自然現象と数学 工学部電気電子工学科 2007 年度版より抜粋

テスタを用いた微分方程式の実験

電気回路をはじめとする物理系の時間変化 (運動) は微分方程式によって簡潔に記述することができる[1]. ここでは, 簡単な 1 階の線形微分方程式にしたがう実際の系を実験, 観測し, その運動が方程式の解とよく一致することを確かめよう. 特に, 理論で学んださまざまな概念 (特性指数, 一般解, 特殊解, 初期条件など) が実際の系でどのように現われているか注意して見ていこう.

1 大きなキャパシタの計測

ここでは, 実際の CR 回路の過渡特性を測定し, その結果にもとづいて素子定数 (キャパシタンス) の推定を行う。

1.1 各自持参するもの

1 グラフ用紙
2 関数電卓

1.2 配布されるもの

1 アナログテスタ
2 電気 2 重層コンデンサ (1 F 程度)
3 抵抗 $22\,\Omega$, あるいは $33\,\Omega$
4 LED (発光ダイオード)
5 時計またはメトロノーム
6 予備電池 (テスタ用)
7 ドライバ (+)

1.3 予備実験

テスターの抵抗レンジは, 内部の電池 E により測定対象の抵抗 R_{x} に電圧を加え, 流れる電流 $j = E/(R_{\mathrm{m}} + R_{\mathrm{x}})$ を電流計に表示し, R_{x} を知ろうとするものである. R_{m} は内部抵抗で, レンジによって異なる. $0\,\Omega$ -ADJ つまみは, 電流計の感度を変化させ, 電池の電圧変化を補償する. レンジを切替えるたびに, プローブを短絡して $0\,\Omega$ -ADJ つまみにより $0\,\Omega$ の位置に針を合わせなければならない.

[1] 高校の物理で習ったニュートンの運動方程式は実は微分方程式である.

課題 1 抵抗レンジを用いて, 与えられた抵抗を測定せよ. いくつかのレンジで測定し, 結果を比較せよ.

課題 2 抵抗レンジに対する目盛について考察せよ. なぜ左端が $\infty\,\Omega$, 右端が $0\,\Omega$ か. 目盛が等間隔でないのはなぜか.

課題 3 抵抗レンジを用いて LED の抵抗を測定せよ. レンジを変えたり, プローブの接続の向き (極性) を変えて測定せよ. 以下の疑問について班の内外で議論せよ. 極性により抵抗が変わるのはなぜか? (LED の足の長い方の端子は, アノードである.) どちらのプローブ (赤, 黒) に正の電圧が出ていると思われるか?

1.4 実験

通常のキャパシタの容量は 10^{-12}〜10^{-3} F 程度であるが, 最近消費電力の小さな電子回路に直流電圧を供給する目的などに電気二重層コンデンサ（いわゆるスーパーキャパシタ）という大容量のキャパシタが使われるようになった. その容量は 0.1 〜 10 F 程度と非常に大きく, 蓄電池と同様に使うことができる. ただし内部直流抵抗が大きいため, 素子自体を CR 直列回路とみなして取り扱う必要がある. 以下の手順で 1 F の電気二重層コンデンサを充電し, 放電時の電流変化をテスターで読み取って放電特性を測定せよ.

課題 4 テスターを $\times 1\,\Omega$ の抵抗レンジに設定し, プローブを短絡して $0\,\Omega$ -ADJ つまみにより $0\,\Omega$ の位置に針を合わせる. 次に, **＋プローブ（赤色）をキャパシタのー端子（▽ 印の下側）**, −プローブ（黒色）を＋端子に約 10 秒間接続する. この時に表示される最小の抵抗値 R_o を読み取っておく. 向きを間違えないこと（なぜこういう向きに接続するのか？）

課題 5 テスターを 3 V の直流電圧レンジに切り替え, プローブの正負を入れ替えて（−プローブをキャパシタの−端子に, ＋プローブを＋端子につないで）表示される電圧値 V_o を読み取り, 記録する（電圧が安定するまで数秒間待つこと）.

課題 6 テスターを 30 mA の直流電流レンジに切り替え, 表示される電流値を **2 秒毎に** 1〜2 分間読み取り, 記録する. あらかじめ操作, 計時, 読み取り, 記録と分担を定めておき, 正確に読み取れるまで充放電の手順を繰り返す. 最初の 10 秒間程度の値は慣れないとうまく測定できない. 他班の迷惑にならないよう, 大きな声をあげないこと. また, 実験を繰り返す場合はキャパシタが十分放電するまで（2〜3 分）電流レンジを保持してから行うこと.

