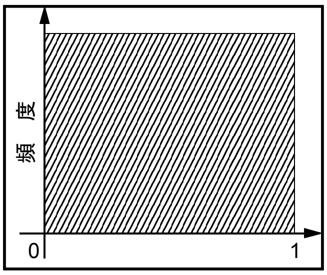
第 2 講：表計算ソフトウェアによるデータ処理（その 2）

1. 乱数

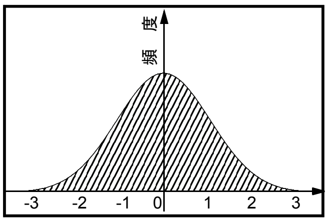
「乱数」は日常生活ではあまり使わない言葉である．乱数(random number)とは何の規則性もなくデタラメに並んだ数の集まりである. 例えば, マッチ棒や爪楊枝のような細棒を 1 本ずつ無造作に床に落としたとする．このとき，細棒の向きはバラバラでデタラメのはずである．そこで，どこかに基準線をとり，基準線と細棒のなす角度を 1 本 1 本調べていくと，0 ～ 180 の数値がデタラメに得られことが予想される．これが乱数である．

乱数を計算によって発生させる手法（アルゴリズム），言い換えるとコンピュータに乱数を発生させる方法が種々研究されている. しかし, 計算によって乱数を発生させた場合, 最初のうちはよいが，やがて同じ数が繰り返し現れてしまうという宿命がある．よい乱数列とは，繰り返し周期ができるだけ長いものであり，長い周期の 1 周期内に限って利用すれば，実用上必要十分ということになる．乱数列発生アルゴリズムによって得られる乱数は，本当は乱数もどきなので，擬似乱数(pseudo-random number)と呼ばれる．

なぜコンピュータにわざわざ乱数を発生させるのかというと，乱数がシミュレーションに使えるからである．確率的に at random な数値は複雑でデタラメな現象のシミュレーションに欠かせない．これには種々のゲームも含まれる．



最もポピュラーな乱数は，0 ～ 1 の実数（小数）がデタラメに発生する一様乱数である．例えば，一様乱数 U を 1 万個発生させる．各 U の値は当然 $0 \leqq U \leqq 1$ である．このとき，1 万個の U を 0.1 刻みに等級区分すると，各階級に含まれる U の個数は約 1,000 個になる．発生させる乱数の数 N を増やしていくと，各階級に含まれる乱数の個数は限りなく $N/10$ に近づく．N を大きくすると同時に階級幅を狭くすると，発生頻度を表すヒストグラムは左図のような矩形になる．つまり，一様乱数とは，任意の区間において一様な頻度で乱数が発生することを表している．



一様乱数から他の確率密度曲線にしたがう乱数を発生させることもできる．一例としてボックス・ミュラー法による**正規乱数**の発生を紹介する．

互いに独立な 2 つの一様乱数 U_1，U_2 ($0 \leqq U_1, U_2 \leqq 1$)があるとき，

$Z_1 = (-2\log_e U_1)^{0.5}\cos 2\pi U_2$， $Z_2 = (-2\log_e U_1)^{0.5}\sin 2\pi U_2$

で得られる Z_1，Z_2 は標準正規分布（平均値 0，標準偏差 1）にしたがう互いに独立な正規乱数となる（左図）．

Excel には 0 〜 1 の一様乱数を発生させる組込関数 rand()が用意されている（カッコの中はブランク）．この組込関数は乱数発生のリクエストがあると，あるアルゴリズムから定義される一様乱数を 1 個ずつ出力する．rand()が発生できる乱数の値は厳密には，

$$0 \leqq \mathrm{rand}() \leqq 1 \quad (x：整数)$$

であるが，rand() = 0 あるいは rand() = 1 となる可能性は非常に低いので，実用上は，

$$0 < \mathrm{rand}() < 1$$

と考えてよい．つまり，0 や 1 に非常に接近した値は発生しうるが，ちょうど 0 や 1 になることはまずない．

例えば，rand()を用いて 0 〜 9 の整数値を無作為に発生させたいという場合には，

=int(10*rand())　　（int()は整数化の組込関数，小数点以下は切り捨て）

のような数式をセルに埋め込めばよい．

2. 乱数とシミュレーション

複雑現象を解明するために，数学的モデルに乱数を導入して行われる計算技法は，しばしば**モンテカルロ法**と呼ばれる．この名前はカジノで有名な街・モンテカルロに由来している．モンテカルロ法では，大量の乱数を発生させて計算機の中で繰り返し実験を行い，多数回の実験結果から何らかの普遍的な共通因子を抽出する．

