釈できる初期条件も必要となる。

### 初期条件

初期条件はある時刻での諸量、例えば密度  $\rho$ 、流速  $\mathbf{v}$ 、圧力  $p$  等を与えればよい。通常初期条件を与えた時刻を  $t = 0$  として、その後の時間発展を追うことができる。質量の連続の式、運動方程式、エネルギー方程式は全て時間に対して一階微分なので変数の初期値を与えるだけで初期条件としては十分である。

## 固体境界条件

まず固体境界面での境界条件を考えよう。流体内においては一般に速度場  $\mathbf{v}$  の連続性を仮定しており、境界面においてもその不連続性を認めない。従って流体の速度  $\mathbf{v}$  と境界面の速度  $\mathbf{v}_W$  の一致を仮定する。即ち

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_W \quad (6.9)$$

である。これを粘性境界条件と呼び、一般の流体では正しいと信じられている。この境界条件はバルクの流体方程式を導出可能な気体分子運動論からは導出するのは難しく、分子運動のスケールでは滑べりが多少ある。

非粘性の極限である完全流体、即ち、

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (6.10)$$

が成り立つときは事情が異なる。完全流体においては接線応力が存在せず境界との相互作用もないので接線方向の不連続性が許される。従って流体が境界面に沿って流れる事

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{v}_W \cdot \mathbf{n}) \quad (6.11)$$

が課される。ここで  $\mathbf{n}$  は面法線ベクトルである。これを非粘性境界条件と呼ぶ。

この様に粘性流体と完全流体で境界条件が異なることは一見奇異に映るが、完全流体というものが粘性流体における粘性境界層の厚さを無視した近似的概念であることを思い出せばよく、境界層の前後で速度の接線成分の急激な変化を境界条件として考慮したと思えば問題はない。

## 変形する境界面での条件

流体力学では水の表面等の様に時間と共に変形する境界も扱う必要がある。このような境界面としては変形物体面が変形が時空の関数として与えられる場合と、境界面の変形自体が方程式の解として決まる場合がある。具体的な境界条件は問題に応じて複雑に決まるが両者で共通しているのは粘性境界条件 (6.9) 式や非粘性境界条件 (6.11) が成り立つということである。特に完全流体の場合はより明示的な境界条件を書き下す事が可能である。今変形する境界面が

$$F(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (6.12)$$

で書けるとする。(6.11) 式から流体は法線成分を持たないので、境界面上を滑べることはあっても面から離れることはない。従って  $(\mathbf{r}, t)$  において (6.12) を満たした流体素片はラグランジュ的な変形  $(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, t + \delta t)$  においても

$$F(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, t + \delta t) = 0 \quad (6.13)$$

を満たす。この式と (6.12) の差を取り  $\delta t \rightarrow 0$  の極限で

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})F = 0 \quad (6.14)$$

となる。このように変形する境界の非粘性境界条件は (6.12), (6.14) 式で与えられる。

## 6.2 流線, 流管, 渦線

### 6.2.1 流線

流れの場を幾何学的に表現するために速度ベクトルの各点で接線となる曲線として定義される流線を導入する. 曲線上の一点  $\mathbf{r}$  における曲線の微小部分の長さ  $dr$  に対して, 曲線の線要素

$$d\mathbf{r} = \mathbf{t}dr$$

が定義できる. ここで  $\mathbf{t}$  は接ベクトルである. 流線の定義より  $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{v}$  即ち

$$\frac{dx_1}{v_1(\mathbf{r}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\mathbf{r}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\mathbf{r}, t)} \quad (6.15)$$

が成り立つ.  $\mathbf{v}$  は流れの各点で 1 価であるので流線も流れ場の中で一意的に決まる. 従って原則として 2 本以上の流線が 1 点で交わることはない. 但し  $\mathbf{v} = 0$  となる淀み点では流線の方向が定まらないために複数の流線が交わることがあり得る.

### 6.2.2 流管

次に流管を導入してみよう. 流管は流線で作る曲面である. 流線の定義から流管の面法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は速度場と直交し  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  が成り立つ. 定常流の場合は図から明らかな様に流入, 流出のバランスから

$$\left( \int_S - \int_{S'} - \int_{S''} \right) (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad (6.16)$$

が成り立つ. 一方で流管上での  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  という直交条件から  $S''$  の積分の寄与は消える. 従って

$$\int_S (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \int_{S'} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \text{一定} \quad (6.17)$$

となる. 特に非圧縮流の場合は  $\rho$  は一定なので流量

$$Q \equiv \int (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (6.18)$$

は流管に固有な不変量となっている.

### 6.2.3 渦線と渦管, 循環

流線は流れ場に付随した概念であったが渦度  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$  に対しても同様に渦管を導入できる. 渦線の線素を  $d\mathbf{r}$  とすると定義から

$$d\mathbf{r} \parallel \boldsymbol{\omega} \quad (6.19)$$

が成り立つ. 従って

$$\frac{dx_1}{\omega_1(\mathbf{r}, t)} = \frac{dx_2}{\omega_2(\mathbf{r}, t)} = \frac{dx_3}{\omega_3(\mathbf{r}, t)} \quad (6.20)$$

という関係がある.

渦管も同様に渦線によって形成される曲面として定義され

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.21)$$

が成り立つ.

ここでより重要な循環を導入しよう. 循環は

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (6.22)$$

で定義される. ここで  $d\mathbf{s} = \mathbf{l}ds$  で  $\mathbf{l}$  は曲線  $C$  の接ベクトルである. ストークスの定理を用いることで (6.22) は

$$\Gamma = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.23)$$

と書き換えることが可能である. 渦管の定義から渦管上では

$$\int dS \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = \oint_{C''} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (6.24)$$

である. よって図の閉曲線  $C''$  において

$$\oint_{C''} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \left( \oint_C + \int_A^{A'} - \oint_{C'} + \int_{A'}^A \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (6.25)$$

が成り立つ. ここで第2項と第4項はキャンセルするので

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C'} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (6.26)$$

という等式に帰着する.  $C, C'$  は渦管上の任意の閉曲線なので

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \text{一定} \quad (6.27)$$

である. この式で  $\boldsymbol{\omega}$  が一定とすると  $\Gamma = \boldsymbol{\omega} S$  となる. ここでの  $S$  は断面積である.