1.5 解析

課題 7 電気二重層コンデンサを CR 直列回路と考え, C を直流電圧 V_o に充電した後回路を閉じた場合の電流 i を表す式を求めよ.

課題 8 上で求めた式を用いると, 任意の 2 時刻の電流測定値から, 素子の時定数 CR が決定できる. さまざまな時刻の測定値を用いてこの値を求め, どういう時刻の測定値を使うのがよいか, また用いる測定値によって結果に差が生じるのはなぜかを考察せよ. この値と最初に測定した $R_{\rm o}$ から C を求めよ.

課題 9 上で求めた電流 i の対数は, 時間 t に関する一次式となる. 電流の測定値の対数を時間に対してグラフ用紙にプロットし, 最初の数秒間を除いてこの関係を満たしていることを確認せよ. この直線の傾きから時定数 CR を求めよ. また, y 切片の値と上で求めた $V_{\rm o}$ から R を求め, 上の結果と比較してその差について考察せよ. 余裕があれば, 付録 A.1 の最小 2 乗法を用いてみよ.

課題 10 計測の最初の数秒間は電流値が理論式に従わない. これはどのような理由によると考えられるか. またこの効果を考慮するためには, どのような回路素子を追加すればよいか. その値はどの程度と考えられるか.

2 テスタの抵抗レンジを用いた容量測定

この実習で用いるテスタ (SANWA SP-18D) にはコンデンサの容量測定というユニークな機能がついている. ここでは, 微分方程式の理論を用いて, この容量測定の原理について調べてみよう.

2.1 各自持参するもの

1 グラフ用紙
2 関数電卓
3 秒針のついた時計

2.2 配布されるもの

1 アナログテスタ (容量測定目盛のついた SANWA SP18-D の使用を前提にしているが, 普通のアナログテスタでも代用できる.)
2 $0.1\,\mu$F ～ $10\,\mu$F のコンデンサ数個 (電気 2 重層コンデンサはここでは使わない.)
3 予備電池 (テスタ用)
4 ドライバ (+)

2.3 簡単化されたメータ方程式

テスタなどに使われている電流計 (メータ) の針の動きは, つぎの微分方程式で表すことができる [付録 A.2, 図 1(a)]:

$$\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta+\theta=kj. \tag{1}$$

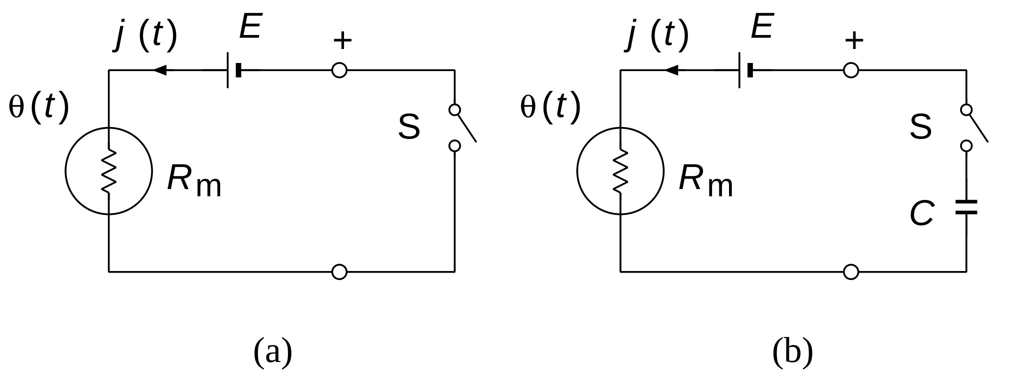

図 1: 等価回路

ここで, $\theta(t)$ は針のふれ角を表す. 目盛 0 を $\theta = 0$ に, 最大目盛を $\theta = \theta_{\mathrm{m}}$ に対応させる. τ は針の応答時間, $j(t)$ は電流計に流れる電流, k は電流計の感度 (単位電流あたりのふれ角) である.

2.4 定常状態

メータに一定の電流 $j(t) = j_0$ を流しておくと, 針のふれは一定の値 $\theta(t) = \theta_0 = kj_0$ に落ち着く. これによって電流を測定することができる. この関係は, 微分方程式 (1) で $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$ とすれば, 求めることができる.

2.5 自由運動

定常状態 $\theta = \theta_0$ から, 時刻 $t = 0$ で電流を切った場合の針の運動 ($t \geq 0$) をしらべよう:

$$\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta + \theta = 0, \quad \theta(0) = \theta_0. \tag{2}$$

この微分方程式の解が,

$$\theta(t) = \theta_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{3}$$

であることは簡単に確かめられる.

