

量子力学のまとめ

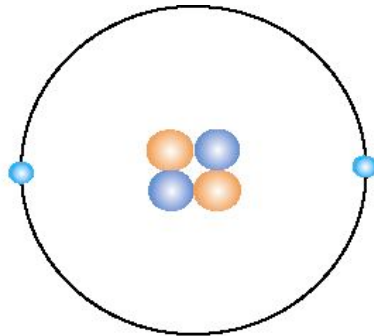
粒子は波である $\longleftrightarrow$ 量子力学

- 不確定性原理
- 量子化（取り得る状態がとびとび）
- 量子統計

フェルミ粒子とボーズ粒子

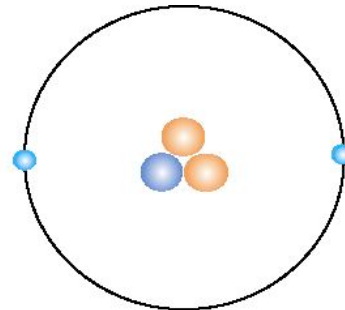
（1状態に1個）（1状態に何個でも入れる）

^4He

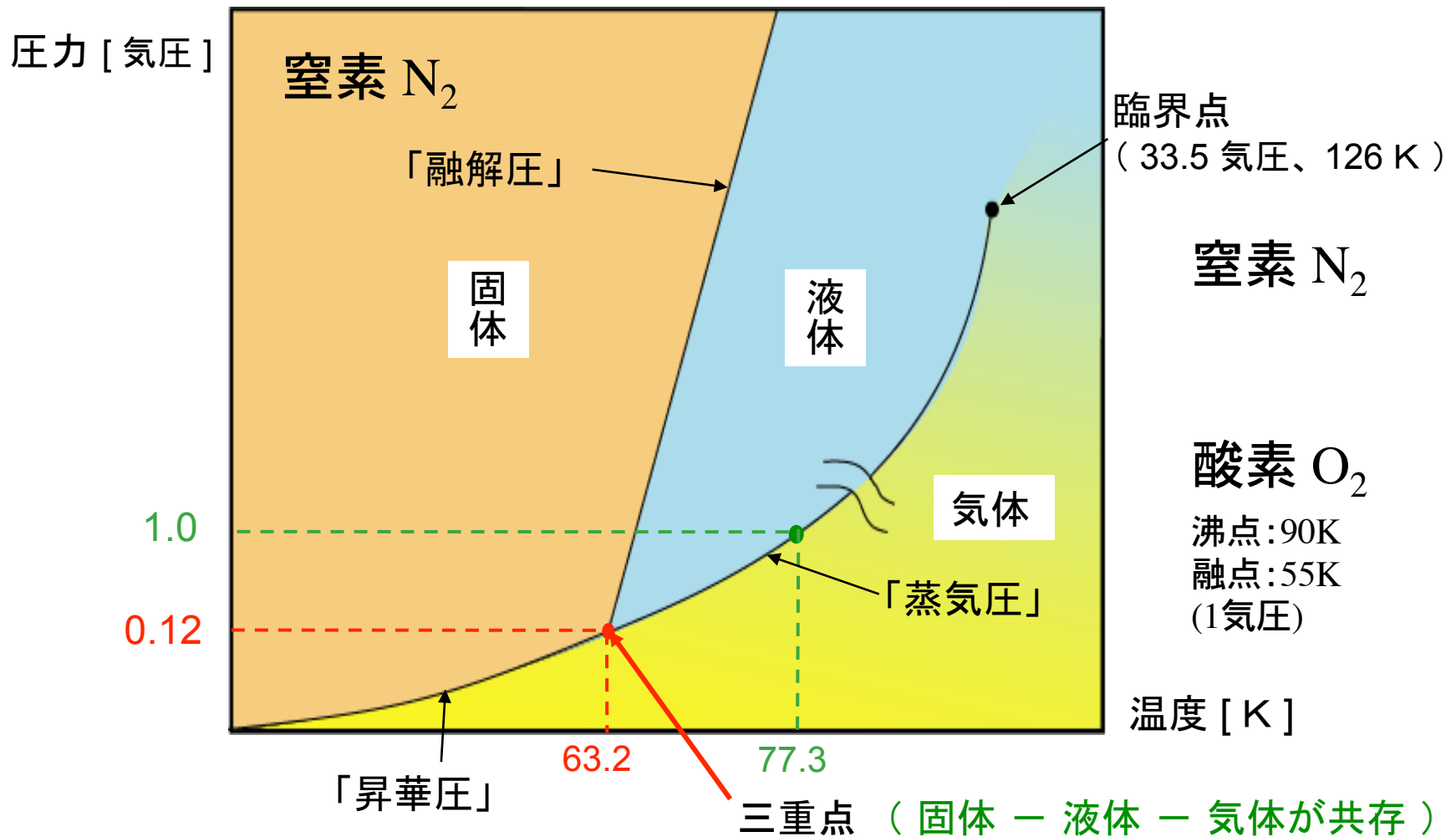


ボーズ粒子

^3He



フェルミ粒子
（電子、陽子、中性子）

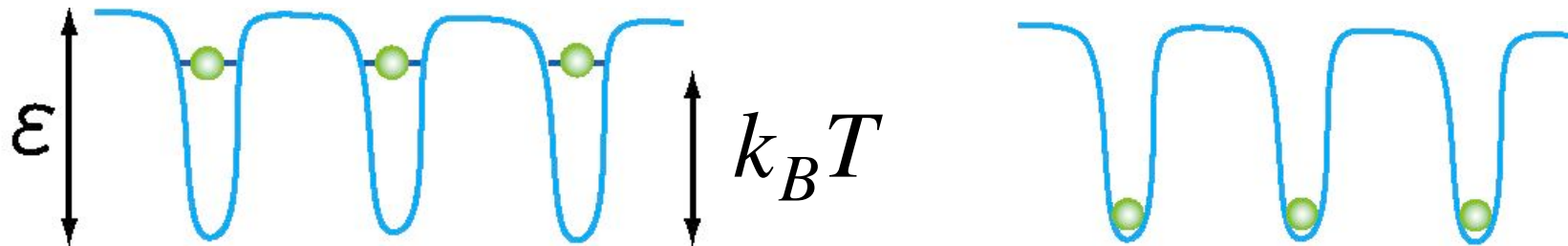


全てのものは温度を下げていくと

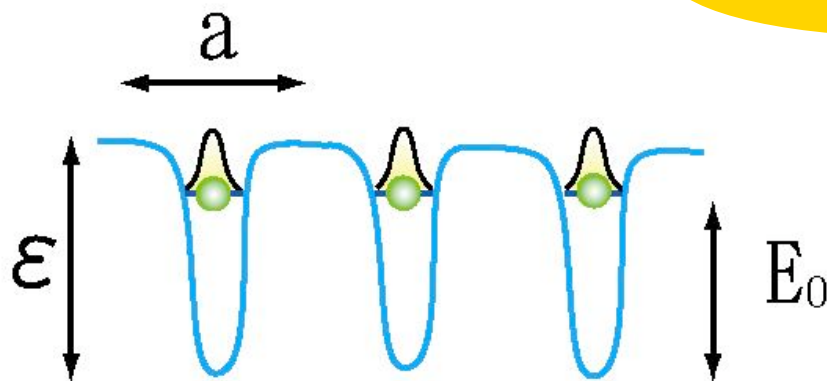
気体 → 液体 → 固体

(例外 : 4He , 3He)