循環には加法性がある. 実際小素片  $i$  (面積  $S_i$ , 循環  $\Gamma_i$ ) に対して  $\Gamma_i = \boldsymbol{\omega}_i S_i$  が定義できるが明らかに

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i = \sum_i \boldsymbol{\omega}_i S_i \quad (6.28)$$

が成り立っている.

## 6.3 完全流体の一般論

### 6.3.1 基礎方程式

本節では完全流体の一般論を簡単に紹介する. 完全流体とは粘性散逸のない流体でありストレステンソルが静水圧  $p$  を用いて

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (6.29)$$

と書けるものである.

基礎方程式として質量の連続の式は (2.13) 或は (2.14) 式と変わらない. 一方 (6.29) 式を用いると外力  $\mathbf{K}$  下での運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{K} \quad (6.30)$$

となる.

一方エネルギー方程式では断熱性 (熱伝導率  $\kappa = 0$ ) を仮定して

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (6.31)$$

を採用する. これは (3.75) 式において粘性散逸と熱伝導による散逸がないと仮定したことに相当する. また状態方程式において状態変数を圧力  $p$ , 密度  $\rho$ , エントロピー密度  $s$  を取ると等エントロピー流では順圧変化となり (6.8) 式を用いることができる. ここで圧力関数

$$P(\rho) = \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (6.32)$$

を導入しておくとも便利である.

### 6.3.2 ベルヌーイの定理

完全流体ではベルヌーイ (Bernoulli) の定理が成り立つ. この定理は空気の流れ等粘性の小さな流れでも近似的に成立し多くの現象の説明に用いられている.

ベクトル解析の公式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\text{grad } |\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} \quad (6.33)$$

を用いると運動方程式 (6.30) 式は圧力関数 (6.32) を用いて

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad} \left( P + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \mathbf{K} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} \quad (6.34)$$

と書き直すことができる. 特に外力が保存力場で書けるとするとポテンシャル  $\Psi$  を用いて  $\mathbf{K} = \text{grad } \Psi$  と書ける. この場合 (6.33) は

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad} \left( P + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \Psi \right) + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} \quad (6.35)$$

となる.

#### 静止状態

流体が至る処で静止しているとする  $\mathbf{v} = 0$  なので

$$P + \Psi = \text{一定} \quad (6.36)$$

となる。即ち等ポテンシャル面  $\Psi = \text{一定}$  では圧力関数  $P = \text{一定}$  を意味する。また質量の保存則 (2.13) を考えれば、この状況では  $\rho = \text{一定}$  なので圧力  $p$  も一定である。このことから重力下では静止水面は重力の等ポテンシャル面と一致し、地球の曲率を考えなければ水面は水平である。

## 定常流

定常流では時間微分が落ちるので

$$\text{grad} \left( P + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \Psi \right) = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (6.37)$$

が成り立つ。左辺は  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  に直交するので流線と渦線の方に沿ってはゼロになる。よって流線、渦線に沿って積分すると

$$P + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \Psi = \text{一定} \quad (6.38)$$

となる。これをベルヌーイの定理と呼ぶ。注意すべきは各流線、渦線毎に異なる値を持つことである。

また非圧縮流かつ保存力が重力の場合は

$$P = \frac{p}{\rho}, \quad \Psi = gz$$

なので (6.38) は

$$p + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho gz = \text{一定} \quad (6.39)$$

となる。云うまでもないが一定値を取るのは流線または渦線に沿ってである。

この定理の応用として大きな容器に蓄えられた流体の小孔からの流出する場合の流速を求めてみよう。小孔断面積  $S$ , 容器断面積  $S_0$ , 液面降下速度  $v_0$ , 小孔からの流出速度を  $v$  とする。連続の式 (6.18) より  $Sv = S_0v_0$  が成立する。よって  $v_0 = (S/S_0)v \ll v$  である。ここで小孔という言葉の定義より  $v_0$  を無視しても差し支えない。孔から液面迄の高さを  $h$  とすると (6.39) 式から

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad (6.40)$$

となる。但し  $p_0$  は大気圧である。この式から直ちに

$$v = \sqrt{2gh} \quad (6.41)$$

を得る。この式はトリチェリー (Torricelli) の定理として知られている。

## 渦無し流

渦なし流、即ち流れの至る処で  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = 0$  が成り立つ場合にはベルヌーイの定理は以下に示す様に流線、渦線に沿ってという制限がなくなる。後で説明する様に完全流体では渦の発生、消滅がないために渦無しの流れに限定した事で極端に応用し辛くなることはない。



渦なしの流れではポテンシャル  $\Phi$  が存在し,

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi \quad (6.42)$$

と書ける. したがって (6.35) 式は直ちに積分でき

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + P + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \Psi = f(t) \quad (6.43)$$

となる. ここで  $f(t)$  は時間の任意関数である. この式は空間上の至る処で成立するので応用範囲がむしろ今までのベルヌーイの定理より広い. 従って (6.43) を一般化されたベルヌーイの定理と呼ぶ.

## 6.4 渦の諸定理

ベルヌーイの定理はエネルギーの保存則に対応する. 一方角運動量の保存則に対応して完全流体では渦が保存量となり主要な役割を果たす. ここでは完全流体における渦の諸定理を手短に紹介しよう.

### 6.4.1 ケルビンの循環定理

保存力場で循環

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

を考える. ケルビン (Kelvin) の循環定理とは

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (6.44)$$

という式を指す.

**証明** まず考えている閉曲線は時間的に変化しないので

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{D}{Dt}(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) = \oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{Dd\mathbf{s}}{Dt} \quad (6.45)$$

が成り立つ. 一方  $D\mathbf{v}/Dt = -\text{grad}(P + \Psi)$  より (6.45) の第1項は

$$\oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} = - \oint_C \text{grad}(P + \Psi) \cdot d\mathbf{s} = -[P + \Psi]_C \quad (6.46)$$

と積分できる. 但し  $[\dots]$  は閉曲線  $C$  を一周したときの  $\dots$  の値の差であり, 一価関数であればゼロである. 一方 (6.45) の第2項は

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\frac{D\mathbf{s}}{Dt} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \left[ \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right]_C \quad (6.47)$$

となる. (6.46), (6.47) を (6.45) に代入すれば

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \left[ \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - P - \Psi \right]_C \quad (6.48)$$

となるが,  $\mathbf{v}$ ,  $P$ ,  $\Psi$  はいずれも一価関数であるので (6.44) 式が成立する. (証明終わり).

