Chapter 1

電磁気学に用いるベクトル公式集

1.1　スカラー，ベクトル，テンソル

直角座標 (x_1, x_2, x_3) から (x'_1, x'_2, x'_3) への，原点を不動点とする座標回転（直交変換）を

$$x'_i = \sum_j U_{ij}\ x_j \quad , \quad x_j = \sum_j (U^{-1})_{ji}\ x'_i \qquad \text{（} \sum_j \text{ は } \sum_{j=1}^{3} \text{ の省略形。以下同様）} \tag{1.1}$$

とする。$\tilde{U}$ を U の転置行列として，係数行列 $\{U_{ij}\}$ は

$$\text{（直交条件）} \quad \sum_k U_{ki}U_{kj} = \delta_{ij} \qquad \text{したがって} \quad {U^{-1}}_{ij} = \tilde{U}_{ij} = U_{ji} \tag{1.2}$$

を満たす。この座標変換で成分が

$$A'_i = \sum_j U_{ij}\ A_j \tag{1.3}$$

のように，座標と同じ形で変換される量 を **ベクトル**,

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} U_{ik}\ T_{kl}\ {U^{-1}}_{lj} = \sum_{k,l} U_{ik}\ U_{jl}\ T_{kl} \tag{1.4}$$

のように変換される量を**テンソル**という。変換を受けない量が**スカラー**である。

この定義に従えば，あとで出てくる**ナブラ**演算

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \frac{\partial}{\partial x_2}, \ \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \qquad \text{（**注**}\quad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z \text{ である）}$$

は以下のようにしてベクトルであることが示される：

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\ \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j (U^{-1})_{ji}\ \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j U_{ij}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\ , \quad \text{したがって} \quad \nabla'_i = \sum_j U_{ij} \nabla_j$$

また，２つのベクトルの**スカラー積**は，以下のように座標変換では変換されず，スカラーである：

$$\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B}' = \sum_i A'_i B'_i = \sum_i \sum_k \sum_l U_{ik}U_{il}\ A_k B_l = \sum_k \sum_l \delta_{kl} A_k B_l = \sum_k A_k B_k = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

さらに，２つのベクトル量が比例関係（線形関係）にあるとき，その比例係数は一般にテンソル量である。例えばベクトル $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{E}$ が比例関係にあり，その各成分が比例係数 $\{\epsilon_{ij}\}$ を用いて

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij}\ E_j$$

で関係づけられているとき，座標変換 (1.1) に対するベクトルの変換公式を用いれば

$$D'_i = \sum_k U_{ik}\ D_k = \sum_k U_{ik}\ \sum_l \epsilon_{kl}\ E_l = \sum_k \sum_l U_{ik}\ \epsilon_{kl}\ \sum_j {U^{-1}}_{lj}\ E'_j = \sum_j \left(\sum_k \sum_l U_{ik}\ \epsilon_{kl}\ {U^{-1}}_{lj} \right) E'_j$$

となる。（　）が変換後の座標系における比例係数 $\{\epsilon'_{ij}\}$ で，ちゃんとテンソルの変換の約束に従っている：

$$\epsilon'_{ij} = \sum_{k,l} U_{ik}\ \epsilon_{kl}\ {U^{-1}}_{lj} = \sum_{k,l} U_{ik}\ U_{jl}\ \epsilon_{kl}$$

1.2　かけ算公式

ある方向の単位ベクトル（長さ１のベクトル）を $\boldsymbol{e}$，また，x，y，z 方向の単位ベクトルを，それぞれ $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ と書く。（以下共通）

スカラー積　$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.5}$$

ベクトル積　$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{e}_z \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\ , \quad |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = AB\sin\theta \tag{1.7}$$

$\boldsymbol{A}$ の成分分解　$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_\parallel + \boldsymbol{A}_\perp\ , \quad \boldsymbol{A}_\parallel = (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{e}\ , \quad \boldsymbol{A}_\perp = (\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{A})\} \tag{1.8}$$