普通の固体



He (量子液体)



$$E_0 \sim \varepsilon$$

$$E_0 (\text{ゼロ点エネルギー}) = \frac{(\Delta P)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

$$\Delta P \cdot \Delta x = \hbar$$

Heは絶対零度でも液体(固化しない) ← 量子効果で融解

^4He は25気圧以下では $T = 0 \text{ K}$ まで液体である

低温の液体—超流動 ${}^4\text{He}$

$T = 0\text{ K}$ で液体

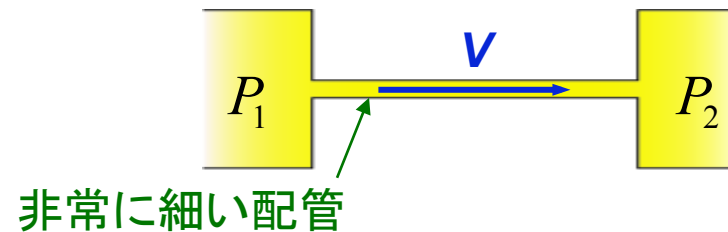
- 無秩序？
- 第3法則は？
($T \rightarrow 0$, $S \rightarrow 0$)

量子統計の脅威

超流動 ${}^4\text{He}$ の実験

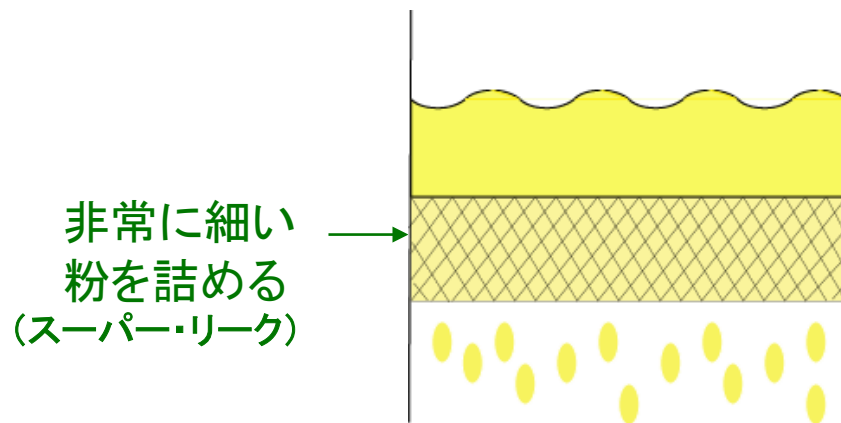
1) $T < 2.17\text{ K}$ で粘性がなくなる

超流動



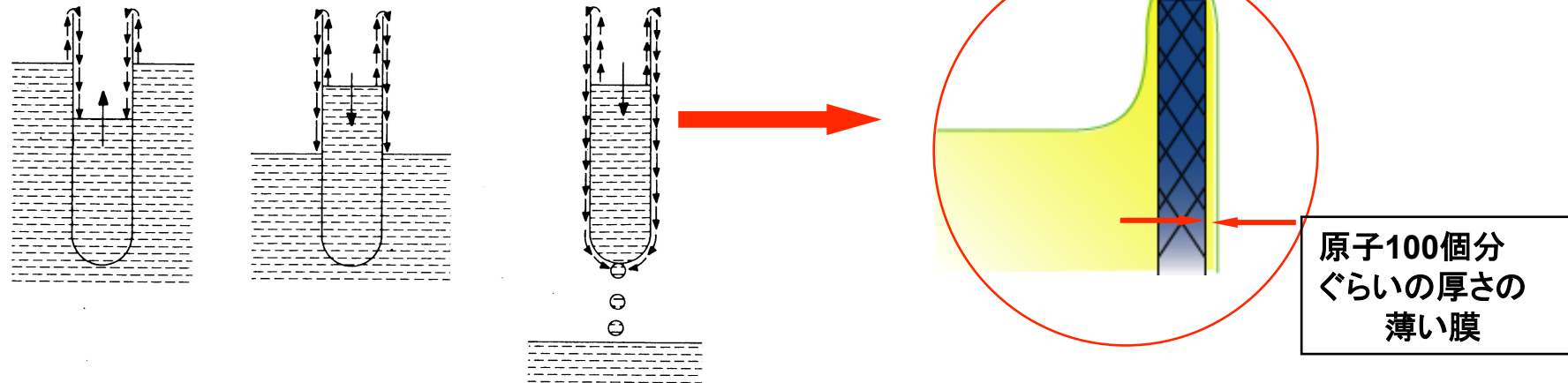
$$\Delta P = P_1 - P_2 = 0$$

(圧力差なしに流れる)



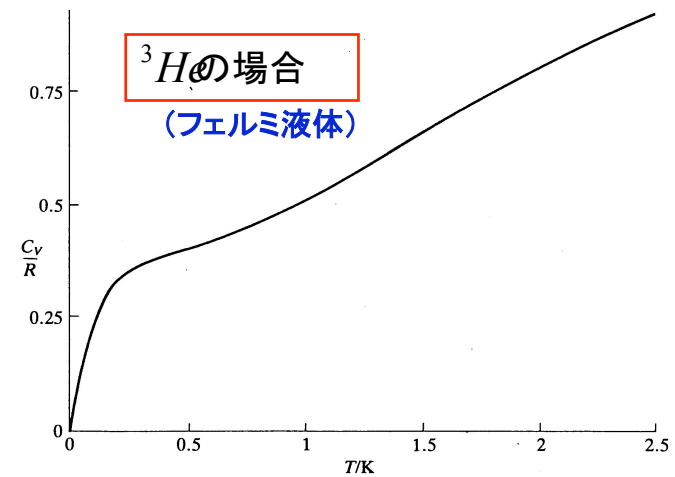
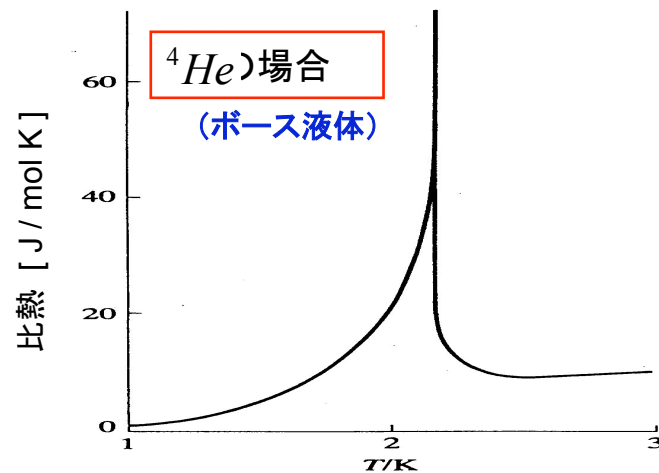
- $T > 2.17\text{ K}$
まったく流れない
- $T < 2.17\text{ K}$
一気に流れ出る

2) フィルム流の観測



薄い膜を通じて He がビーカーの外に流れ出てしまう。(粘性がない)

3) 比熱



- ^4He (ボース粒子) でのみ起こる
- 秩序ある液体 ($T \rightarrow 0$, $S \rightarrow 0$)

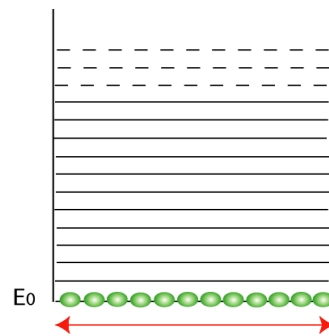
超流動はなぜ起こる？

ボース粒子でのみ起こる

↓
量子統計の効果 (T=0でも液体であるので粒子交換)

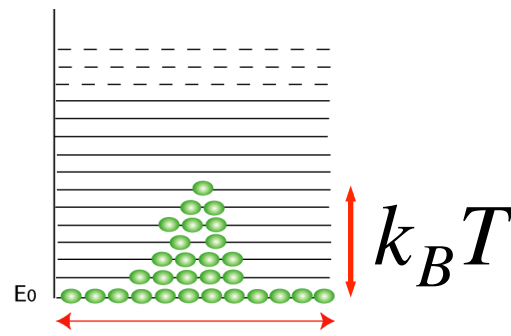
↓
ボース・アインシュタイン凝縮 (BEC)

$N (\sim 10^{23})$ 個の ${}^4\text{He}$ ボース粒子)



