

自然現象と数学 工学部電気電子工学科 2007 年度版より抜粋

1 微分方程式 — 入門編

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1)$$

は大変重要である。特に $\theta = \pi$ を代入して得られる $e^{i\pi} + 1 = 0$ にはセレブな数たちが総出演している¹。ここではオイラーの公式を微分方程式という道具立てを用いて導出する。オイラーの公式は電気回路を調べるための最も重要なツールであるフェーザ (複素数による正弦振動の表現) の導入のためにただちに必要となる。

ここで前提となる知識は、数学では漸化式、複素数、指数関数、自然対数の底、三角関数、微分方程式、物理では運動方程式、単振動、等速円運動であるが、これらが相互に密接に関連していることを実感してほしい^{2 3}。

1.1 漸化式 — 差分方程式

元金 f_0 を年利率 r の 1 年複利 (利息の計算を 1 年毎に行い元金に加える) で運用すると、 k 年後には、 $f_k = (1+r)^k f_0$ となる。列 f_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) は漸化式

$$f_{k+1} = (1+r)f_k \quad (2)$$

を満たす。漸化式を変形して

$$f_{k+1} - f_k = r f_k \quad (3)$$

と表すと、今後 1 年の資金増加 (左辺) が、現在の資金の定数倍 (右辺) に等しいというルールを表すものになる。数列に対する隣接 2 項の差を含む関係式は差分方程式ともよばれる。

利息の計算を (利率を半分にして) 半年毎に行う方式を半年複利という。半年後には $(1+r/2)f_0$ 、1 年後には $(1+r/2)^2 f_0 = (1+r+r^2/4)f_0$ となり、1 年毎に計算する場合に比べて資金は $f_0 r^2/4$ だけ増える。ではさらに分割を細かくして $1/N$ 年毎に利息の計算を行うといくらでも資金は増えるのだろうか。 k/N 年後の資金を $f_{N,k}$ と表すことにすると

$$f_{N,k} = (1+r/N)^k f_0 \quad (4)$$

である。 $f_0 = f_{N,0}$ は元金、 $f_{N,N/2}$, $f_{N,N}$ は半年後、1 年後の資金である。

¹ファイマンによって Euler's jewel と称賛されたこの式は、小川洋子の小説「博士の愛した数式」にも登場している。

²関連性の発見とそれによる知識の統合こそが本当の意味での勉強である。

³ のついている節は最初は飛ばしてもよい。

	方程式	解	初期値
差分	$f_{k+1} - f_k = r f_k$	$f_k = r^k f_0$	f_0
微分	$(d/dt)f(t) = a f(t)$	$f(t) = e^{at} f(0)$	$f(0)$

表 1: 差分方程式 (漸化式) と微分方程式の対応

ここで, N (とそれに応じて k) を大きくすると

$$(1 + r/N)^k = \left[(1 + r/N)^{\frac{N}{r}} \right]^{r \frac{k}{N}} \rightarrow e^{r \frac{k}{N}} \quad (N \rightarrow \infty) \quad (5)$$

となる. ここで $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{(1/h)}$ を用いた. 分割を細かくしても, 1 年後の資金 $f_N(N)$ はせいぜい $e^r f_0$ に近づくだけである.

課題 1 年利率 100%, 半年複利の場合, 1 年後に元金は何倍になっているか. 同様の利率で 1 日ごとの複利の場合, 1 年後元金は何倍になっているか.

利息の計算を非常に細かい時間単位 ($1/N$ 年) で行っているので, 時間を連続変数で表すのが適当である. すなわち,

$$t = \frac{k}{N} T, \quad f(t) = f_N(k) \quad (6)$$

とおくことにする. T は $N = 1$ の場合の時間の単位 (今の場合は 1 年) である. すると, 資金の時間変化は式 (4), (5) から

$$f(t) = f(0) e^{at} \quad (7)$$

と表せることがわかる. $a = r/T$ は単位時間あたりの利率 (単位は 1/s) である. この式は, $t > T$ や $t < 0$ に対しても成り立つことに注意する.