スカラー３重積　$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.9}$$

これは，３つの右手系ベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ で作られる平行６面体の体積を表す。

ベクトル３重積　$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{1.10}$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} \tag{1.11}$$

ヤコビの恒等式　$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = 0 \tag{1.12}$$

４重積　$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) &= \{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}\}\cdot\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\cdot\{\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\} \\ &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \qquad (1.13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) &= \{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{D}\}\boldsymbol{C} - \{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\}\boldsymbol{D} \\ &= \{\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\}\boldsymbol{B} - \{\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\}\boldsymbol{A} \qquad (1.14)\end{aligned}$$

平行条件 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0$ (1.15)

直交条件 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ (1.16)

同一平面条件 $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = 0$ (1.17)

1.3 微分公式

ナブラベクトル $\nabla = \boldsymbol{e}_x \dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \dfrac{\partial}{\partial z}$ (1.18)

勾配 $\nabla \phi = \mathrm{grad}\ \phi = \boldsymbol{e}_x \dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \dfrac{\partial \phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \dfrac{\partial \phi}{\partial z}$ (1.19)

発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$ (1.20)

回転 $\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$ (1.21)

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi \tag{1.22}$$

$$\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi \tag{1.23}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \tag{1.24}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B} \tag{1.25}$$

$$\nabla \cdot (\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\phi \cdot \boldsymbol{A} + \phi\nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{1.26}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{1.27}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{1.28}$$

$$\nabla \times (\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\phi \times \boldsymbol{A} + \phi\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.29}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \tag{1.30}$$

$\boldsymbol{A} \cdot \nabla = A_x \dfrac{\partial}{\partial x} + A_y \dfrac{\partial}{\partial y} + A_z \dfrac{\partial}{\partial z}$ （$\boldsymbol{A} \cdot \nabla \neq \nabla \cdot \boldsymbol{A}$ に注意） (1.31)

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\phi = \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\phi) \tag{1.32}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_x)\boldsymbol{e}_x + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_y)\boldsymbol{e}_y + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_z)\boldsymbol{e}_z \tag{1.33}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\phi\boldsymbol{B} = \phi(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi) \tag{1.34}$$

２階微分　ラプラシアン:　$\nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ (1.35)

これに対して，ベクトル積は　$\nabla\times\nabla = 0$ (1.36)

$$\mathrm{div\ grad}\ \phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi \tag{1.37}$$

$\mathrm{rot\ grad}\ \phi = \nabla\times\nabla\phi = 0$　**（渦なし場）** (1.38)

$\mathrm{div\ rot}\ \boldsymbol{A} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = (\nabla\times\nabla)\cdot\boldsymbol{A} = 0$　**（湧き出しなし場）** (1.39)

$$\mathrm{rot\ rot}\ \boldsymbol{A} = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{1.40}$$

$$\mathrm{grad\ div}\ \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{1.41}$$

ヘルムホルツの分解定理

任意のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は，渦なし場（$\mathrm{rot} = 0$）と湧き出しなし場（$\mathrm{div} = 0$）に一意的に分解される：

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}\ \phi + \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} \tag{1.42}$$

（その他）

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \nabla\phi\cdot\nabla\psi + \phi\nabla^2\psi \tag{1.43}$$

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi \tag{1.44}$$

（r，$\boldsymbol{r}$ に対する演算）

$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y + \boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z$,　$r\mathrm{d}r = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$,　$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$　etc　より

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = r\ \mathrm{d}r \tag{1.45}$$

$$\nabla r = \mathrm{grad}\ r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1.46}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{r} = 3 \tag{1.47}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{r} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{r} = 0 \tag{1.48}$$