## 6.4.2 ヘルムホルツの渦定理

流れの中に一本の曲線を取り、曲線上の各点を通る渦線によって形成される面を考えよう。これを渦面と呼ぶ。渦面の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると定義から

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.49)$$

が成り立つ。ある時刻  $t$  での渦面  $S$  を考え  $t' > t$  で流体によって運ばれて変形された  $S'$  になるとする。このとき循環は

$$\Gamma(C) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S(C)} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (6.50)$$

を充たす。但しストークスの定理を用いた。一方ケルビンの循環定理により循環はラグランジュ的な保存量であるので

$$\Gamma(C') = \oint_{C'} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S'(C')} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (6.51)$$

を充たす。 $C'$  は面  $S'$  を縁として任意に取れる閉曲線なので  $S'$  上で (6.49) 式が成立する。従って  $S'$  も渦面である。

このようにして渦面は流体運動を通して常に渦面として保たれる。渦管は渦面の一つなので渦管は常に一つの渦管として保たれ、そこでは  $\Gamma = \text{一定}$  となると言い替えることが可能である。これをヘルムホルツ (Helmholtz) の渦定理と呼ぶ。

## 6.4.3 ラグランジュの渦定理

ヘルムホルツの渦定理よりある時刻において渦なしの流れはその後も渦なしの流れであり続け、渦が存在する場合は循環は保存量となって渦は消滅しない。この渦の不生不滅性をラグランジュ (Lagrange) の渦定理と呼ぶ。

以上、紹介した渦定理は完全流体でかつ特異性がない領域において成り立つ定理である。一般には流体は粘性があるのでその領域では渦の生成消滅があるし、完全流体とみなしても翼の先等の特異点では渦の生成消滅はあり得る。またそういう領域を境界層として扱って流体の殆ど領域を特異性のない完全流体として扱うことも空気のように比較的粘性の低い流体の場合にはよく行なわれる。

## 6.5 音波

ここで圧縮性完全流体における波動について簡単に触れることにしよう。圧縮性流体の微小振幅波は音波と呼ばれる。微小振幅なので速度も微小である。従って  $\mathbf{K} = 0$  とした流体方程式 (6.30) に現われる  $\mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v}$  の項は無視できる。同じ理由から流体の密度  $\rho$  や圧力  $p$  についても平衡値  $\rho_0, p_0$  からのずれは小さい。従って

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p' \quad (6.52)$$

となり, 揺らぎ  $\rho', p'$  は  $|\rho'/\rho| \ll 1, |p'/p_0| \ll 1$  に従う.

(6.52) を質量の連続の式 (2.13) 式に代入し線形化すると

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (6.53)$$

となる. 同様に (6.30) に代入すると

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p' = 0 \quad (6.54)$$

を得る.

(6.53), (6.54) 式はまだ閉じていないので (6.32) 式から完全流体では音波は断熱的に伝わることを利用する. このとき

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \rho' \quad (6.55)$$

となる. 但し添字  $s$  は断熱 (等エントロピー) 過程であることを表している. (6.55) を (6.53) に代入すると

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (6.56)$$

を得る.

既に述べた通り完全流体では渦度は保存量である. ここでは渦無しの流れを仮定して  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi$  と書けるとしよう. そうすると (6.54) 式から  $\operatorname{grad} (\partial_t \phi + p'/\rho_0) = 0$  即ち

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (6.57)$$

となる. (6.57) を (6.56) に代入することで波動方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (6.58)$$

に到達する. ここで音速  $c$  は

$$c = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \quad (6.59)$$

で与えられる. この音速は断熱圧縮率を用いて表現しているがよく知られた断熱過程での熱力学関係式  $p \propto \rho^\gamma$ , 但し  $\gamma$  は等圧比熱と等積比熱の比  $\gamma = c_p/c_v$ , を用いて  $(\partial p/\partial \rho)_s = \gamma p/\rho = \gamma RT/M$  と書ける. 但し  $R, M$  は気体定数, 気体の分子量であり理想気体の状態方程式  $p/\rho = RT/M$  を用いた. 結局音速は

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} \quad (6.60)$$

となる.

この様に音波は断熱圧縮の波として伝わる. 完全流体では回転成分は時間変化しないので回転波は存在しない. 従って縦波のみが音波として伝わることになる. 音波は波であるから電磁気学で教わる電磁波の散乱, 放射, 反射, 屈折等は同様の定式化で議論できる. また音速程度で運動している物体では衝撃波等も存在するが紙数の関係上議論することはできない. それらの性質については成書に譲ることにしよう.

# 第7章 渦の動力学

本章では流体の渦の動力学について非圧縮ナビエ・ストークス方程式に基づき概略を紹介する。本章では特に2次元の渦についてやや詳しく解説する。

## 7.1 流体の渦とピオ・サバルの法則

### 7.1.1 渦の従う方程式

外力を伴わない非圧縮のナビエ・ストークス方程式は既に紹介したように

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} \quad (7.1)$$

である。ここで非圧縮条件

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (7.2)$$

と表現される。ここで公式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad}(|\mathbf{v}|^2) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (7.3)$$

及び

$$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad (7.4)$$

を用いると(7.1)から

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \quad (7.5)$$

となる。この結果は外力が保存力である場合も変わらない。

(7.3) 式の証明は以下の通りである。渦度テンソル

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j - \partial_j v_i) \quad (7.6)$$

を導入すると

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = v_j \partial_j v_i = \frac{1}{2} \partial_i (v_j v_j) - 2v_j \Omega_{ij} \quad (7.7)$$

と変形できる。ここで

$$\omega_i = \epsilon_{ijk} \Omega_{jk}; \quad (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})_i = \epsilon_{ijk} v_j \omega_k \quad (7.8)$$

より

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})_i &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} v_j \Omega_{lm} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \Omega_{lm} \\ &= (v_j \Omega_{ij} - v_j \Omega_{ji}) = 2v_j \Omega_{ij} \end{aligned} \quad (7.9)$$

を得る. 但しここで3章で紹介したレビ・チビタ記号の性質と反対称テンソルの性質  $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$  を用いている. ここで (7.7) 式と (7.9) 式を用いることで (7.3) 式は示された.