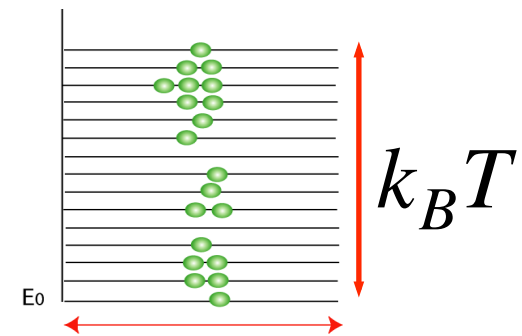
$$N_0 = N (\sim 10^{23})$$

$$T = 0$$



$$N_0 < N$$

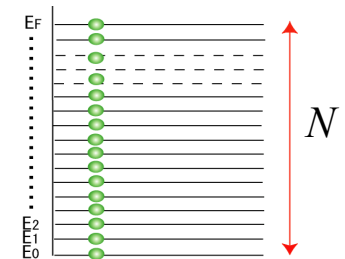
$$0 < T < T_C$$



$$N_0 \approx 0$$

$$T_C < T$$

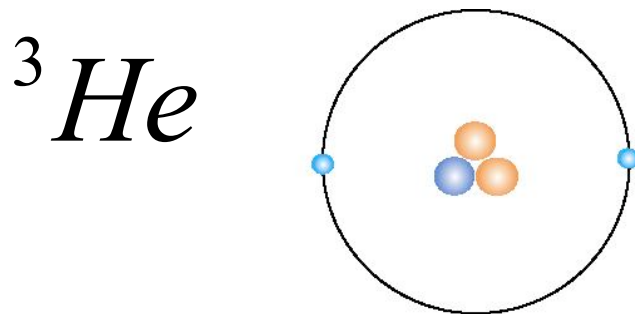
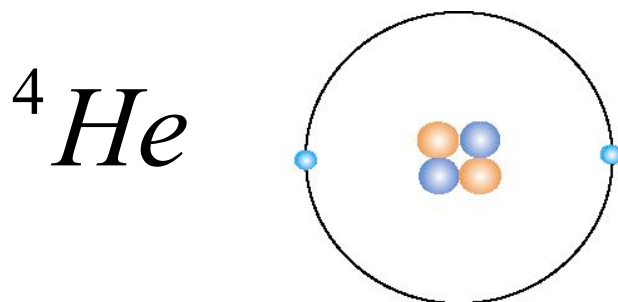
$N (\sim 10^{23})$ 個の ${}^3\text{He}$ (フェルミ粒子)



液体ヘリウムと超流動

ヘリウム（希ガス）

安定な同位体 ${}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}$



ボース粒子の例 : 光 フォトン（光子）
音 フォノン

フェルミ粒子の例 : 電子、陽子、中性子

陽子	2コ
中性子	2コ
電子	2コ

フェルミ粒子 6コ

${}^4\text{He}$ はボース粒子

陽子	2コ
中性子	1コ
電子	2コ

フェルミ粒子 5コ

${}^3\text{He}$ はフェルミ粒子

${}^4\text{He}$ 以外の超流動

- 金属中の電子(フェルミ粒子)

電子対(クーパー対) (ボース粒子)



超伝導(BCS理論)

- 液体 ${}^3\text{He}$ (フェルミ液体)

${}^3\text{He}$ がクーパー対を作る (電子対と同じ)



$$T_C \cong 1\text{mK}$$

超流動(1996年 ノーベル賞)

- アルカリ原子の気体を レーザー冷却 (1997年 ノーベル賞)

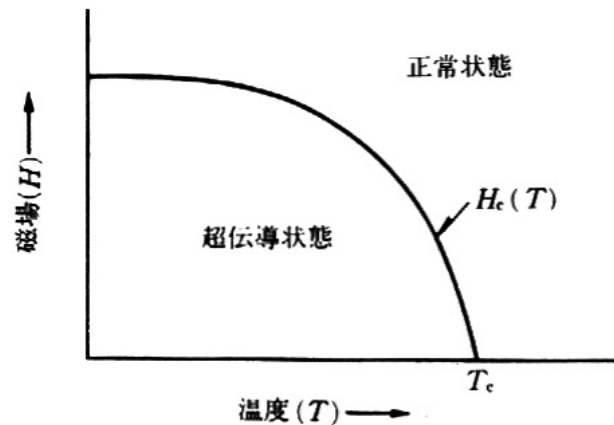


ボース凝縮(2001年ノーベル賞)

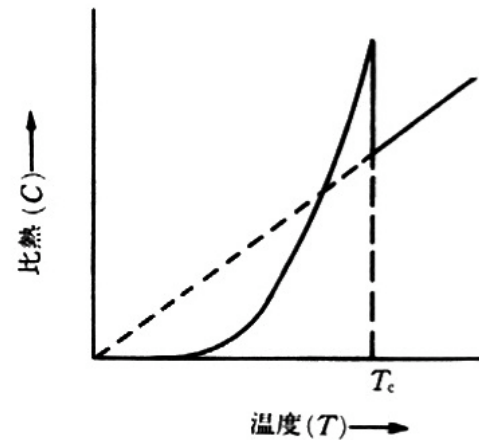
- 中性子星

中性子(フェルミ粒子)が対を作る $\longrightarrow$ 超流動星

物性 $\Leftrightarrow$ 相転移 (Phase Transition)



超伝導体の磁場と温度の関係 (相図)



超伝導体の比熱の温度変化

秩序変数 (order parameter) : ψ

$$F = -\frac{1}{2}a|\psi|^2 + \frac{1}{4}b|\psi|^4 + \frac{1}{6}c|\psi|^6 + \dots \quad \text{Landau展開 (相転移の現象論)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = -a|\psi| + b|\psi|^3 = 0 \Rightarrow |\psi|^2 = \frac{a}{b} \quad \text{熱平衡の条件}$$

超伝導

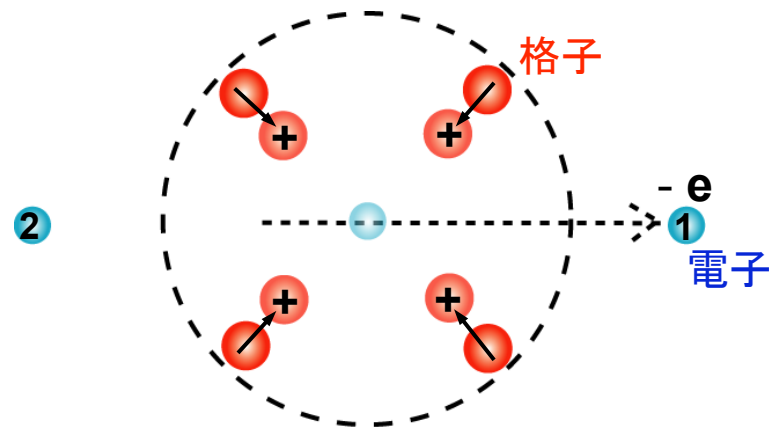
金属では伝導電子（自由電子） → 自由電子はフェルミ粒子

電子間に引力が働き電子対（クーパ対）が出来る
(BCS理論 / ノーベル賞)

2
段
構
え

電子対はボース粒子（フェルミ粒子が2個）
ボース凝縮
超流動 = 超伝導

電子対（クーパ対）



(注) 真空中では電子間にはクーロン力（反発力）が働く

対凝縮の相転移

フェルミ粒子 (Fermion) の対 (Pair) が擬ボース粒子として
ボース・アインシュタイン凝縮を起こす!