課題 11 テスタの抵抗レンジ ($\times 100\,\mathrm{k}\Omega$) を用いて, 上の解に相当する針の運動を実現し観察せよ.

課題 12 時定数 τ を実測せよ. 測定方法は各自工夫すること. 複数の (できれば独立の) 測定結果と, 付録のデータを比較検討し, τ を決定せよ.[2]

[2]各班の実測値を黒板に書き並べてみよ.

2.6 ステップ電流に対する応答

こんどは, 逆に $\theta = 0$ の定常状態から, $t = 0$ で一定電流 j_0 を流した場合の針の運動をしらべよう:

$$\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta + \theta = kj_0, \quad \theta(0) = 0. \tag{4}$$

この微分方程式の解が,

$$\theta(t) = \theta_0(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}), \tag{5}$$

であることは簡単に確かめられる. ただし, $\theta_0 = kj_0$. 右辺第 1 項が特解, 第 2 項が斉次解に対応している.

課題 13 テスタの抵抗レンジ ($\times 100\,\mathrm{k}\Omega$) を用いて, 上の解に相当する針の運動を実現し観察せよ.

課題 14 時定数 τ を実測せよ. 先に測定した τ とほぼ等しいことを確認せよ. 厳密には式 (15) の効果によって違いがある. これについても議論せよ.

2.7 充電電流

図 1(b) のようにコンデンサ C と抵抗 R の直列回路に電圧 E の電池をつなぐと,

$$j(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} \tag{6}$$

という電流が流れる. ただし, 電池を接続した瞬間を $t = 0$, コンデンサの初期電荷を 0 とした. また, $T = CR$ は充電の時定数である.

課題 15 テスタの容量測定のレンジを用いて, いくつかのコンデンサの容量を測定し, 公称値と比較せよ.

課題 16 それぞれのコンデンサを $R = 2\,\mathrm{M}\Omega$ の抵抗を通して充電した場合の時定数 $T = CR$ を計算せよ. コンデンサの容量表記の読み方は付録を参照すること.

課題 17 テスタの抵抗レンジ $\times 100\,\mathrm{k}\Omega$ の場合の内部抵抗の値はいくらか. テスタの目盛を睨みながら考えよ. (ヒント: 短絡した場合, 内部抵抗と等しい抵抗をつないだ場合, それぞれの針のふれを考えるとよい.)

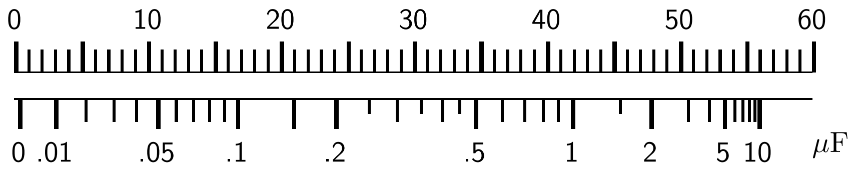

図 2: 式 (9) より計算した目盛の例 (正しいとは限らない)

2.8 充電電流に対する応答

前項の充電電流 $j(t) = j_0 \exp(-t/T)$ に対する針の運動をしらべよう:

$$\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta + \theta = k j_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}, \quad \theta(0) = 0. \tag{7}$$

この微分方程式の解が,

$$\theta(t) = \frac{T}{T-\tau}\theta_0(\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}), \tag{8}$$

であることは簡単に確かめられる. 右辺第 1 項が特解, 第 2 項が斉次解に対応している. ($\tau = T$ の場合は, 別途求める必要がある.)

課題 18 準備したコンデンサの中から値を各自 1 つ選んで, 上の解 (8) をグラフ用紙に描け. (ここで, 推定したテスタの内部抵抗と実測した τ の値が必要になる.)

課題 19 解 (8) から, メータのふれの極大値 $\theta_{\max}$ が

$$\frac{\theta_{\max}}{\theta_0} = \frac{x}{x-1}\left(\exp\frac{\ln x}{1-x} - \exp\frac{x\ln x}{1-x}\right), \tag{9}$$

であることを示せ. ただし, $x = T/\tau = CR/\tau$, $\exp x = \mathrm{e}^x$, $\ln x = \log_\mathrm{e} x$.

課題 20 $\theta_{\max}/\theta_0$ と x の関係をグラフ用紙に描け.