一般にベクトルはヘルムホルツ (Helmholtz) 分解が可能でありスカラーポテンシャル  $\Phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の寄与の和に分解できる. 従って速度場は

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \mathbf{A} \quad (7.10)$$

恒等式  $\text{rot grad } \Phi = 0$  より  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{A}$  は

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (7.11)$$

と書ける. 電磁気学と同様にポテンシャルは4自由度あり速度場よりも自由度が一つ多くゲージ条件を課す必要がある. ここではクーロンゲージを採用して  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  とすると

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega} \quad (7.12)$$

というポアソン (Poisson) 方程式を得る. 電磁気学でよく知られているようにこの方程式の特解は

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.13)$$

で与えられる. 解の一意性があるのでこの解が境界条件を充たせばこの解のみを考えればよい. 一般に無限媒質ではこの解を考えれば十分であることが知られている. この式から速度場への渦運動からの寄与は

$$\mathbf{v}_\omega = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}' \quad (7.14)$$

となる. 一方  $\Phi$  は恒等式  $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$  及び非圧縮条件 (7.2) より

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (7.15)$$

というラプラス (Laplace) 方程式に従う.

(7.13) が (7.12) の特解であることを示すには

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -4\pi \delta^3(\mathbf{r}) \quad (7.16)$$

を示せば十分である。解の一意性があるのでこの特解が境界条件を充たせば実際の解になっている。電磁気学と同様に無限系ではこの解で十分である。この式は  $r = |\mathbf{r}| \neq 0$  では

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}; \quad \nabla^2 \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0 \quad (7.17)$$

から充たされる。一方  $\mathbf{r} = 0$  を含んだ小球 (半径  $\epsilon$ ) で積分すると、原点近傍では球対称なので  $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d}{dr})$  となるので

$$\int_{\epsilon} d^3\mathbf{r} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 4\pi \int_0^{\epsilon} dr \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \right) = -4\pi \quad (7.18)$$

となる。ここで  $d/dr(1/r)|_{r=\epsilon} = -1/\epsilon^2$  を用いている。(7.17),(7.18) より (7.16) 式が成立する。

一方 (7.14) 式は  $\omega_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$  から容易に確認できる。

(7.14) 式は電磁気学で良く知られるビオ・サバル (Biot-Savart) 則に他ならない。特に断面積  $s$  と  $\omega$  を一定とすると長さ  $\delta l$  の微小渦糸要素のつくる速度場は

$$\delta \mathbf{v} = \frac{\omega s \delta \mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \delta \mathbf{l} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (7.19)$$

と書ける。但し  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  であり  $\boldsymbol{\omega} = \omega \delta \mathbf{l} / |\delta \mathbf{l}|$  である。また

$$\Gamma = \omega s \quad (7.20)$$

は渦糸の強さを表す循環である。このように渦を渦糸として表すのは循環が保存量である完全流体でよく用いられる。粘性率が有限に残る系では渦糸近似は使えず、渦度方程式 (7.5) を用いなければならないが循環が保存量と見做せる時間領域では渦糸近似は物理的な描像を与える有効な近似となっている。

直線渦糸の場合は渦糸からの距離  $h$  の点で観測すると誘導速度の大きさは

$$|\mathbf{v}| = \frac{\Gamma h}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(h^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\Gamma}{2\pi h} \quad (7.21)$$

となる。対称性から明らかに流線は渦糸を中心とする円になるので速度場観測点  $(x, y)$  での  $\mathbf{v} = (u, v)$  は

$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - \eta}{h^2}; \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - \xi}{h^2} \quad (7.22)$$

となる。ここで渦糸の座標は  $(\xi, \eta)$  である。

今までの議論では流体力学の方程式を何処にも使っていないが、出て来た結果が有効であるためには循環を求められることが必要である。一方で6章で示した通り完全流体では循環は保存量であり初期条件で与えられる量となっている。従ってここでの議論が最も有効なのは完全流体であり、以下では完全流体に対する議論を展開していると思って読めばよい。

## 7.2 2次元渦糸系

本節では直線渦糸が平行に分布している系での2次元断面を考える。2次元系では複素関数論の助けを借りると渦糸の運動は非常にきれいな式に書き換えることが可能である。更に循環が一定である完全流体では渦糸群の運動はハミルトン (Hamilton) 系に置き換える事、即ち渦糸の統計力学を考察することが可能である。

### 7.2.1 2次元流と流れ関数

さて流れが2次元平面に拘束されている理想的な状況を考える。このとき速度場、渦度場は

$$\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y), 0); \quad \boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega(x, y)) \quad (7.23)$$

となる。ここで  $\omega(x, y)$  は

$$\omega(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.24)$$

で与えられる。一方、非圧縮流を考えると非圧縮条件 (7.2) は

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.25)$$

となる。(7.25) 式から次の性質を持つ関数  $\Psi(x, y)$  を導入できる。

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (7.26)$$

この  $\Psi$  は  $\Psi = \text{一定}$  の線と流線が一致するために流れ関数と呼ばれる。実際、図のように  $C$  の線素  $ds$  を考え、 $C$  の左から右に向かう法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は

$$\mathbf{n} = \left( \frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) \quad (7.27)$$

となる。ここで  $C$  を左から右に横切る単位時間当たりの流量  $Q$  を考えると

$$Q = \int_O^P (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds = \int ds (un_x + vn_y) \quad (7.28)$$

となる。ここで (7.26), (7.27) を代入すると

$$Q = \int_O^P \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) = \int_O^P d\Psi = \Psi(P) - \Psi(O) \quad (7.29)$$

