近似とその誤差

北野正雄
電気電子工学科

平成 18 年 4 月 18 日

1　誤差の評価

質問が集中した式 (3)(自然現象と数学 2006) の近似について詳しく調べてみよう;

$$f(\Delta t) \sim (1 + a\Delta t)f(0). \tag{1}$$

両辺を等号でむすぶために, 残差を表す項を含めて

$$f(\Delta t) = (1 + a\Delta t)f(0) + o(a\Delta t)f(0) \tag{2}$$

と表す. $o(a\Delta t)$ は $a\Delta t$ の 2 次以上の項からなり, $\tau = a\Delta t$ をゼロに近づけるときに, τ より急速にゼロに近づく. 式で表すと,

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{o(\tau)}{\tau} = 0 \tag{3}$$

となる. このような性質をもつ量をその具体的な表式にかかわらず $o(\tau)$ と表すことにする. $(1 + \tau)o(\tau) = o(\tau)$, $2o(\tau) = o(\tau)$, $(1 + o(\tau))o(\tau) = o(\tau)$ などが成り立つことに注意する.

この記号を用いると, $f(k\Delta t)$ と $f((k-1)\Delta t)$ の関係は

$$f(k\Delta t) = [1 + a\Delta t + o(a\Delta t)]f((k-1)\Delta t) \tag{4}$$

と表せる. ただし, $1 \le k \le N$. k 個の式を両辺それぞれかけることによって次式が得られる:

$$\begin{aligned} f(N\Delta t) &= [1 + a\Delta t + o(a\Delta t)]^N f(0) \\ &= (1 + a\Delta t)^N f(0) + No(a\Delta t)f(0) \end{aligned} \tag{5}$$

a, t を固定すると, $N = t/\Delta t = at/(a\Delta t)$ は $a\Delta t$ に反比例して増大することが分る. しかし,

$$No(a\Delta t) = at\frac{o(a\Delta t)}{a\Delta t} \to 0 \quad (a\Delta t \to 0) \tag{6}$$

が成り立つので, $a\Delta t$ をゼロに近づけると, すなわち N を大きくするといくらでも小くすることができる. N が大きくなる効果より, $o(a\Delta t)$ が小さくなる効果が支配的でなのである. この結果

$$f(t) = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{at}{N}\right)^N f(0) = f(0)\mathrm{e}^{at} \tag{7}$$

が成り立つことが確認できる.

2 無限小の位数とランダウの記号

x をゼロに近づける場合, x^2 は x の大きさに比べて素早く小さくなる. $x = 0.1$ に対して $x^2 = 0.01$ は x の $1/10$ であるが, $x = 0.01$ に対しては $x^2 = 0.0001$ で x の $1/100$ に過ぎない. $1000x^2$ のように大きい係数がついている場合でも, x を 0.001 より十分小くとれば, 無視できる量になる.

ゼロに収束する小さい量 (無限小) 同士の大きさを比較することは重要である. $f(x)$, $g(x)$ が $x \to a$ でいずれもゼロに収束する量であるとする.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{8}$$

が成り立つとき, $f(x)$ は $g(x)$ に比べて無視できる, あるいは, $f(x)$ は $g(x)$ に比べて高位 (higher order) の無限小であるといい

$$f(x) \ll g(x) \quad (x \to a) \tag{9}$$

と表す. 先の例は $1000x^2 \ll x$ $(x \to 0)$ と表すことができる. また,

$$x^2 \ll x \ll \sqrt{|x|} \quad (x \to 0) \tag{10}$$

などがなりたつ. 固定された x に対する大小関係ではなく, x が a に近づく際の動的な振舞を表していることに注意する. この事情は正確には, 悪名高い ϵ-δ 論法を用いて

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : |x-a| \le \delta \Rightarrow |f(x)| \le \epsilon|g(x)| \tag{11}$$

と表すことができる.

無限小の別の比較として,

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < +\infty \tag{12}$$

が成り立てば, $f(x)$ は $g(x)$ で抑えられる, あるいは, $f(x)$ は高々 $g(x)$ のオーダであるといい

$$f(x) \preccurlyeq g(x) \quad (x \to a) \tag{13}$$

と表す．たとえば, $\sin x - x \preccurlyeq x^2$, $3x + 100x^2 \preccurlyeq x$ が成り立つ．比が有限に留まればよいだけなので, $1000x \preccurlyeq x$ $(x \to)$ などが成り立つことに注意する．ϵ-δ では

$$\exists K > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq K|g(x)| \tag{14}$$

さて, $f(x) \preccurlyeq g(x)$, $f(x) \ll g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) \in O(g(x)), \quad f(x) \in o(g(x)) \quad (x \to a) \tag{15}$$

と表す場合もある．ランダウの記法という．$O(g)$, $o(g)$ は個別の関数ではなく, それぞれ上の条件を満たす関数のクラスを表していることに注意する．したがって, $e^x = 1 + x + r(x)$, $r(x) \in O(x^2)$ $(x \to 0)$ などとするのが正しいのであるが, $r(x)$ の具体的な形に関心がなく, いちいち記号を割り当てるのも面倒なので, $e^x = 1 + x + O(x^2)$ $(x \to 0)$ と書いてしまうことが多い．さらには,「$r_1(x) \in O(x)$, $r_2(x) \in o(x)$ なら $r_1(x) + r_2(x) \in O(x)$」を $O(x) + o(x) = O(x)$ など書く大胆な省略記法が用いられる．集合とその要素を混同しているために, 通常の関数とは大いに異なった計算ルールに従うので注意が必要である．

$$O(g_1) + O(g_2) = O(\max(g_1, g_2)) \tag{16}$$
$$O(g_1)O(g_2) = O(g_1 g_2) \tag{17}$$
$$cO(g) = O(g) \tag{18}$$
$$o(g_1) + o(g_2) = o(\max(g_1, g_2)) \tag{19}$$
$$o(g_1)O(g_2) = o(g_1 g_2) \tag{20}$$
$$co(g) = o(g) \tag{21}$$
$$o(g) = O(g) \tag{22}$$

ただし, c は定数である．

2 つの無限小 $f(x)$, $g(x)$ が $f(x) - g(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ を満たすとき

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to a) \tag{23}$$

と表し, 漸近的に等しいという．$f \sim g$ なら $g \sim f$, $f \sim g$ かつ $g \sim h$ なら $f \sim h$ である．

無限大の位数に関しても同様の議論と記法が用いられる．