粒子間に少しでも引力相互作用があれば必ず結合する
(例: 洗面器の水面に表面張力で浮いている一円玉同士)

電子の対 → クーパー対 (Cooper Pair)

: 電子・格子相互作用によって結合

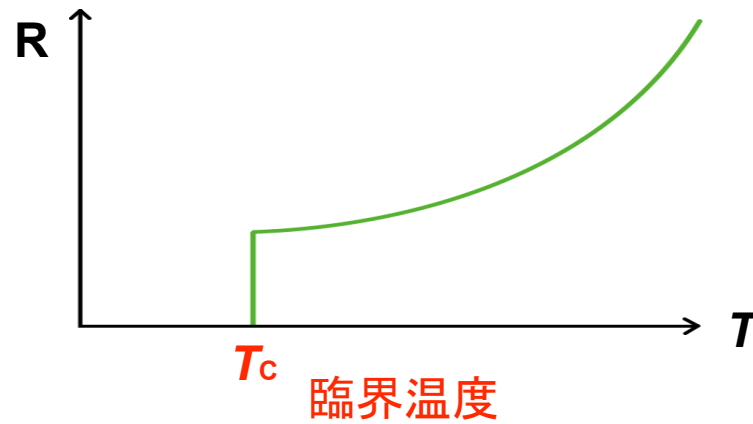
< 格子振動の Einstein Model >

$$\nu_E = \frac{\omega_E}{2\pi} \quad E = n h \nu \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad U = 3N_A \langle E \rangle = 3N_A \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

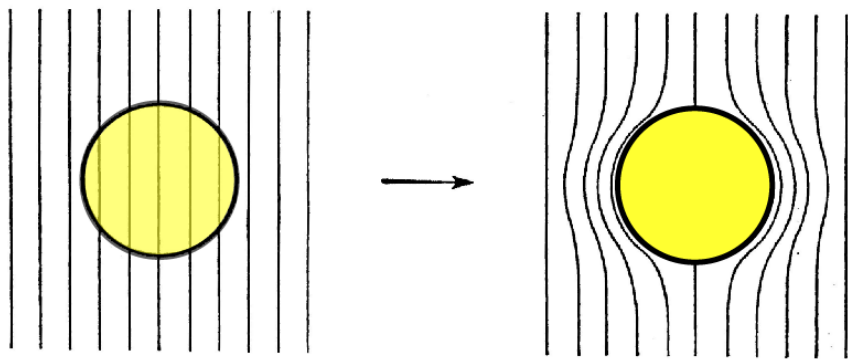
$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = 3R \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2}$$

超伝導の性質

① 電気抵抗 = 0

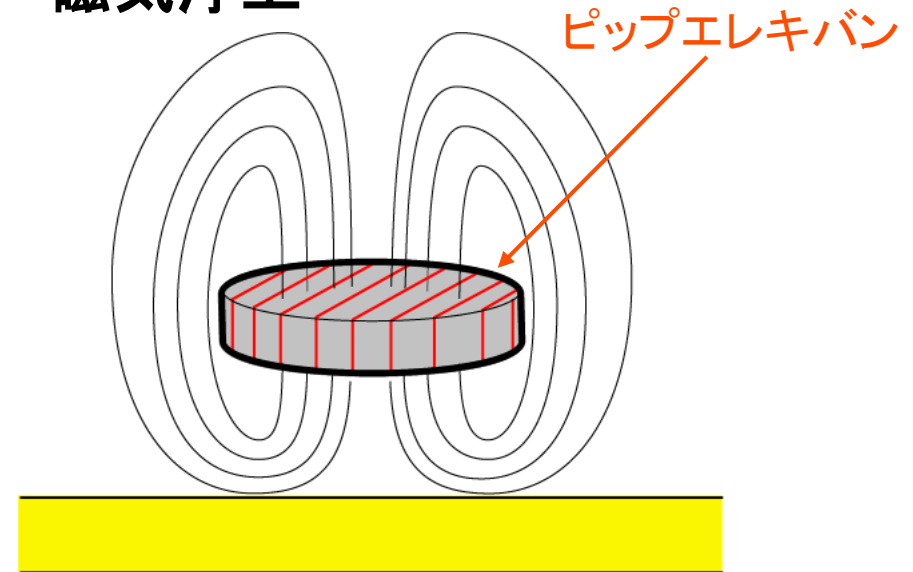


② マイスナー効果



磁束は超伝導から追い出される

磁気浮上



高圧超伝導 $Y_1Ba_2Cu_3O_7$

超伝導

=

電子(フェルミ粒子)がクーパー対(ボース粒子)を作り、ボーズ・アインシュタイン凝縮(BEC)した状態



巨視的な系が1つの量子状態になっている



重要な超伝導の2つの性質

超伝導の実験

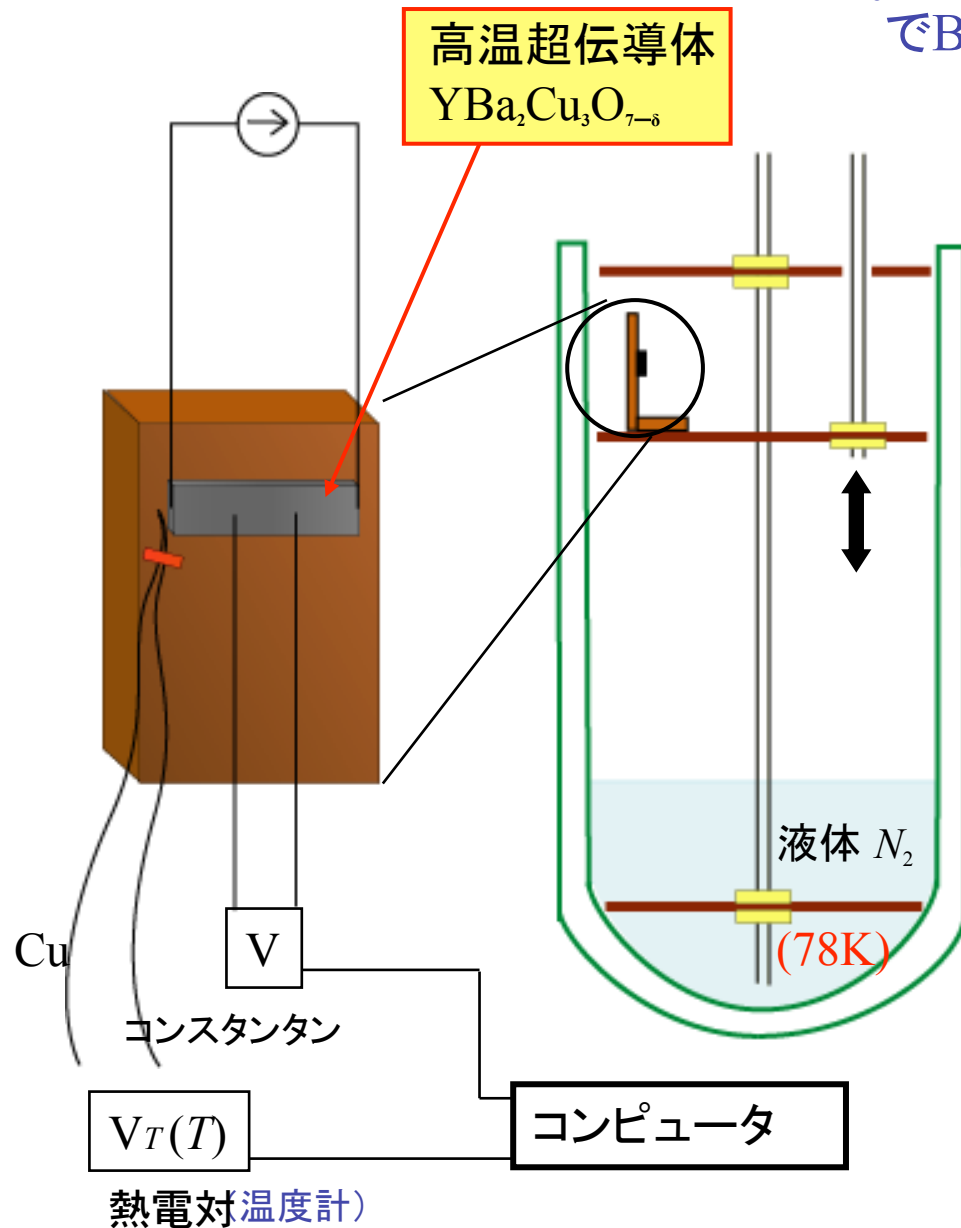
- [1] 抵抗 $R = 0$ (超伝導の名前の由来)
- [2] 完全反磁性 (磁場は超伝導体から追い出される)