となる。 $P, O$  が同一の流線にあるときは  $Q = 0$  であるので  $\Psi(P) = \Psi(O)$  が成り立つ。この様に流線に沿って  $\Psi$  は一定であり、 $\Psi$  の等高線を描くことで流れが分かる。また (7.24) に (7.26) を代入すると

$$\omega = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi = -\nabla^2 \Psi \quad (7.30)$$

が成り立つ。

## 7.2.2 2次元流と複素関数論

2次元流では複素関数論を使うと簡略化された記述が可能になる。(7.22)式から

$$u - iv = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - \eta + i(x - \xi)}{h^2} \quad (7.31)$$

ここで

$$z = x + iy; \quad z_0 = \xi + i\eta \quad (7.32)$$

を導入し, 複素共役量を  $z^* = x - iy$  で表すと

$$h^2 = (z - z_0)(z^* - z_0^*); \quad y - \eta + i(x - \xi) = i(z^* - z_0^*) \quad (7.33)$$

となり,

$$\frac{dz^*}{dt} \equiv u - iv = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{(z - z_0)} \quad (7.34)$$

と書ける. ここで複素ポテンシャル  $W$  を

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) \quad (7.35)$$

を導入すると (7.34) 式は

$$\frac{dz^*}{dt} = \frac{dW}{dz} \quad (7.36)$$

と書ける. (7.34) は渦糸が  $z_0$  にあるときの位置  $z$  での速度場を与えている.

この渦糸による誘導速度を渦糸群に適用できる. 線形方程式の重ね合わせの性質を用いると渦糸  $j$  の運動方程式は

$$\frac{dz_j^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{\Gamma_k}{z_j - z_k} \quad (7.37)$$

となる.

## 7.2.3 渦糸群の正準方程式

(7.37) 式は正準方程式に焼き直す事が可能である. 実際ハミルトニアン  $H$  を

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j,k} \Gamma_j \Gamma_k \ln |z_j - z_k| \quad (7.38)$$

を導入すると

$$\frac{\partial H}{\partial z_j} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{z_j - z_k} = -\frac{i}{2} \Gamma_j \frac{dz_j^*}{dt} \quad (7.39)$$

となるので (7.37) は

$$\Gamma_j \frac{dz_j^*}{dt} = 2i \frac{\partial H}{\partial z_j} \quad (7.40)$$



と書き換えられる. ここで  $\partial_{z_j} = (\partial_{x_j} - i\partial_{y_j})/2$  に注意して<sup>1</sup> (7.40) の実部と虚部をそれぞれ書くと

$$\Gamma_j \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_j}; \quad \Gamma_j \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (7.41)$$

となる. この式は解析力学で現われる正準方程式と同じ形をしている.

渦糸系を正準方程式に書き直すと直ちに幾つかの保存則があることが分かる.

## エネルギー保存則

古典力学ではエネルギーはハミルトニアンそのものである. ここで

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \left( \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dt} \right) = 0 \quad (7.42)$$

となる. 最後の等式では (7.41) 式を代入している. この様に渦糸系のエネルギーは保存する.

## 運動量の保存則

$\Gamma_j$  を質量,  $z_j$  を速度と解釈すると正準方程式は質点系の運動方程式と等価になる. このときハミルトニアンが並進不変であることから (並進) 運動量が保存することを直ちに導くことができる.

実際  $\{z\} = (z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_N)$  として仮想変位  $\{z_j\} \rightarrow \{z_j + \delta z\}$  を考えると

$$\delta H = \sum_j \frac{\partial H}{\partial z_j} \delta z = -\frac{i}{2} \sum_j \Gamma_j \frac{dz_j^*}{dt} \delta z = 0 \quad (7.43)$$

となる. 従って

$$\sum_j \Gamma_j z_j^* = \text{一定} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_j \Gamma_j z_j = \text{一定} \quad (7.44)$$

が導かれる.  $\Gamma_j$  を質量,  $z_j$  を速度と解釈しているので (7.44) 式は運動量の保存則に他ならない.

上記の「運動量の保存則」は渦糸系の観測量では渦糸群の重心位置が変化しない事を意味する. 実際  $\sum_j \Gamma_j \neq 0$  であれば

$$\frac{\sum_j \Gamma_j z_j}{\sum_j \Gamma_j} = \text{一定} \quad (7.45)$$

となる. 勿論  $z_j$  は渦糸の位置である.

---

<sup>1</sup>  $z = x + iy, z^* = x - iy$  に対して  $\partial_x = \partial_x z \partial_z + \partial_x z^* \partial_{z^*} = \partial_z + \partial_{z^*}$  が成立. 同様に  $\partial_y = i(\partial_z - \partial_{z^*})$  であるので  $\partial_x + i\partial_y = 2\partial_{z^*}, \partial_x - i\partial_y = 2\partial_z$  となる.

## 慣性モーメントと角運動量の保存則

ハミルトニアンは回転対称性を持つので慣性モーメントや角運動量保存則を持つ。実際3軸周りで $\delta\theta$ 回転させてみる。

$$\delta x = -y\delta\theta, \quad \delta y = x\delta\theta \quad (7.46)$$

となるので

$$\delta H = \sum_j \left( \frac{\partial H}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial H}{\partial y_j} \delta y_j \right) = \delta\theta \sum_j \Gamma_j \left( y_j \frac{dy_j}{dt} + x_j \frac{dx_j}{dt} \right) = 0 \quad (7.47)$$

と書ける。ここで(7.41)式を用いた。よって

$$\sum_j \Gamma_j (x_j^2 + y_j^2) = \text{一定} \quad (7.48)$$

となる。これは慣性モーメントの存在を意味する。

また系全体を $1 + \delta\lambda$ 倍したとき、 $\delta\lambda \ll 1$ として $\delta z_j = z_j \delta\lambda$ だからハミルトニアンの変化は(7.38)式より

$$\delta H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j,k} \Gamma_j \Gamma_k \ln(1 + \delta\lambda) \simeq -\frac{\delta\lambda}{4\pi} \sum_{j,k} \Gamma_j \Gamma_k \quad (7.49)$$