このとき, 式 (3) に相当する差分方程式 $f_{N,k+1} - f_{N,k} = (r/N) f_{N,k}$ は

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{r}{T} f(t) \quad (8)$$

と変形することができる. $\Delta t = T/N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) とすると,

$$\frac{d}{dt} f(t) = a f(t) \quad (9)$$

が得られる. このように未知の関数とその微分を含む関係を微分方程式という.

表 1 に差分方程式 (漸化式) と微分方程式の関係をまとめておく. 概念が類似していること, 分割数 N が大きい場合には解の振舞いがほぼ等しいことに注意する. 実際, 計算機で微分方程式を解く場合にはそれを近似する差分方程式を解いているのである. また指数関数 e^x やその底 e は $N \rightarrow \infty$ の極限で必然的に現れることにも注意したい.

式 (5) の近似が成り立つ条件は $r/N \ll 1$, すなわち $a \Delta t \ll 1$ である. “ $\ll$ ” は左辺が右辺に比べて十分小さいことを意味する.

1.2 微分方程式と指数関数

時間 t の関数 $f(t)$ が関係式

$$\frac{d}{dt}f(t) = af(t) \quad (10)$$

を (すべての時刻 t において) 満たしているとする. ただし, a は実定数である. これは, 前節で得られた微分方程式であるが, 量 f の変化 (左辺) が, f の定数倍 (右辺) に等しいという簡単なルールを式で表したものである. a は時間あたりの変化率 (単位は $1/s$) である. このルールはコンデンサの電荷の減少, 放射性元素の崩壊, 人口の幾何級数的増加など, さまざまな自然現象において見られるものである. 時間 t を距離に置き換えると媒質中の光の減衰のルールにもなっている.

コンデンサ C_0 の電荷 q が抵抗 R_0 を通して放電する場合を例に考えてみよう. 抵抗の電圧, 電流を v, i とおくと, 関係 $q = C_0v$, $v = R_0i$, $(d/dt)q = -i$ が成り立つので, i, v を消去すると, 式 (10) と同じ微分方程式 $\frac{d}{dt}q(t) = -\frac{1}{C_0R_0}q(t)$ が得られる.

与えられた微分方程式を満たす関数を, その微分方程式の「解」とよぶ. 微分方程式 (10) の解が指数関数 $f(t) = Ce^{at}$ であることは前節で調べたとおりである. ここで C は任意の値である. このように微分方程式の解はただ 1 つではなく, 自由度を残して決まる. 定数 C を積分定数, あるいは任意定数とよぶ. ルール (微分方程式) は 1 つでも, その実現例 (解) には多様性があるということである. 一般に n 階までの導関数を含む微分方程式を n 階微分方程式とよぶ. 式 (10) は 1 階微分方程式である. n 階の微分方程式の解は n 個の任意定数を含む. このような解を一般解とよぶ. 任意定数 (のすべてあるいは一部) に具体的な値を代入したものを特解とよぶ. 上の例では, $3e^{at}$, $-100e^{at}$ などが特解である.

微分方程式の解を式の形で求めることを求積 (積分を求める) というが, 単なる積分よりはむずかしい. 例えば式 (10) を単純に積分すると $f(t) - f(0) = a \int_0^t f(t')dt'$ となって両辺に求めるべき関数 $f(t)$ が残ってしまうからである. したがって, 微分方程式の解を求めるためには, そのタイプに応じた工夫が必要である. 一方, 差分近似によって数値的に解を求めることは比較的簡単である.

さて, 微分方程式 (10) と指数関数の間には密接な関係

$$\left(\frac{d}{dt} - a\right)f(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = Ce^{at} \quad (11)$$

があることが分かった. この関係は「 $(d/dt - a)$ を作用させて恒等的にゼロになる関数は e^{at} の定数倍だけ」と読むことができる. 微分方程式は関数の形を規制する働きを持っている. $(d/dt - a)$ は見慣れない表記かもしれないが, t の関数 f に作用して, 新しい関数 $df/dt - af$ を作るものとする.