[1] 抵抗 $R=0$

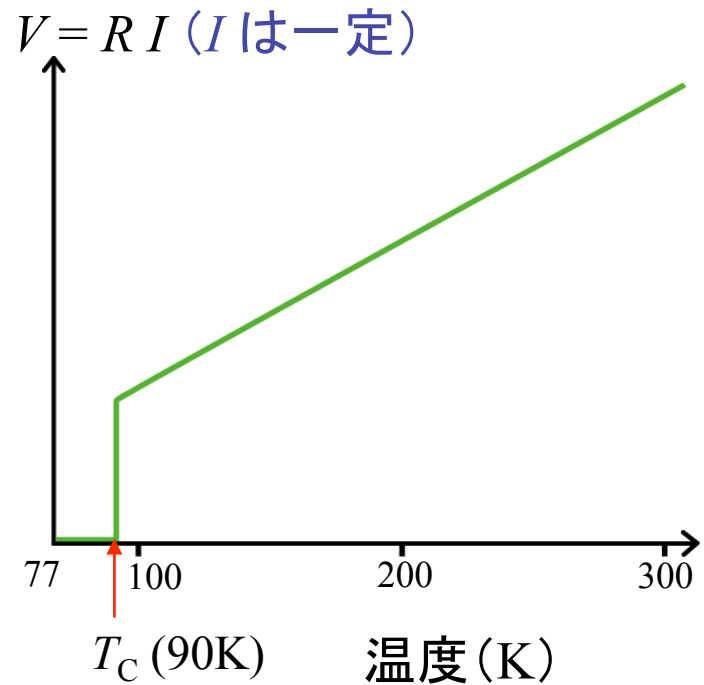
T_c : 臨界温度

(T_c はクーパ対が熱的に破壊される温度
でBECが起こる温度はもっと高い)

