

微分方程式超入門

北野正雄

kitano@kuee.kyoto-u.ac.jp.

工学部電気電子工学科

微分方程式

- 微分方程式は時間 (あるいは空間) 変化の「法則」を式で表したものの.
- 通常, 法則は多くの観察例からそれらに共通する特徴を抽出したものである.
(例) フレミングの法則, マーフィーの法則
- しかしここでの「法則」はもっと強力なものであり, 系の振舞を完全に規定するものである.
- 初期値を与えて, 微分方程式を解けば, 系の時間変化を知ることができる.
- 微分方程式は
 - 自然 (の一部) を紙の上や計算機の中で再現する手段
 - 自然 (人工物をふくむ) を記述する言語

漸化式

- 漸化式 (隣接 2 項) の一般形

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

- 次の値 x_{n+1} が今の値 x_n で決るので, 初期値 x_0 を決めれば, $x_2, x_3, \dots$ とつぎつぎに求めることができる:

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(f(x_0)), \quad x_3 = f(f(f(x_0))), \dots$$

差分方程式

- 漸化式を書き直すと,

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n = g(x_n)$$

次との差 $x_{n+1} - x_n$ が今の値 x_n で決まるという形になる.

- これを差分方程式という.
- 離散時間 $t = n\Delta t$ に対する微分方程式と考えることができる: $x_n = x(n\Delta t)$.
- 差分方程式の両辺を Δt で割って, $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると微分方程式になる

$$x' = G(x)$$

2階の方程式

- 漸化式 (隣接3項)

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$$

は初期値 x_0, x_1 を決めれば解くことができる.

- 差分方程式の形に変形することができる.

$$\begin{aligned}(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) &= f(x_{n+1}, x_n) - 2x_{n+1} + x_n \\ &= g(x_{n+1}, x_n) = h(x_{n+1} - x_n, x_n)\end{aligned}$$

- 初期値 x_0 , 初期差分 $x_1 - x_0$ を与えると解くことができる.
- これは2階微分方程式に相当する.

$$x'' = H(x', x)$$

$x(0), x'(0)$ が初期値となる.

微分方程式の分類

- 微分方程式にはさまざまなタイプのものがある。主な分類は

線形	非線形
同次	非同次
時不変	時変
1 階	高階
単独	連立
常微分	偏微分

- ここで扱うのは 1(2) 階, 線形, 時不変, 単独, 常微分方程式であり, 全体から見ると極めて特殊であるが, 他のタイプを調べる上での基本となるもので大変重要である.

解の存在と一意性

- 「任意の初期値に対してただひとつの解が存在する。」
- この定理の前提として、微分方程式はある条件を満たす必要があるが、この条件は通常出会うほとんどの微分方程式に対して成り立っている。