課題 2 量 f が半減期 T で減少するとき, f はどのような微分方程式にしたがうか?

式 (11) の根拠である

$$e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \quad (12)$$

は x が複素数の場合にも拡張できる. 1 階の微分方程式において, この拡張は通常は必要ないが, 後に見るように 2 階の微分方程式では非常に重要な働きをする.

課題 3 複素数 $z = x + iy$ を平面グラフ上の点 (x, y) として表したものを複素平面表示という. $1 + i$, $(1 + i/2)^j$ ($j = 1, 2$), $(1 + i/4)^k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) をそれぞれ複素平面上に表示してみよ. 余力があれば, $1 + i\pi$ についても調べてみよ.

指数関数の最も重要な性質

$$e^{a(t_1+t_2)} = e^{at_1}e^{at_2} \quad (13)$$

は上記の微分方程式を解く過程から明らかである. 微分公式

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at} \quad (14)$$

はもっと明らかである. これらの公式は a が複素数の場合にも成り立つ.

1.2.1 指数関数の外力つき微分方程式 ¶

関係 (11) を利用して, 後に必要となる微分方程式

$$\left(\frac{d}{dt} - b\right)g(t) = e^{at}, \quad a \neq b \quad (15)$$

の解を求めよう. 右辺は外力項あるいは非同次項とよばれる. 式 (11), すなわち $(d/dt - a)e^{at} = 0$ を $(d/dt - a - b + b)e^{at} = 0$ と変形して

$$\left(\frac{d}{dt} - b\right)e^{at} = (a - b)e^{at}. \quad (16)$$

が得られる. 式 (15) と (16) を比較すると, $g(t) = e^{at}/(a - b)$ が式 (15) を満たしていることが分かる. これより, 式 (15) の解は

$$g(t) = \frac{1}{a - b}e^{at} + De^{bt} \quad (17)$$

である. e^{bt} は $(d/dt - b)$ を作用させるとゼロになるので, 右辺第 2 項のように任意定数 D をかけて加えてもよい. 式 (15) は 1 階の微分方程式であり, 解は任意定数を 1 つ含んでいる.

課題 4 次の微分方程式の解を求めよ.

$$\left(\frac{d}{dt} - b\right)g(t) = C_1e^{a_1t} + C_2e^{a_2t}. \quad (18)$$

ただし, C_1, C_2 は定数である. また, $a_1 \neq b, a_2 \neq b$ であるとする.

1.3 単振動

この節と次節では物理における微分方程式の役割について調べる.

単振動を表す運動方程式は,

$$ma = -kx \quad (19)$$

である. x , a , m はそれぞれ質点の位置, 加速度, 質量である. また, k はバネ定数である. $a = (d/dt)v = (d/dt)(dx/dt) = (d^2/dt^2)x$ (v は速度) であることを考慮すると, 単振動に対する運動方程式 (19) は 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -\omega^2 x \quad (20)$$

であることが分かる⁴. ただし, $\omega = \sqrt{k/m}$ は角周波数 (単位は rad/s) である. この解が

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (21)$$

であることは代入によって確かめることができる. これを初期条件 $x(0) = A$, $v(0) = (dx/dt)(0) = \omega B$ で表すと,

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \omega^{-1}v(0) \sin \omega t \quad (22)$$

が得られる.

課題 5 周波数 f の単振動を表す微分方程式を求めよ.

1.4 等速円運動[¶]

等速円運動は直交座標 (x, y) を用いて

$$x(t) = R \cos(\omega t + \phi), \quad y(t) = R \sin(\omega t + \phi) \quad (23)$$

と書ける. R は半径, ω は角速度, ϕ は $t = 0$ における方向である. 極座標 (r, θ) では

$$r(t) = R, \quad \theta(t) = \omega t + \phi. \quad (24)$$

と表すことができる. 微分方程式を用いて, ルール的に書けば

$$\frac{d}{dt}r = 0 \quad (\text{円運動. 半径が一定}), \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt}\theta = \omega \quad (\text{等角速度}) \quad (26)$$

⁴本来, 物理法則の多くは微分方程式で表すのが自然なのであるが, 高校物理の段階では微分方程式は使わない約束になっている. 大学では遠慮なく登場する.