課題 21 実際のテスタの容量目盛と上のグラフを定量的に比較せよ.

A 付録

A.1 最小 2 乗法

2 つの量 X, Y が 1 次式 (直線)

$$Y = aX + b \tag{10}$$

の関係にあることが予想されるとする．これらを n 回測定し, 得らえた結果が $(X_i, Y_i)(i = 1, \cdots, n)$ であったとする．測定結果から係数 a, b を推定することを考えよう．各回における “ずれ” $Y_i - (aX_i + b)$ の 2 乗の総和

$$I = \sum_{i=1}^{n}(aX_i + b - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a^2X_i^2 + b^2 + Y_i^2 + 2abX_i - 2bY_i - 2aX_iY_i) \tag{11}$$

を最小にするように a, b を決めるのがよさそうである．その条件は $\partial I/\partial a = 0$, $\partial I/\partial b = 0$ である．この連立方程式を解くことにより

$$a = \frac{n[XY] - [X][Y]}{n[X^2] - [X]^2} \tag{12}$$

$$b = \frac{[X^2][Y] - [X][XY]}{n[X^2] - [X]^2} \tag{13}$$

と求められる．ただし,$[X] = \sum X_i$, $[Y] = \sum Y_i$, $[XY] = \sum X_iY_i$, $[X^2] = \sum {X_i}^2$.

A.2 メータ方程式

テスタなどに用いられているメータ (電流計, 電圧計) の針の振れ角 $\theta(t)$ は次の運動方程式にしたがうことが知られている:

$$P\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + K\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + U\theta = Gj(t). \tag{14}$$

ここで, P は可動部分の慣性モーメント, K はダンピング係数, U は (つるまき) ばね定数, G は単位電流当たりのトルクを表す．メータを流れる電流は電圧 $e(t)$ と回路の全抵抗 R によって $j(t) = e(t)/R$ と表すことができる．ダンピング係数は

$$K = K_0 + \frac{G^2}{R} \tag{15}$$

のように機械的なもの K_0 と電磁的なもの G^2/R なものからなっている．後者はメータの動きに伴う誘導起電力によって回路に電流が流れるために生じるトルクに起因する (電磁ブレーキ効果).

方程式 (14) は, 2 階の定数係数非同次線形微分方程式である．物理的には, ばね, ふりこ, あるいは LCR 共振回路との対応を考える理解しやすい．

ダンピングが弱い場合 ($K^2 < 4UP$) には, 同次線形微分方程式 $[j(t) = 0]$ の特性指数は複素数になり, 解は (減衰) 振動的である．このような状態では, 針がふらふらして読みづらいので, 通常

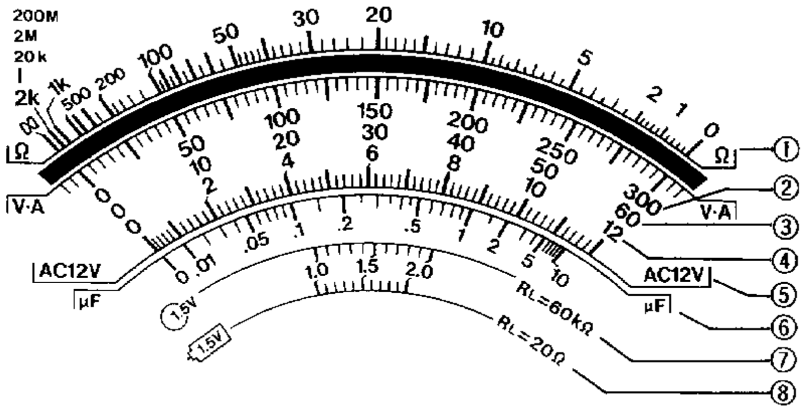

図 3: SP-18D のメータパネル. 取扱説明書より転載.

のメータではダンピングは十分効いている; $K^2 > 4UP$. この場合, 特性指数は 2 つとも, (負の) 実数になる. このうち, 絶対値が大きい方を $-\gamma_{\mathrm{f}}$, 小さい方を $-\gamma_{\mathrm{s}}$ と呼ぶことにする. $\gamma_{\mathrm{s}}/\gamma_{\mathrm{f}} \ll 1$ が成り立っているとしよう.

$j(t)$ が, 速い時定数 γ_{f}^{-1} に対してゆっくり変化する場合, すなわち

$$|\gamma_{\mathrm{f}}(\mathrm{d}j(t)/\mathrm{d}t)/j(t)| \ll 1$$

が成り立つ場合には, メータの運動は 2 階微分の項を省略した 1 階の方程式でよく記述される:

$$K\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + U\theta = Gj(t). \tag{16}$$

また, その特性指数 $-U/K$ は $-\gamma_{\mathrm{s}}$ にほぼ等しい.