1.4　積分公式

以下では，S は任意の閉曲面，$\mathrm{V_S}$ は S で囲まれた空間領域，$\boldsymbol{n}$ は S 上の各点で外向きに向かう法線ベクトル（単位ベクトル）とする。$\phi(\boldsymbol{r})$ はスカラー場，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ はベクトル場である。また，$\oint$ は，閉じた閉曲面（または閉曲線）に沿った積分であることを強調する意味で用いる。

$$\int_{\mathrm{V_S}} \nabla\phi \ \mathrm{d}V = \oint_{\mathrm{S}} \phi \ \boldsymbol{n} \ \mathrm{d}S \tag{1.49}$$

$$\int_{\mathrm{V_S}} \nabla\cdot\boldsymbol{A} \ \mathrm{d}V = \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} \ \mathrm{d}S \qquad \textbf{（ガウスの定理）} \tag{1.50}$$

$$\int_{\mathrm{V_S}} \nabla\times\boldsymbol{A} \ \mathrm{d}V = \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A} \ \mathrm{d}S \tag{1.51}$$

$$\int_{\mathrm{V_S}} (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi) \ \mathrm{d}V = \oint_{\mathrm{S}} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n} \ \mathrm{d}S \qquad \textbf{（グリーンの定理）} \ \leftarrow (1.44)\text{ より} \tag{1.52}$$

以下では，C は閉曲線，$\mathrm{S_C}$ は C を境界とする曲面，$\boldsymbol{n}$ は $\mathrm{S_C}$ 上の各点における法線ベクトルで，C 上の積分方向に対し「右ねじ」の進む方向を正の向きとする。

$$\int_{\mathrm{S_C}} \boldsymbol{n}\times\nabla\phi \ \mathrm{d}S = \oint_{\mathrm{C}} \phi \ \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.53}$$

$$\int_{\mathrm{S_C}} (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n} \ \mathrm{d}S = \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \textbf{（ストークスの定理）} \tag{1.54}$$

$$\int_{\mathrm{S_C}} (\boldsymbol{n}\times\nabla)\times\boldsymbol{A} \ \mathrm{d}S = \oint_{\mathrm{C}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A} \tag{1.55}$$

1.5　曲線座標

以下では，$f(\boldsymbol{r})$ はスカラー場，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ はベクトル場とする。直角座標以外では一般に，$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\alpha \neq \nabla^2 A_\alpha$ である。最後の $\nabla^2\boldsymbol{A}$ に対する公式は，見つけにくいので保存しておくと便利である。

（円柱座標）　$(r,\ \varphi,\ z)$

$$\text{体積要素}\quad \mathrm{d}V = r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}z \qquad\qquad \text{線分要素}\quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{1.56}$$

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}\ , \quad (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r}\ \frac{\partial f}{\partial\varphi}\ , \quad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.57}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.58}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \boldsymbol{A})_r &= \frac{1}{r}\ \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\
(\nabla \times \boldsymbol{A})_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\
(\nabla \times \boldsymbol{A})_z &= \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r}\ \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}
\end{aligned} \tag{1.60}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 \boldsymbol{A})_r &= \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
(\nabla^2 \boldsymbol{A})_\varphi &= \nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\ \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \\
(\nabla^2 \boldsymbol{A})_z &= \nabla^2 A_z
\end{aligned} \tag{1.61}$$

（球座標）　$(r,\ \theta,\ \varphi)$

体積要素　$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$　　線分要素　$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\ \mathrm{d}\varphi^2$ (1.62)

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}\ ,\quad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r}\ \frac{\partial f}{\partial \theta}\ ,\quad (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \tag{1.63}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\ \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{1.64}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{1.65}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \boldsymbol{A})_r &= \frac{1}{r\sin\theta}\ \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] \\
(\nabla \times \boldsymbol{A})_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \\
(\nabla \times \boldsymbol{A})_\varphi &= \frac{1}{r}\ \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]
\end{aligned} \tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 \boldsymbol{A})_r &= \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\ \left[A_r + \frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right] \\
(\nabla^2 \boldsymbol{A})_\theta &= \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2}\ \left[\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right] \\
(\nabla^2 \boldsymbol{A})_\varphi &= \nabla^2 A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin\theta}\ \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \cot\theta\ \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{2\sin\theta}\right]
\end{aligned} \tag{1.67}$$