この微分方程式と初期条件: $r(0) = R, \theta(0) = \phi$ を組み合わせれば, 解 (24) が得られる.

直交座標に戻って見よう. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ より,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \theta - \frac{d\theta}{dt} r \sin \theta = -\omega y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} r \cos \theta = \omega x\end{aligned}\quad (27)$$

が得られる. すなわち, 直交座標系での等速円運動のルールは

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x \quad (28)$$

のような連立微分方程式になる. 式 (23) は初期条件: $x(0) = R \cos \phi, y(0) = R \sin \phi$ を満たす解である. 逆にこの微分方程式の初期条件 $x(0) = 1, y(0) = 0$ を満たす解を三角関数の定義 $\cos \omega t = x(t), \sin \omega t = y(t)$ とすることも可能である.

式 (28) は行列記法⁵ を用いて

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \omega J \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

と表すこともできる⁶.

課題 6 J が回転を表す行列であることを考えて, 式 (29) の意味を図で説明せよ.

式 (28) の第 1 式を t で微分し, 第 2 式を代入して変数 y を消去すると,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (30)$$

となり, 単振動を表す微分方程式 (20) と一致する. 等速円運動と単振動は同じ微分方程式に支配されていることが分かる.

一方, $z = x + iy$ という複素数を導入すると, 連立微分方程式 (28) は 1 つの式

$$\frac{dz}{dt} = i\omega z \quad (31)$$

に統合される. この解は実数の場合 (7) を参考にすると

$$z(t) = z(0)e^{i\omega t} \quad (32)$$

である.

式 (31) は複素数を用いており, 抽象的であるが, 式 (28), (30) に比べて, 簡単な形 (1 階, 非連立) をしているのが特徴である.

電気回路において正弦振動 (単振動) する電圧や電流を複素数で表すのはこの簡単さのためである. 式 (32) の $z(0)$ がフェーザと呼ばれるものであるが, これについては後に詳しく学ぶことになる.

⁵ベクトルは $\vec{x}$ よりも $\mathbf{x}$ と表すことが多い.

⁶線形代数でこの解が $\mathbf{x}(t) = e^{J\omega t} \mathbf{x}(0)$ となることを習うはずである. 行列 $e^A = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + A/N)^N$ は行列 A の指数関数である.

1.5 2 階の線形微分方程式

2 階の微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) + b\frac{d}{dt}f(t) + cf(t) = 0 \quad (33)$$

を考える. b, c は実定数である. この微分方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + c\right)f(t) = 0 \quad (34)$$

と書くこともできる. さらに, 2 次方程式 $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ の根⁷ λ_1, λ_2 として,

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)f(t) = 0 \quad (35)$$

と変形することができる⁸.

当面, λ_1, λ_2 は実数で, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ とする.

$f_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$ は $(d/dt - \lambda_2)f_2(t) = 0$ を満たすので, 微分方程式 (35) の解である. 式 (35) において, λ_1, λ_2 は入れ替えてもよいので, 同様の議論により, $f_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$ も解であることがわかる. そして, これらの和

$$f(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (36)$$

も解である. これは 2 つの任意定数を含んでおり, 一般解である. そして, $e^{\lambda_2 t}, 1.2e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}$ などは特解である. 初期条件として $f(0), f'(0)$ を与えると, $f(0) = C_1 + C_2, f'(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ を解くことで, C_1, C_2 が決定され, 解は一意に決まる:

$$C_1 = \frac{\lambda_2 f(0) - f'(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{\lambda_1 f(0) - f'(0)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (37)$$

これは隣接 3 項間の漸化式 (2 階の差分方程式) の場合に最初の 2 項を初期値と与えることに相当している.