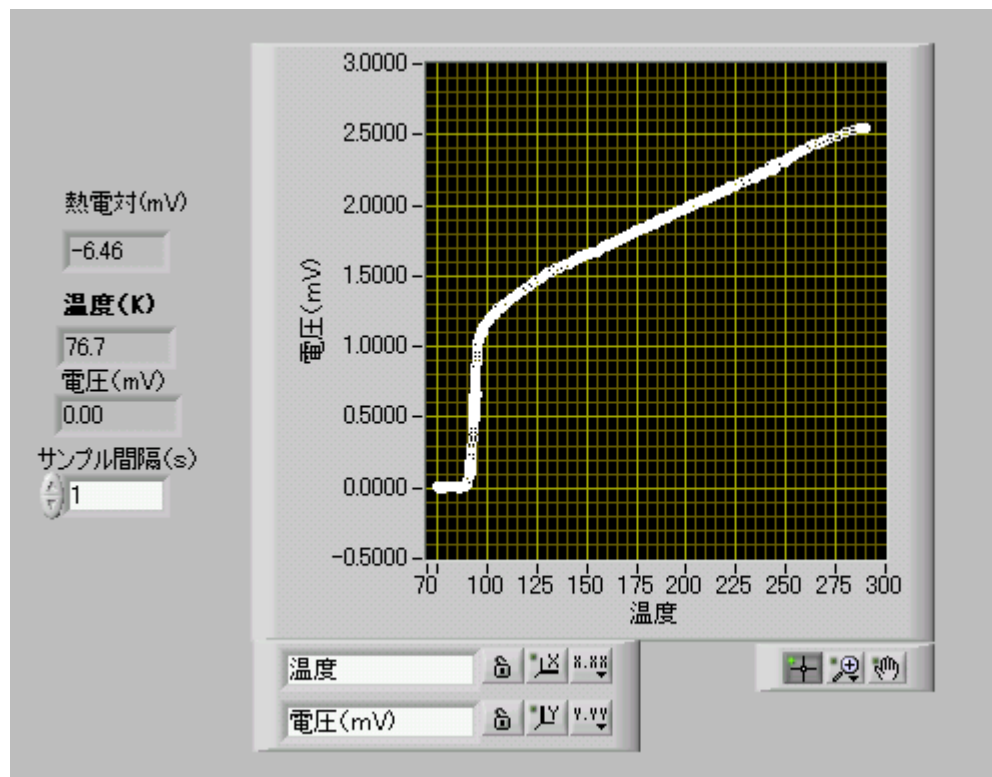
^4He では超流動になる温度
は、BECが起こる温度



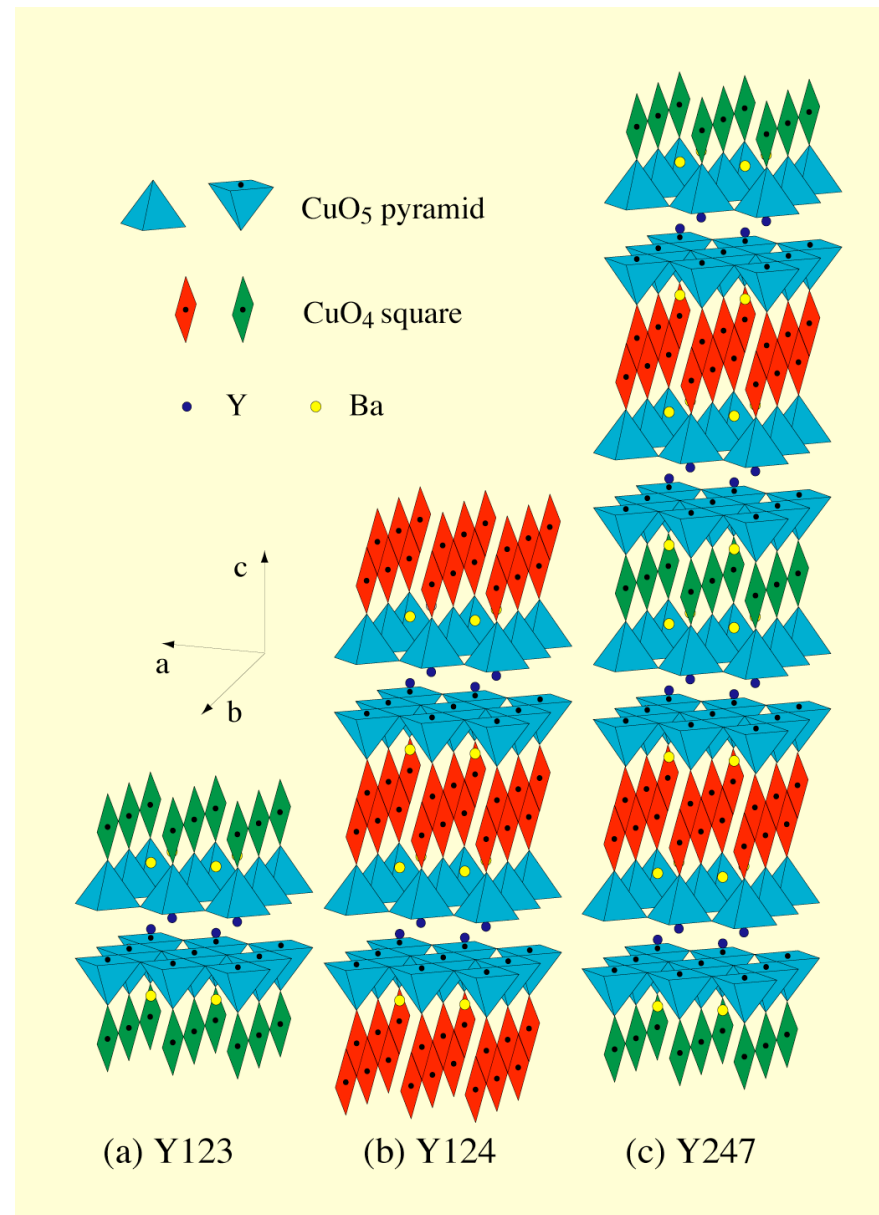
$$V = R I \quad (I \text{ は一定})$$



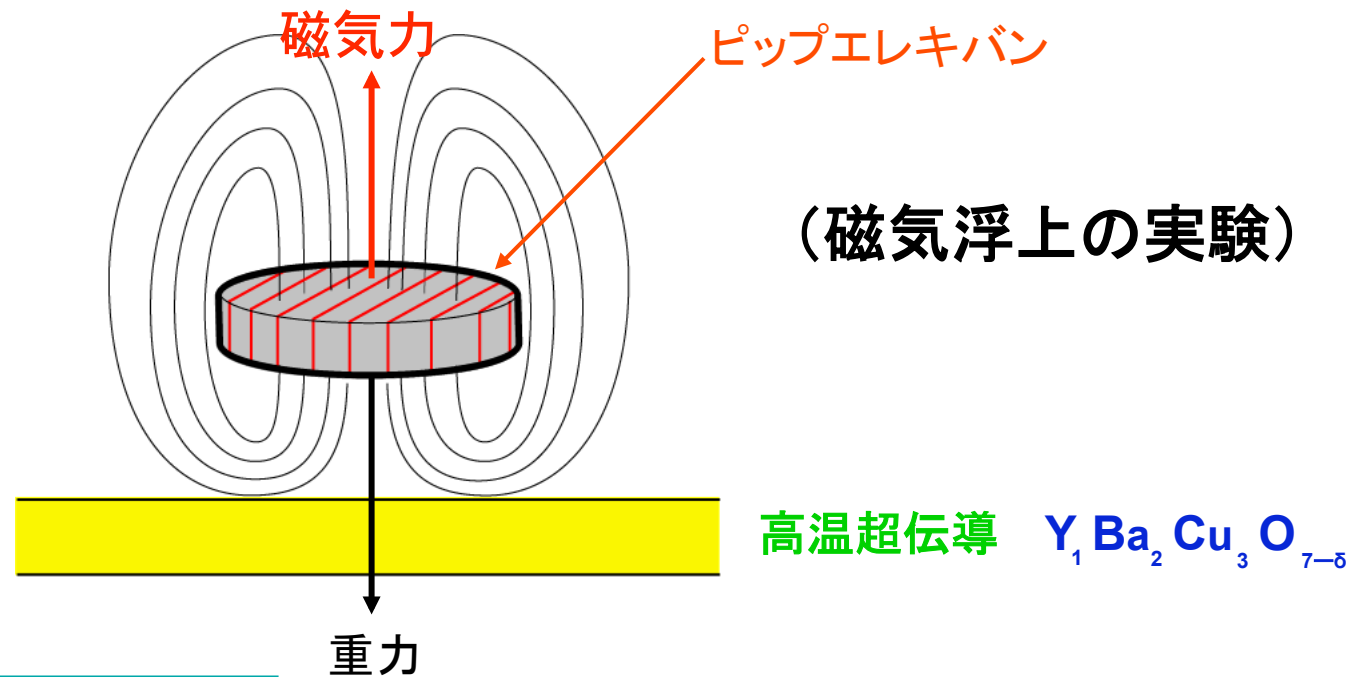
高温超伝導体($\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$) の抵抗の温度変化



YBCO系($\text{Y}_2\text{Ba}_4\text{Cu}_{6+n}\text{O}_y$, $n=0,1,2$) の結晶構造



[2] 完全反磁性



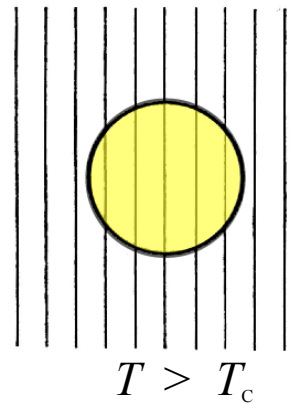
完全反磁性は $R=0$ からは
出て来ない

$$\rho = 0$$

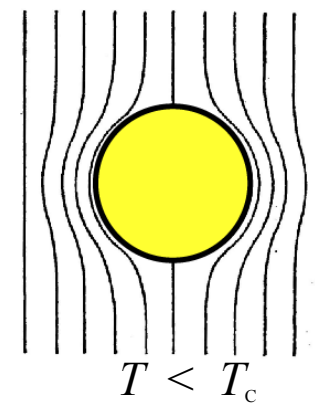
$$\frac{d\phi}{dt} = 0$$

$$\phi = \text{一定}$$

$T > T_c$ で常伝導



$T < T_c$ で超伝導

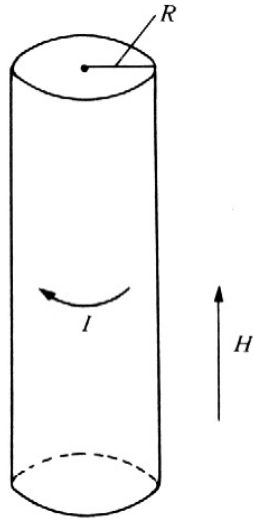


(磁束が追い出される)

デモ実験の写真 ー 磁気浮上 (2003. 6. 25.)



<超伝導の簡単な考察①>



超伝導体に磁場をかけた場合の電流の流れ（反磁場）

丸棒状の超伝導体があったとする（思考実験2）．丸棒の長さ方向を z 軸として z 軸に磁場 H_a をかける．超伝導体の十分内部には磁場は入らず，表面の厚さ λ 程度まで磁場が侵入しているとする（Londonの磁場侵入長 λ ）．

丸棒の半径方向を x ，それに垂直な方向を y としてMaxwell方程式 $j = \frac{c}{4\pi} \text{rot} B$ を考えると，電流密度 j は $j_y = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_z}{\partial x}$ となる．

今， $x=-\lambda$ から $x=0$ （超伝導体の表面）までこの表面電流を積分する！

$$I_y = \int_{-\lambda}^0 j_y dx = \left[-\frac{c}{4\pi} B_z \right]_{-\lambda}^0 = \frac{c}{4\pi} [0 - H_a] = -\frac{c}{4\pi} H_a$$

z 軸方向の単位長さ当たりの電流 I_y はの磁気モーメント M を作るので

$$M = -\pi R^2 \times \frac{I_y}{c} / (\pi R^2 \times 1) = -\frac{H_a}{4\pi}$$

$B = H + 4\pi M$ だから超伝導体の内部では磁束密度 B はゼロになる．

$\chi = -1/4\pi$ <完全反磁性> Meissner-Ochsefeld効果（1933）

<超伝導の簡単な考察②>

超伝導線で半径Rのループが作られている場合の
半古典物理的思考実験.

ループに電子が一つ最初止まっている. (非現実的だが, 半古典的思考実験)

このループに磁場をかけていきループを貫く磁束が, $\phi = \pi R^2 B$ になったとする. このときループに生じている (電子が感じている) 起電力はファラデーの法則から,

$$V = -\frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt} \quad \text{一方, } V \text{ はループに沿って電場 } E \text{ を積分したものだから, } V = 2\pi R E \text{ である.}$$

電子の電荷を $-e$ として, ニュートン方程式は $\frac{dp}{dt} = eE = F$ (=力) .

従って, これらの関係から, $\frac{dp}{dt} = \left(\frac{-e}{2\pi R c} \right) \frac{d\phi}{dt}$

ここで, $t=0$, $\phi=0$ で止まっていた電子の状態から出発し $t=t$ まで積分すると,

$$p = \left(\frac{-e}{2\pi R c} \right) \phi$$

ここで, 量子論的に de Broglie 波を導入する. すなわち,

$$p = \frac{2\pi}{\lambda} \hbar = \hbar k \quad \text{また, Bohr 条件から, } N\lambda = 2\pi R \text{ も導入する.}$$

(超伝導が量子力学的な状態であると仮定). これらの関係から,

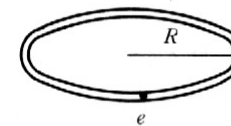
$$p = \frac{\hbar}{R} N \quad \text{と量子化され, 従って, 磁束 } \phi \text{ は } \phi = \frac{hc}{-e} N = \phi_0 N$$

$$\text{と量子化される} \Rightarrow \text{磁束量子} \quad \phi_0 = \frac{hc}{-e} = 4 \times 10^{-15} \text{ Wb}$$

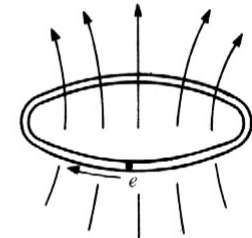
後に, 電子はクーペー対という 2 つの電子対に凝縮することが明らかになり, 磁束量子 ϕ_0 は $\phi_0 = \frac{hc}{-2e} = 2 \times 10^{-15} \text{ Wb}$

であることが, 理論的にも実験的にも明らかになる.