となる。

またこのスケール変換を施すと

$$\delta H = \sum_j \left( \frac{\partial H}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial H}{\partial y_j} \delta y_j \right) = -\delta\lambda \sum_j \Gamma_j (\dot{y}_j x_j - \dot{x}_j y_j) \quad (7.50)$$

となる。従って

$$\sum_j \Gamma_j (x_j \dot{y}_j - \dot{x}_j y_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j,k} \Gamma_j \Gamma_k \quad (7.51)$$

が成り立つ。右辺は保存量なので $\sum_j \Gamma_j (x_j \dot{y}_j - \dot{x}_j y_j)$ も保存する。この式は角運動量の保存則を意味する。

## 7.3 渦糸群の運動

### 7.3.1 2個の渦糸の運動

ここでは2つの渦糸の運動を論じてみよう。ハミルトニアンは

$$H = -\frac{1}{2\pi} \Gamma_1 \Gamma_2 \ln |z_1 - z_2| \quad (7.52)$$

で与えられる。エネルギー保存則の帰結として渦糸間の距離 $d \equiv |z_1 - z_2|$ は一定に保たれる。

$\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$  のとき (7.45) から渦糸の重心

$$z_G = \frac{\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (7.53)$$

は動かない.

以下で2つの渦糸はこの重心の周りで回転運動することを示そう. 渦糸1と2は対称なので片方について論じれば十分である. まず渦糸1と重心の距離は

$$|z_1 - z_G| = \frac{\Gamma_2 d}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (7.54)$$

で一定である. 一方 (7.34) 式から

$$|\dot{z}_1|^2 = \frac{\Gamma_2^2}{4\pi d^2} \Rightarrow |\dot{z}_1| = \frac{\Gamma_2}{2\pi d} \quad (7.55)$$

である. よって渦糸1は重心の回りを角速度

$$\frac{|\dot{z}_1|}{|z_1 - z_G|} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi d^2} \quad (7.56)$$

で回転する.

一方  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$  とすると重心が定義できなくなる. こういう2つの渦糸を渦対と言う. 以下で渦対の運動を簡単に紹介しよう.

(7.34) 式から個々の渦糸の運動方程式は

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma}{z_1^* - z_2^*}, \quad \frac{dz_2}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma}{z_1^* - z_2^*} \quad (7.57)$$

となる. エネルギー保存則から  $|z_1 - z_2| = d$  を保つので

$$|\dot{z}_1| = |\dot{z}_2| = \frac{\Gamma}{2\pi d} \quad (7.58)$$

で移動する. 例えば初期条件として  $x_2 - x_1 = d, y_1 = y_2$  とすると渦対の運動方程式は

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi i d} \quad (7.59)$$

となる.  $\dot{z}_i = u_i + v_i$  ( $i = 1, 2$ ) だから

$$u_i = 0, \quad v_i = \frac{\Gamma}{2\pi d} > 0 \quad (7.60)$$

という速度を持つ. このように渦対は  $y$  軸方向に一定速度  $\Gamma/(2\pi d)$  で動く.

### 7.3.2 単純渦列とその安定性

$z = z_0$  を中心にして間隔  $l$  で並んでいる一列の渦列を考える. この渦列の複素ポテンシャルは

$$\begin{aligned} W &= \frac{\Gamma}{2\pi i} [\ln(z - z_0) + \ln(z - z_0 - l) + \ln(z - z_0 + l) + \cdots] \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} [\ln(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \ln[(z - z_0)^2 + k^2 l^2]] \end{aligned} \quad (7.61)$$

となる. ここで公式

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \quad (7.62)$$

を用いると

$$\ln \sin \left( \frac{\pi(z - z_0)}{l} \right) = \ln(\pi/l) - \sum_k \ln(-k^2 l^2) + \ln(z - z_0) + \sum_k \ln[(z - z_0)^2 - k^2 l^2] \quad (7.63)$$

となるので定数  $W_0 \equiv \Gamma/(2\pi i) [\sum_k \ln(-k^2 l^2) - \ln(\pi/l)]$  を導入すると (7.61) 式から複素ポテンシャルは

$$W = W_0 + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \sin \left( \frac{\pi(z - z_0)}{l} \right) \quad (7.64)$$

と書ける. 従って  $z$  での複素速度は (7.61) から

$$u - iv = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[ \frac{1}{z - z_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z - z_0 - kl} + \frac{1}{z - z_0 + kl} \right\} \right] \quad (7.65)$$

となる.

(7.65) 式の分母がゼロになる渦糸の位置での速度ではそれ以外の寄与を足すことになる. 例えば  $z = z_0$  では和の寄与のみであるが

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{kl} - \frac{1}{kl} \right\} = 0 \quad (7.66)$$

となるので渦列の重心は動かない.

この1列に並んだ渦列の安定性を議論してみよう.<sup>2</sup> 基準点を  $(ma, 0)$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) とおき, それに対する摂動

$$z_m \equiv (ma + x_m, y_m) \quad (7.67)$$

に並んだ渦列がどういう動きをするかを論じる. 但し  $|x_m| \ll a, |y_m| \ll a$  を充たすとする.

(7.65) 式から  $z_0$  での渦の速度は

$$z_0^* = \frac{\Gamma}{2\pi i} \sum_{m=\pm 1}^N \frac{1}{z_0 - z_m} \quad (7.68)$$

<sup>2</sup> 間隔が  $a$  に変わっている.

となる. ここで  $r_m^2 \equiv (x_0 - x_m - ma)^2 + (y_0 - y_m)^2 = |z_0 - z_m|^2$  としたとき (7.69) の実部は

$$\dot{x}_0 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \sum_m \frac{y_0 - y_m}{r_m^2}, \quad (7.69)$$

虚部は

$$\dot{y}_0 = \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_m \frac{x_0 - x_m - ma}{r_m^2} \quad (7.70)$$

となる. ここで  $|x_m/a| \ll 1$ ,  $|y_m/a| \ll 1$  を用いて線形化すると (7.69), (7.70) はそれぞれ

$$\dot{x}_0 = -\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_m \frac{y_0 - y_m}{m^2} \quad (7.71)$$

及び

$$\dot{y}_0 = -\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_m \frac{x_0 - x_m}{m^2} \quad (7.72)$$

となる. 但しここで  $\sum_{m=\pm 1} 1/m = 0$  を用いている.