1.5.1 一意性 ¶

式 (36) 以外の形の解が存在しないことを確かめておこう. 右辺第 1 項は $(d/dt - \lambda_1)$, 第 2 項は $(d/dt - \lambda_2)$ の作用によってそれぞれゼロになる. ひょっとして両方の作用によってはじめてゼロになるような解 $f(t)$ があるかも知れない. つまり,

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)F(t) = 0, \quad F(t) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)f(t) \neq 0 \quad (38)$$

⁷代数方程式の解はしばしば根 (root) とよばれる.

⁸このような d/dt を含む式の因数分解は見慣れないかも知れないが, 式 (35) の左辺はたとえば

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)f = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)\frac{df}{dt} - \lambda_2\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)f = \frac{d^2 f}{dt^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{df}{dt} + \lambda_1 \lambda_2 f$$

のように変形できて, 式 (33) の左辺になる.

であったとする. 1 番目の式から $F(t)$ は $F(t) = Ce^{\lambda_1 t}$ の形でなければならない. これを 2 番目の式に代入すると, $f(t)$ は

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right) f(t) = Ce^{\lambda_1 t} \quad (39)$$

を満たさなければならない. この解は式 (17) から

$$f(t) = \frac{C}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} \quad (40)$$

であることが分かる. これは (36) と同じ形であり, 新しい解が求まったわけではない. 解の形は (36) で尽くされているといえる.

課題 7 微分方程式の解を求めよ. ただし, $\lambda_1 \neq a$, $\lambda_2 \neq a$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right) \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right) f(t) = e^{at}. \quad (41)$$

ヒント: $g(t) = (d/dt - \lambda_2)f(t)$ とおく.

1.5.2 根が縮退している場合 ¶

2 つの根が縮退している場合 $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$ の場合には, 式 (36) に相当する解は

$$f(t) = Ce^{\lambda t} \quad (42)$$

の形になり ($C = C_1 + C_2$), 任意定数が 1 つ減ってしまう. これは, $(d/dt - \lambda)$ を 1 回作用させた段階でゼロになる. そこで, $(d/dt - \lambda)^2$ を作用させてはじめてゼロになる解を探す必要がある. 式 (40) で λ_1 を λ_2 に近づけると, 通常は右辺第 1 項が発散してしまう. しかし, $D = -C/(\lambda_1 - \lambda_2)$ と選んでおけば, 右辺は有限の $C(d/d\lambda)e^{\lambda t} = Cte^{\lambda t}$ に近づき, 新しい形の解 $te^{\lambda t}$ が得られる. 結局, 縮退の場合の解は,

$$f(t) = Ce^{\lambda t} + Dte^{\lambda t} \quad (43)$$

の形になる. やはり 2 つの任意定数を含んでいる.

非縮退 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) の場合には, $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ が独立した解である. 縮退に近づくと, これらはいずれも $e^{\lambda t}$ に近づくが, これらの差に対応する $\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ は $te^{\lambda t}$ に近づくのである. 縮退と非縮退の場合の解の間には, 見かけによらず, ある種の連続性が存在することに注意する.

課題 8 式 (17) と上記の議論を参考に, 次の微分方程式の解を求めよ.

$$\left(\frac{d}{dt} - a\right) f(t) = e^{at}. \quad (44)$$

1.5.3 根が複素数の場合

係数 b, c が実数なので, 根は互いに複素共役になる; $\lambda_1 = \lambda = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. α, β は実数であり, $\bar{}$ は複素共役を表す. 解は (36) と同じように

$$f(t) = Ce^{\lambda t} + De^{\bar{\lambda}t} \quad (45)$$

と与えられる. C, D は複素数の定数である.