(a) $\phi = 0$

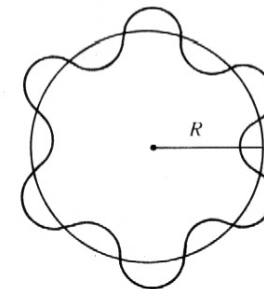


(b) $\phi = \pi R^2 B$



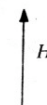
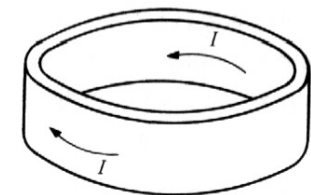
超伝導ループコイル (永久電流の思考実験)

(a) ループの中の電子 (b) (a) の状態に磁場をかけた場合



ボーアの量子条件

($\lambda N = 2\pi R$, λ は波長, N は整数)



超伝導体シリンダー

<超伝導の簡単な考察③>

抵抗のない回路の思考実験：完全導体（電気抵抗ゼロ）のループを考える．ループの面積を A とする．このループを貫く磁束を増やしていくと，Lenzの法則から，起電力 V が生じ電流 i が流れる（ R はループの抵抗（完全導体ではゼロ）， L はループのリアクタンスである）．

$$V = -A \frac{dB}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{だが、今、電気抵抗 } R=0 \text{（完全導体）なので、} \quad A \frac{dB}{dt} + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{となる．}$$

これを積分し， $AB + Li = \text{constant}$ となる．

これがループ回路を貫く全磁束なのだから，したがって，この完全導体を貫く全磁束は時間変化できないことを示している．もし，完全導体に最初に全く磁束が入っていなかったら，磁場を加えてもループに磁束は入らない．すなわち，この思考実験は完全導体に磁場をかけたときの超伝導体との類似点を示しているが，超伝導体と全く異なるのは，完全導体では

$\phi = AB + Li = \text{constant}$ の条件さえ満たせば良いということである．

これは超伝導体との決定的な違いである．なぜなら，完全導体と超伝導体が，高温の電気抵抗がある状態にあったとし，その状態で磁場を加えて試料内に磁束を導入し，そのままの状態で温度を下げ，完全導体状態（ $R=0$ ）と超伝導状態になった場合を考えると，完全導体では，磁束は入ったまま（磁束が変化しないだけで磁束が入ったままでもいっこうに不都合はない）であるのに対し，超伝導体では必ず磁束を排除しMeissner効果を生じることが実験的に認められているのである！

この思考実験は，超伝導体が単なる完全導体（ $R=0$ ）ではなく，それ以上の何者か（量子力学的状態）であることを明確に示している．

超伝導のGinzburg-Landau理論

$$F_s - F_n = \int d\mathbf{r} \left[-a|\psi|^2 + \frac{1}{2}b|\psi|^4 + \frac{1}{8\pi}(\text{rot}\mathbf{A})^2 + \frac{1}{4m} \left| -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \psi \right|^2 \right]$$

自由エネルギーのLandau展開

$$p \Rightarrow p + \frac{e}{c} A \quad \nabla \Rightarrow \nabla + \frac{e}{i\hbar c} A \quad B = \text{rot} A$$

<ゲージ変換, ゲージ不変性>

$$H = \int d\mathbf{r} \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^+(r) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \left\{ \nabla - \frac{ie}{\hbar c} A(r) \right\}^2 \psi_{\sigma}(r) + H_{\text{int}}$$

$$A' = A + \frac{\partial \chi}{\partial r} : \text{ベクトルポテンシャルのゲージ変換}$$

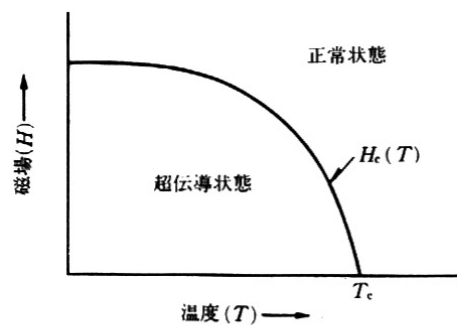
$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = a\psi - b|\psi|^2\psi : \text{GL方程式}$$

$$2\pi\sqrt{2}H_c\xi\lambda = \phi_0 \equiv \frac{\pi\hbar c}{|e|}$$

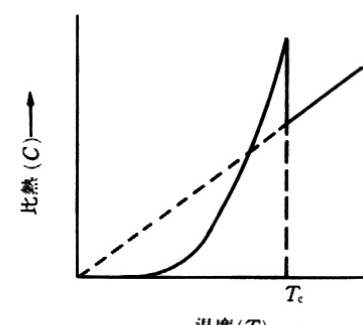
$$\sqrt{2}\kappa > 1 \Rightarrow H_{c2} > H_c : \text{第2種超伝導体}$$

$$\sqrt{2}\kappa < 1 \Rightarrow H_{c2} < H_c : \text{第1種超伝導体}$$

$$\kappa = \lambda/\xi = \sqrt{\frac{m^2 c^2 b}{2\pi\hbar^2 e^2}} \quad H_c = \sqrt{\frac{4\pi a^2}{b}} \quad H_{c2} = \frac{2mca}{\hbar|e|} = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2} = \sqrt{2}\kappa H_c$$



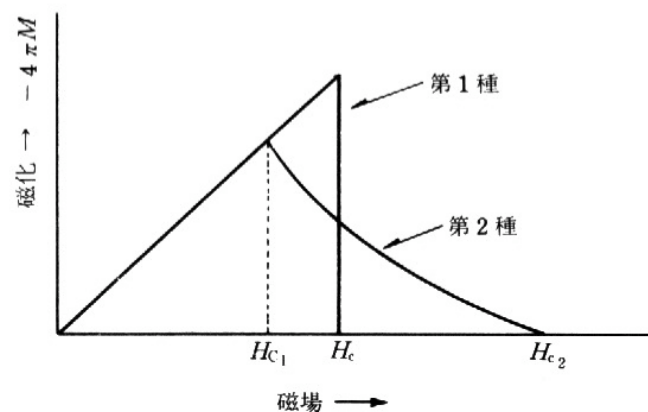
超伝導体の磁場と温度の関係 (相図)



超伝導体の比熱の温度変化

$$\psi \Rightarrow \psi_{\sigma}'(r) = \psi_{\sigma}(r) \exp\left\{ \frac{2ie}{\hbar c} \chi(r) \right\}$$

$$\theta = \frac{2e}{\hbar c} \chi(r) \quad \psi'(r) = \psi(r) \exp(i\theta)$$



超伝導体の磁化 (M) と磁場 (第1種, 第2種超伝導体)

超伝導のBCS (Bardeen, Cooper, Schrieffer) 理論

電子対（クーパー対）凝縮：電子のもつ波動性がマクロなスケールで出現することが本質

$$\langle \text{Bose粒子系の量子力学} \rangle \quad \left. \begin{aligned} [b_k, b_{k'}^+] &= \delta_{kk'} \\ [b_k, b_{k'}] &= [b_k^+, b_{k'}^+] = 0 \end{aligned} \right\} \quad H_B = \sum_k \hbar \omega_k b_k^+ b_k$$

$$\mathfrak{H} = H - \mu N \quad (N: \text{粒子数を表す演算子}, \mu: \text{化学ポテンシャル})$$

$\langle \text{位相表示} \rangle N^*$: 平均, n : ゆらぎ

$$\phi_\theta = \sqrt{\frac{1}{\Delta N}} \sum_{-\Delta N/2 < n < \Delta N/2} e^{in\theta} \phi(N^* + n) \quad \theta = \left(\frac{2\pi}{\Delta N} \right) l, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \frac{1}{2} \Delta N$$

$$\langle \phi_\theta | b_0 | \phi_\theta \rangle = (\Delta N)^{-1} \sum_n \langle \phi(N^* + n - 1) | b_0 | \phi(N^* + n) \rangle \approx N_0^{1/2} e^{i\theta}$$