ここで

$$\begin{aligned} r_m^{-2} &= (ma)^{-2} \left\{ \left( 1 - \frac{x_0 - x_m}{ma} \right)^2 + \left( \frac{y_0 - y_m}{ma} \right)^2 \right\}^{-1} \\ &\simeq (ma)^{-2} \left\{ 1 - \frac{2(x_0 - x_m)}{ma} + \dots \right\} \\ &\simeq \frac{1}{(ma)^2} + \frac{2(x_0 - x_m)}{m^3 a^3} + \dots \end{aligned} \quad (7.73)$$

を用いている.

ここで

$$x_m = \alpha e^{im\phi}, \quad y_m = \beta e^{im\phi} \quad (7.74)$$

として  $\dot{x}_0 = \dot{\alpha}$ ,  $\dot{y}_0 = \dot{\beta}$  に注意すると (7.71) 式は

$$\dot{\alpha} = -\frac{\Gamma\beta}{\pi a^2} \left( 1 - \cos\phi + \frac{1 - \cos 2\phi}{2^2} + \frac{1 - \cos 3\phi}{3^2} + \dots \right) \quad (7.75)$$

となる. 更に公式

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\phi}{n^2} = \frac{1}{4}(\phi - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad (7.76)$$

を用いて

$$\dot{\alpha} = -\lambda\beta; \quad \lambda = \frac{\Gamma}{4\pi a^2} \phi(2\pi - \phi) \quad (7.77)$$

となる. 同様に (7.72) 式に (7.74) を代入して

$$\dot{\beta} = -\lambda\alpha \quad (7.78)$$

を得る.  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  より (7.77), (7.78) 式において任意の実数  $\phi$  に対して  $\lambda < 0$  より直線上に並んだ渦列は不安定である.

### 7.3.3 カルマン渦列

前節で見た様に1列に並んだ渦列は不安定であった。では2列に並んだ渦列はどうであろうか。多くの教科書で示されているように2列の渦の位置が同じ処に並ぶ平行渦列は不安定である。一方平行渦列が互い違いの位置に並ぶと安定になることがある。この渦列はカルマン (Karman) 渦列として知られ、渦音等の現象でも知られている。面白い例では北西の季節風が強い冬に済州島の南東に並ぶ雲がきれいなカルマン渦を描く。カルマンが示したのは互い違いの渦列が間隔

$$\cosh\left(\frac{\pi b}{a}\right) = \sqrt{2} \quad (7.79)$$

の時のみに渦列が安定になることである。ここで  $a$  は渦列に沿っての渦の間隔であり、 $b$  は2つの平行渦列の間隔である。

図の様な渦列を考える。上の渦列における摂動を  $(x_m, y_m)$  として下の渦列における摂動を  $(x_n', y_n')$  とする。  $m=0$  の上の列にある渦について考え、その摂動を  $(x_0, y_0)$  とする。このとき渦の速度  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$  は  $x$  方向の平衡速度  $U$  と上の渦列からの誘導速度  $(\dot{x}_{0u}, \dot{y}_{0u})$ 、下の渦列からの誘導速度  $(\dot{x}_{0l}, \dot{y}_{0l})$  の合成で決まる:

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_{0u} + \dot{x}_{0l} + U, \quad \dot{y}_0 = \dot{y}_{0u} + \dot{y}_{0l}. \quad (7.80)$$

前節の (7.71), (7.72) と同様に上の渦列からの寄与は

$$\dot{x}_{0u} + U \simeq -\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_m \frac{y_0 - y_m}{m^2}, \quad \dot{y}_{0u} \simeq -\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_m \frac{x_0 - x_m}{m^2} \quad (7.81)$$

となる。

次に下の渦列からの寄与を考える。同様に

$$\dot{x}_{0l} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \sum_n \frac{y_0 - y_n' + b}{r_n^2} \quad (7.82)$$

$$\dot{y}_{0l} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \sum_n \frac{x_0 - x_n' - a(n + \frac{1}{2})}{r_n^2} \quad (7.83)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} r_n^{-2} &= \left\{ \left( a\left(n + \frac{1}{2}\right) + x_n - x_0 \right)^2 + \left( y_0 - y_n' + b \right)^2 \right\}^{-1} \\ &\simeq \frac{1}{b^2 + a^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \left[ 1 - \frac{2a\left(n + \frac{1}{2}\right)(x_0 - x_n')}{b^2 + a^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2b(y_0 - y_n')}{b^2 + a^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (7.84)$$

である。従って  $k = b/a$  を導入すると (7.82) 式は

$$\dot{x}_{0l} \simeq \frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_n \left[ \frac{b}{k^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{(2n+1)k(x_0 - x_n')}{(k^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2)^2} + \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - k^2}{(k^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2)^2} (y_0 - y_n') \right] \quad (7.85)$$

となる. 同様に (7.83) は

$$\dot{y}_{0l} \simeq \frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_n \left[ \frac{k^2 - (n + \frac{1}{2})^2}{(k^2 + (n + \frac{1}{2})^2)^2} (x_0 - x_n') + \frac{(2n + 1)k(y_0 - y_n')}{(k^2 + (n + \frac{1}{2})^2)^2} \right] \quad (7.86)$$

となる.

上の渦列と下の渦列の寄与を合わせると

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 + U &= -\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_m \frac{y_0 - y_m}{m^2} + \\ &\quad \frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_n \left[ \frac{b}{k^2 + (n + \frac{1}{2})^2} + \frac{(2n + 1)k(x_0 - x_n')}{(k^2 + (n + \frac{1}{2})^2)^2} + \frac{(n + \frac{1}{2})^2 - k^2}{(k^2 + (n + \frac{1}{2})^2)^2} (y_0 - y_n') \right] \\ \dot{y}_0 &= -\frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_m \frac{x_0 - x_m}{m^2} + \\ &\quad \frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_n \left[ \frac{k^2 - (n + \frac{1}{2})^2}{(k^2 + (n + \frac{1}{2})^2)^2} (x_0 - x_n') + \frac{(2n + 1)k(y_0 - y_n')}{(k^2 + (n + \frac{1}{2})^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (7.87)$$

となる. ここで公式

$$\sum_n \frac{1}{k^2 + (n + \frac{1}{2})^2} = \frac{\pi}{k} \tanh \pi k \quad (7.88)$$

を用いて並進速度は

$$U = \frac{\Gamma}{2a} \tanh \pi k = \frac{\Gamma}{2\pi a^2} \sum_n \frac{1}{k^2 + (n + \frac{1}{2})^2} \quad (7.89)$$

によって吸収できる.