式 (37) を利用すると, $f(0), f'(0)$ が両方とも実数であれば, すなわち $\overline{f(0)} = f(0), \overline{f'(0)} = f'(0)$ であれば, $D = \bar{C}$ が成立つことが分る. そして, $f(t)$ は任意の t に対して実数となる:

$$\begin{aligned} f(t) &= Ce^{\lambda t} + \bar{C}e^{\bar{\lambda}t} \\ &= Ae^{\alpha t} \left(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t} \right) + iBe^{\alpha t} \left(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

ただし, $C = A + iB$, A, B は実数.

1.5.4 根が純虚数の場合

根が, $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$ の場合を考えよう. もとの微分方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) f(t) = 0 \quad (47)$$

である. 先に示したように, この 2 階微分方程式は単振動や等速円運動を表すのに用いられる. この方程式の解が, A', B' を実定数として

$$f_1(t) = A' \cos \omega t + B' \sin \omega t \quad (48)$$

であることは, すでに見た. 一方, 式 (46) で $\alpha = 0$ とおいたものは,

$$f_2(t) = A(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + iB(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}). \quad (49)$$

解の一意性から, $t = 0$ で $f_1(0) = f_2(0)$, $f'_1(0) = f'_2(0)$ が成り立つと任意の時刻 t について $f_1(t) = f_2(t)$ となる. すなわち, $A' = 2A$, $B' = -2B$ とすれば式 (48) と (49) は一致する;

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = \frac{A}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - i \frac{B}{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}). \quad (50)$$

A, B は任意なので, $(A, B) = (1, 0)$ あるいは $(0, 1)$ と置くことによって,

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad (51)$$

が得られる. 三角関数を指数関数で表したものである. これらからオイラーの公式

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (52)$$

を求めることができる⁹.

⁹もっと簡単な証明もあるが, ここでは微分方程式の解として, 指数関数と三角関数を関連づける方法をとった.

課題 9 オイラーの公式を利用して $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ が三角関数の加法定理に相当することを確認よ。

課題 10 双曲線関数は $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ と定義されている. $f(t) = A \cosh at + B \sinh at$ が満す微分方程式を求めよ.

1.6 数 e について ¶

「自然対数の底」という落着かない呼称をもつ e は円周率 π に比べて目立たない数である. その値を 3 桁以上覚えている人は稀であるし, その存在意義も十分把握されているとは言い難い. そんな数 e のべき乗 e^x はいいとして, その虚数乗 $e^{i\alpha}$ など全く意味不明というのが邂逅当初の印象ではないだろうか. しかし, その後頻繁に現れるようになると, いちいち問い質すのも面倒になり何となく旧知となってしまう. ここでは腐れ縁になる前に e の身元を確認しておこう.

通常, e は次のような文脈で導入される. 正の数 a の整数乗 a^n の拡張として有理数乗 $a^{n/m}$ が定義され, さらに連続性を仮定して, 実数 x に対する関数 a^x (指数関数) が導入される. 次に指数関数の微分 $(d/dx)a^x$ を導出するにあたって

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^h - 1}{h} a^x \rightarrow L(a) a^x \quad (h \rightarrow 0) \quad (53)$$

に現れる因子 $L(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (a^h - 1)/h$ がちょうど 1 になる数を $a = e$ と定義している;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \quad (54)$$

これによって微分公式 $(d/dx)e^x = e^x$ が成り立つようになる. ただし, e の積極的な意味や値自体を捉えにくい定義である.

別のルートで e を導入してみよう. 微分方程式 $df/dx = f$ は増加率が 1, すなわち $(1/f)(df/dx) = 1$ の指数的増大のルールを与えるものである. 解を区分近似で求めると $f(x) = f(0) \exp x$ が得られる. ここで関数 $\exp x$ を

$$\exp x \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \quad (55)$$

で定義した. この関数の $x = 1$ での値を e と定義する;

$$e \equiv \exp(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \quad (56)$$

少し手間をかければ確かめることができるが, これは先の定義 (54) と等価なものである.