電子と同じようにBose粒子を量子化された波と見なし、空間の各点 r で定義された演算子で記述する

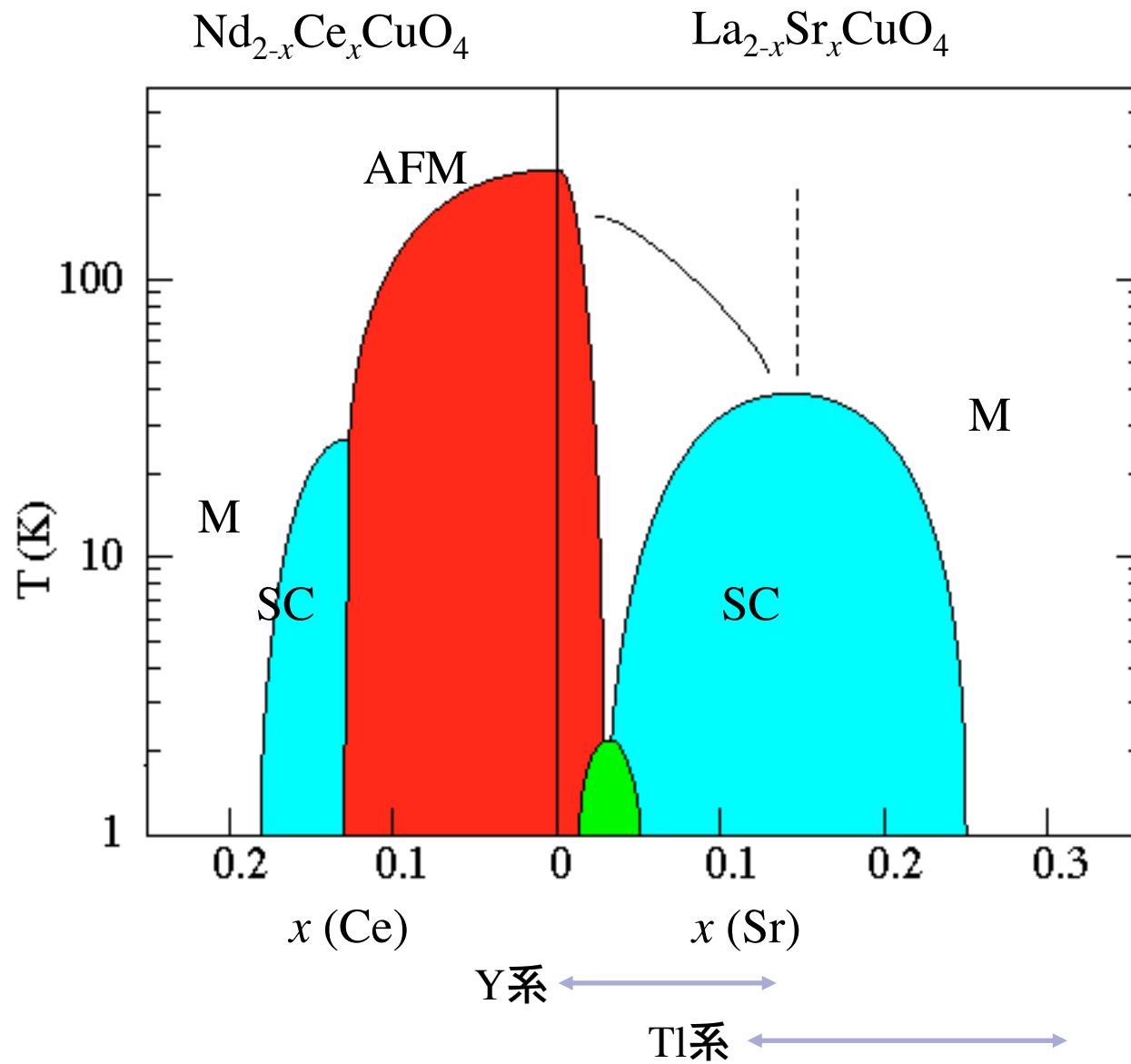
$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{ik \cdot r} b_k \quad \langle \psi(r) \rangle = \langle \phi_\theta | \psi(r) | \phi_\theta \rangle \approx \left(\frac{N_0}{V} \right)^{1/2} e^{i\theta} = \rho^{1/2} e^{i\theta}$$

$\langle \text{電子対} \rangle \quad \uparrow \uparrow \text{triplet} \quad \uparrow \downarrow \text{singlet}$

重心が静止し逆向きのスピンをもった電子対の消滅・生成 $B_k = a_{k\uparrow} a_{-k\downarrow}$, $B_k^+ = a_{-k\downarrow}^+ a_{k\uparrow}^+$

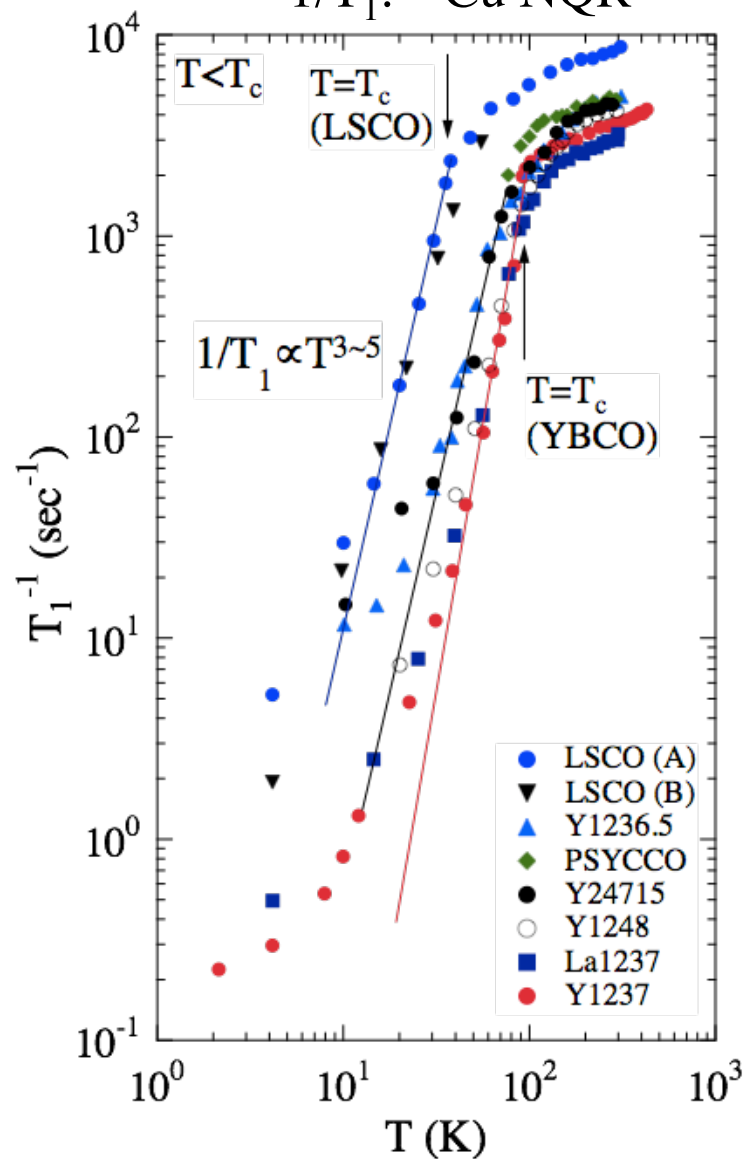
$$\text{フェルミガス状態: } \phi_F = \prod_{k < k_F} B_k^+ \phi_V \quad (\phi_V \text{は真空状態を表す})$$

高温超伝導体の電子状態の相図



銅酸化物高温超伝導体の核磁気緩和

$1/T_1$: ^{63}Cu NQR



(Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 1002; 71 (1993) 1254.)