(7.88) について: 岩波公式集には

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2n - 1)^2} = \frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \quad (7.90)$$

が載っている. ここで

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2n + 1)^2} &= \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{x^2 + (2n + 1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2n + 1)^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2n + 1)^2} = \frac{\pi}{2x} \tanh \frac{\pi x}{2} \end{aligned} \quad (7.91)$$

なので

$$\sum_n \frac{1}{k^2 + (n + \frac{1}{2})^2} = \sum_n \frac{4}{(2k)^2 + (2n + 1)^2} = \frac{\pi}{k} \tanh \pi k \quad (7.92)$$

が成り立つ. これは (7.88) に他ならない.

ここで

$$\begin{aligned} x_m &= \alpha e^{im\phi}, & y_m &= \beta e^{im\phi} \\ x_n' &= \alpha' e^{i(n+\frac{1}{2})\phi}, & y_n' &= \beta' e^{i(n+\frac{1}{2})\phi} \end{aligned} \quad (7.93)$$

とおき

$$\begin{aligned} A &\equiv \sum_m \frac{1 - e^{im\phi}}{m^2} - \sum_n \frac{(n + \frac{1}{2})^2 - k^2}{((n + \frac{1}{2})^2 + k^2)^2} = \frac{\phi}{2}(2\pi - \phi) - \frac{\pi^2}{\cosh^2 k\pi} \\ B &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(2n+1)ke^{i(n+\frac{1}{2})\phi}}{((n + \frac{1}{2})^2 + k^2)^2} = i \left[ \frac{\pi\phi \sinh k(\pi - \phi)}{\cosh k\pi} + \frac{\pi^2 \sinh k\phi}{\cosh^2 k\pi} \right] \\ C &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{((n + \frac{1}{2})^2 - k^2)e^{i(n+\frac{1}{2})\phi}}{((n + \frac{1}{2})^2 + k^2)^2} = \frac{\pi^2 \cosh k\phi}{\cosh^2 k\pi} - \frac{\pi\phi \cosh k(\pi - \phi)}{\cosh k\pi} \end{aligned} \quad (7.94)$$

とする. (7.87), (7.89), (7.93), (7.94) より

$$\frac{2\pi a^2}{\Gamma} \dot{\alpha} = -A\beta - B\alpha' - C\beta' \quad (7.95)$$

を得る. 但し  $\sum_n \frac{2n+1}{((n+\frac{1}{2})^2+k^2)^2} = 0$  を使った. 同様に

$$\frac{2\pi a^2}{\Gamma} \dot{\beta} = -A\alpha - C\alpha' + \beta'B \quad (7.96)$$

となる.

同様に下の列の渦糸の摂動解が受ける力を考えることで

$$\frac{2\pi a^2}{\Gamma} \dot{\alpha}' = A\beta' - B\alpha + C\beta \quad (7.97)$$

$$\frac{2\pi a^2}{\Gamma} \dot{\beta}' = A\alpha' + C\alpha + B\beta \quad (7.98)$$

を得る. (7.95)-(7.98) が摂動解の発展を決める方程式である.

(7.95)-(7.98) には2つのタイプの解がある. タイプ (i) は

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = -\beta' \quad (7.99)$$

であり, タイプ (ii) は

$$\alpha = -\alpha', \quad \beta = \beta' \quad (7.100)$$

である.

(7.99) 式のタイプ (i) では (7.95)-(7.98) は

$$\begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\Gamma} \dot{\alpha} &= -B\alpha - (A - C)\beta \\ \frac{2\pi a^2}{\Gamma} \dot{\beta} &= -(A + C)\alpha - B\beta \end{aligned} \quad (7.101)$$



となる.  $\alpha, \beta$ が  $e^{\lambda t}$  に比例するとして可解条件を求めると

$$\frac{2\pi a^2}{\Gamma} \lambda = -B \pm \sqrt{A^2 - C^2} \quad (7.102)$$

となる. 同様にタイプ (ii) でも

$$\frac{2\pi a^2}{\Gamma} \lambda = -B \pm \sqrt{A^2 - C^2} \quad (7.103)$$

という同じ結果を得る. 渦列が安定になる必要十分条件は  $Re[\lambda] \leq 0$  である. (7.94) から  $B$  は純虚数,  $A, C$  は実数なので安定条件は  $A^2 - C^2 \leq 0$  である.  $\phi = \pi$  とすると  $C$  が最小値  $C = 0$  となる. よって

$$A^2 - C^2 \geq A^2(\phi = \pi) = \left( \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{\cosh^2 k\pi} \right)^2 \geq 0 \quad (7.104)$$

となる. 従って渦列は

$$\cosh^2 k\pi = 2 \quad (7.105)$$

の時のみ中立安定となる. この式が (7.79) 式で示したカルマン渦の存在条件となっている.

## 参考文献

ここではこの講義ノートを書く際に用いた参考文献を列挙する.

1. 巽友正、流体力学 (培風館, 1982)
2. 巽友正、連続体力学 (岩波)
3. ランダウ=リフシッツ、流体力学 1,2 (東京図書 1970, 1971 竹内均訳)
4. ランダウ=リフシッツ、弾性論 (東京図書 1972, 佐藤常三訳)
5. 田代嘉宏、テンソル解析 (裳華房, 1982)
6. 川原琢治、連続体力学 (産業図書)
7. 戸田盛和、波動と非線形問題 30 講 (朝倉 1995)
8. Sir Horace Lamb, Hydrodynamics (Dover 1945) originally published in 1879 from Cambridge University Press.