ここで, $f(1) = f(0) \exp(1) = ef(0)$ は, 「年利率 100% に無限の複利を適用すると 1 年後に元本は $e = 2.71 \dots$ 倍になっている」という明確な意味を担っていることに注目したい. さらに,

$$\exp x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{N}\right)^{N/x}\right]^x \quad (57)$$

から, $\exp x = e^x$ であることが分る. 微分方程式を経由することによって, e^x や e の意味を明確化することができる.

関数 $\exp x$ 導入のメリットは式 (55) において x を複素数や行列に容易に拡張できることである. 虚数 $i\alpha$ や行列 A に対して, $\exp(i\alpha)$, $\exp(A)$ はその意味も含めて直接的に理解できるが, 一方, $e^{i\alpha}$, e^A などにはかなりの説明を要する. $\exp x$ を e^x とべき乗で表すのは x が実数の場合に限定するのが適切なのかも知れないが¹⁰, 便利な記法ゆえ上の事情を斟酌しながら利用すればよいだろう.

1.7 指数関数のべき級数展開 ¶

e^x の定義式 (55) において 2 項展開を用いると,

$$e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N {}^N C_k \frac{x^k}{N^k} \quad (58)$$

となる. 各項は

$$\begin{aligned} \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{k!} \frac{x^k}{N^k} &= 1 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{N}\right) \frac{x^k}{k!} \\ &= \left(1 - \frac{k(k+1)}{2N} + \cdots\right) \frac{x^k}{k!} \end{aligned} \quad (59)$$

である. N を $|x|$ より十分大きくとっておく. k が $|x|$ を越えると, $|x|^k/k!$ は急速に小さくなるので級数を適当な $k = K > |x|$ で打ち切っても差し支えない. (打ち切りによる誤差は $(|x|^K/K!)(1 + |x|/K)$ 程度である.) N が $N \gg K^2$ を満すほど大きければ, 各項は $x^k/k!$ で近似することができる. これより,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (60)$$

が得られる. 右辺を x で微分すると同じ級数となることに注意する.

課題 11 テーラ展開を用いて同じ式を導け.

課題 12 $e^{i\alpha}$ の級数展開から, $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ の級数展開を求めよ.

¹⁰ よく考えると, e^{-1} , $e^{\sqrt{2}}$ など, e^{100} に比べると説明がむずかしい.

1.8 正弦波と複素数 ¶

1.8.1 複素数の表し方

複素数はいろいろ形式で書き表すことができる.

$$\begin{aligned}
 z &= x + jy && \text{直交形式} \\
 &= (x, y) && \text{直交形式} \\
 &= re^{j\theta} && \text{極形式, 指数形式} \\
 &= r\angle\theta && \text{極形式, フェーザ形式}
 \end{aligned} \tag{61}$$

ただし, $j^2 = -1$. 各変数の間の関係は以下のとおり.

$$\begin{aligned}
 x &= \operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2} && \text{実部} \\
 y &= \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2j} && \text{虚部} \\
 r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} && \text{絶対値} \\
 \theta &= \arg z = \tan^{-1} \frac{y}{x} && \text{偏角}
 \end{aligned} \tag{62}$$

1.8.2 複素振幅 (フェーザ)

周波数 $f = \omega/(2\pi)$ の正弦波の電圧 (交流電圧) を

$$e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \varphi) \tag{63}$$

と表す. E は電圧の実効値, φ は初期 ($t = 0$ における) 位相を表す. オイラーの公式を利用すると,

$$e(t) = \frac{E}{\sqrt{2}} \left(e^{j\omega t + \varphi} + e^{-(j\omega t + \varphi)} \right) = \frac{\dot{E}}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} + \frac{\dot{E}^*}{\sqrt{2}} e^{-j\omega t} \tag{64}$$

ここで

$$\dot{E} = E e^{j\varphi} \tag{65}$$

はフェーザ (phasor) と呼ばれ, もとの正弦波の情報に関する情報を (角周波数 ω を除き) すべて含んでいる. (時間に依存しない) 1 つの複素数 $\dot{E}$ で正弦波を表すことができるので, 大変便利である.