さらに, $j(t)$ が遅い時定数 γ_{s}^{-1} より遅い場合には, 1 階微分の項も省略でき, $\theta(t) = GU^{-1}j(t)$ となる. これが普通のメータの使い方である.

A.3 SP-18D

実験で使用するテスタ (サンワ SP-18D) のメータの目盛を図 3 に示す.

容量測定のレンジ $\times 100\mu\mathrm{F}$, $\times 1\mu\mathrm{F}$ はそれぞれ, 抵抗測定のレンジ $\times 1\,\mathrm{k}\Omega$, $\times 100\,\mathrm{k}\Omega$ に対応している.

A.4 コンデンサの容量表示

3 桁の数字で書かれている場合, 最初の 2 桁が主値, 3 桁目が指数を表す. 単位はコンデンサの種類によって, pF $(= 10^{-12}\mathrm{F})$ または, nF $(= 10^{-9}\mathrm{F})$ である. 474 のフィルムコンデンサは $47 \times 10^4\mathrm{pF} = 0.47\mu\mathrm{F}$.

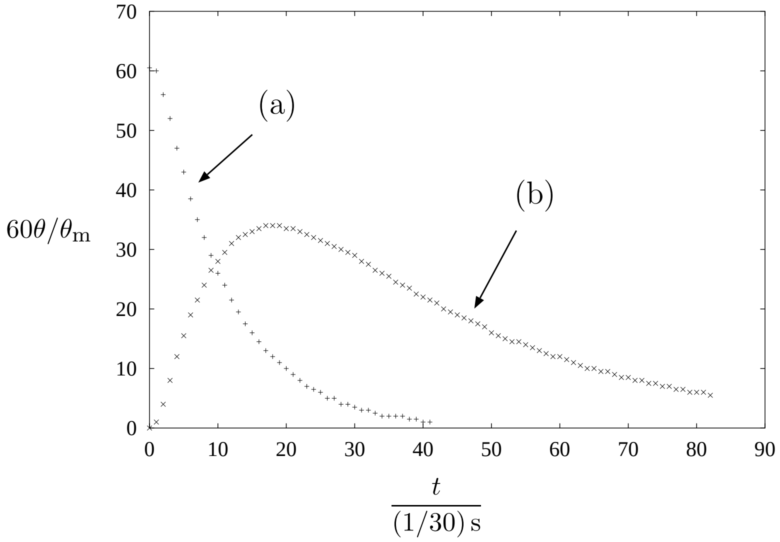

図 4: メータをビデオカメラで撮影, 1 コマずつ再生し, 読みとった. 振れ角 θ はフルスケール 60 の目盛で表示. レンジは $\times 100\,\mathrm{k}\Omega$ (μF $\times$ 1), 時刻は $1/30\,\mathrm{s}$ 単位. (a) は, フルスケールから自由運動させた場合. (b) は, $0.47\,\mu$F のコンデンサを充電した場合.

A.5 実測データ

針の運動の実測データを図 4 に示す. 対応する数値データは図 5 に与えてある. WWW サーバからもダウンロードできる; http://www.kuee.kyoto-u.ac.jp/~enshuu/.

(a)

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	60.5	60	56	52	47	43	38.5	35	32	29
10	26	24	21.5	19.5	17.5	16	14.5	13	12	11
20	10	9	8	7	6.5	6	5	5	4	4
30	3.5	3	3	2.5	2	2	2	2	1.5	1.5
40	1	1								

(b)

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	0	1	4	8	12	15.5	19	21.5	24	26.5
10	28	29.5	31	32	32.5	33	33.5	34	34	34
20	33.5	33.5	33	32.5	32	31.5	31	30.5	30	29.5
30	29	28	27.5	26.5	26	25.5	24.5	24	23.5	22.5
40	22	21.5	21	20	19.5	19	18.5	18	17.5	17
50	16	15.5	15	14.5	14.5	14	13.5	13	12.5	12
60	12	11.5	11	10.5	10	10	9.5	9.5	9	8.5
70	8.5	8	8	7.5	7.5	7	7	6.5	6.5	6
80	6	6	5.5							

図 5: 実測データ $\theta(t) \times 60/\theta_{\mathrm{m}}$. $t = (y + x) \times (1/30)\,\mathrm{s}$.