ローレンツ変換

ある座標系 S の座標と時刻を x, t と置き、S に対して速度 v で運動する座標系 $S^{'}$ の座標と時刻をそれぞれ $x^{'}, t^{'}$ とする。また、光速を c とする。S 系で $t = 0$ に出発した光は $t = t$ に x に到達し、関係式 $x^2 - (ct)^2 = 0$ を充たす。一方、$t' = 0$ で S' 系と S 系の原点が一致していたとして、$t' = t'$ に到達した点の位置を x' とすると $x' - (ct')^2 = 0$ を充たす。ここで光速度不変の原理から光速度 c を定数とした。従って

$$x^2 - (ct)^2 = x^{'2} - (ct^{'})^2$$

が成立する。ここで、$ct = \tau$ と置くと

$$x^2 - \tau^2 = x^{'2} - \tau^{'2} \tag{1}$$

が成り立つ。また、S,S' 系の変換は線形変換で結ばれるものとして以下のように書けるとする。

$$\begin{cases} x^{'} &= ax + b\tau \\ \tau^{'} &= fx + g\tau \end{cases} \tag{2}$$

ローレンツ変換は単にこの変換に現われる未知定数 a, b, f, g を決定することで決まる。

$S^{'}$ の原点は S 系からみると $x = vt$ の軌跡に沿って動くので $(x^{'} = 0)$

$$x = \beta\tau \quad \text{但し} \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \quad \text{また、} x = -\frac{b}{a}\tau \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = -\frac{b}{a}$$

ここで、式 (2) を式 (1) に代入すると

$$x^2 - \tau^2 = (a^2 - f^2)x^2 \ + \ 2(ab - fg)x\tau + (b^2 - g^2)\tau^2$$

$$\therefore \quad \begin{cases} f^2 &= a^2 - 1 \\ ab &= fg \\ g^2 &= b^2 + 1 \end{cases} \tag{3}$$

となる。よって式 (3) より

$$\begin{cases} a & = & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ b & = & \mp\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ f & = & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ g = & = & \mp\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \tag{4}$$

である。これを式 (2) に代入すると、

$$\begin{aligned} x^{'} &= \pm\frac{x-\beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \tau^{'} &= \pm\frac{\beta x-\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

を得る。ここで、$\beta \to 0$ で、$x^{'} \to x, \tau^{'} \to \tau$ より、以下のように符号が決まる。

$$\begin{aligned} x^{'} &= \frac{x-\beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \tau^{'} &= \frac{\tau-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

これがローレンツ変換の最終表式である。また逆に S' 系から S 系への変換は

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'+\beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \tau &= \frac{\tau'+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

となる。このことは相対性原理すなわち S 系が S' 系に相対的に $-v$ で動いていることから分かる。

速度の合成

S 系で測定した質点の位置、速度をそれぞれ u, x,S' 系における位置、速度を x', u' とする。ローレンツ変換によると、位置、時間の微小変化は

$$dx = \frac{dx'+vdt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad cdt = \frac{cdt'+\beta dx'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5}$$

という変換式で結ばれる。但し dx は x の S 系での微小変化を表す。速度 u は dx/dt と等しいので

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'} \tag{6}$$

となる。

例として $u' = v = 3c/4$ とすると

$$u = \frac{3c/2}{1 + 9/16} = \frac{24}{25}c \tag{7}$$

となる。このように速度の合成によって光速 c を越える事はない。

ローレンツ収縮

S 系から S' 系に静止している棒 (魚でもなんでもいい) を観測することを考える。その棒は両端が S' 系の原点と $x' = L'$ にあるとする。既述のローレンツ変換の式を S 系での時刻 $t = 0$ で用いると S 系からの観測では $x' = L'$ は $x \equiv L = L'\sqrt{1-\beta^2}$ になる。原点は同じ所に変換されるので、動いている物体の長さは

$$L = L'\sqrt{1-\beta^2} \tag{8}$$

に縮む。このように光速度不変の原理と慣性系の同一性 (相対性原理) からフィツジェラルド＝ローレンツ収縮の式は導かれる。このことから明らかな様にポアンカレがローレンツ収縮を独立な原理とおいた事は相対論を理解しようとしていなかったことを意味する。

同じ系でローレンツ収縮と同時に同時刻の相対性が言える。S 系での時刻 $t = 0$ で速度 v で動く棒の両端の位置を観測したのであるが、S' 系での時刻の変換式を見てみると、原点での時刻は一致しているが、もう一方の端は時刻 $t' = -vL/c^2$ に観測したことになる。つまり S 系で同時測定を行っても、S' 系では同時刻に測定したことになっていない。このように同時刻という事も相対的な概念でしかない。

時計の遅れ

同時刻の相対性を考えると、時計の動きにも変化があってしかるべきであろう。S' 系の原点に静止した時計が $t' = 0$ を刻んだときと $t' = T'$

を刻んだときの時間差T'をS系で観測する。その場合もローレンツ変換の式を用いればS系では各時刻が$t=0$と$t=T'/\sqrt{1-\beta^2}$に変換される。従ってS系での時間差は

$$T = T'/\sqrt{1-\beta^2} \tag{9}$$

であり、S系では時間が早く経過したことになる。

　これらのパラドキシカルな結果は時間や空間を独立に考え、経過時間や物の長さが変わる筈がないという直観に相反するためである。しかしその直観は光速度よりずっと遅い日常経験に基づくものであって、何も根拠のあるものではなかった。むしろ相対論が光速度不変と慣性系の同一性を基本原理として諸々の矛盾を解決し、ローレンツ変換で不変であったMaxwell方程式とそうではなかった力学を統一して扱う基礎を与え、不自然なエーテル仮説を排したのである。しかしローレンツは相対論を全て理解した上でもやはり、では何故真空中を波が伝わるのかという問に悩み続けた。この事も同年(1905)にアインシュタインが光量子仮説を提唱し解決法の示唆があったが、根本的な解決は量子力学の誕生まで待たねばならなかった。