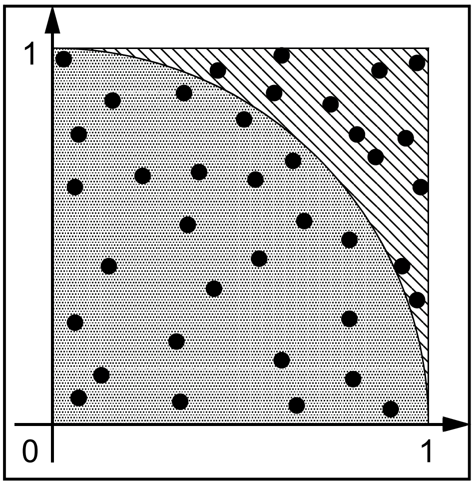
コンピュータの応用分野であるシミュレーション問題のうち，ランダムな要素を含むものは全てモンテカルロ法の対象となり得る．確率とは本来無関係な問題であっても，問題となる方程式などの構造を調べることにより，それがある確率事象を表していることを見いだせば，モンテカルロ法で数値的に解いて近似解を得ることができるのである．

人によっては毎日のように乱数にお世話になっているかもしれない．すなわち，それはゲームである．例えば，主人公（プレイヤ・キャラクタ）がモンスターとの戦いで勝利できる確率 P が最初は $P = 0.5$ だとする．戦いのイベントがやってきたとき，一様乱数 U を発生させて，$P > U$ ならば主人公の勝ち，$P < U$ ならばモンスターの勝ちと決めておく．この場合，勝つか負けるか 5 分 5 分である．ゲームの仕様として，勝ち進むにつれ P の値がだんだん大きくなる（経験値が増える）ようにしておけば，それは主人公が強くなることに相当する．

そのほかに，競走馬育成ゲームや，お姫様養育ゲームなど，いわゆる「育てゲー」はコンピュータ・シミュレーションそのものである．

3. 円周率を求める

「確率とは本来無関係な問題であっても，問題となる方程式などの構造を調べることにより，それがある確率事象を表していることを見いだせば，モンテカルロ法で数値的に解いて近似解を得ることができる」と先に述べたが，その一例として円周率πをモンテカルロ法で求めてみる．



左図の各点の座標$(x,\ y)$について，$x^2 + y^2 \leqq 1$ のとき，点 (x, y) は半径 1 の 4 分円の内側にあり，逆に$x^2 + y^2 > 1$ のとき，この点は円の外側にあることになる．

ここで 0 ～ 1 の一様乱数を 2 つ 1 組で n 組発生させ，それぞれを座標$(x,\ y)$に対応させることにする．このうちの m 組が $x^2 + y^2 \leqq 1$ を満たすとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \frac{\pi}{4}$$

が成り立つ（半径 1 の 4 分円の面積は$\pi/4$）．

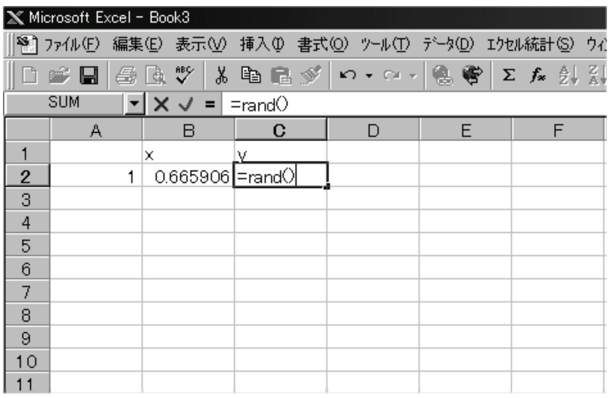
したがって，n が十分に大きいときには円周率πの近似値として，

$$\pi = \frac{4m}{n}$$

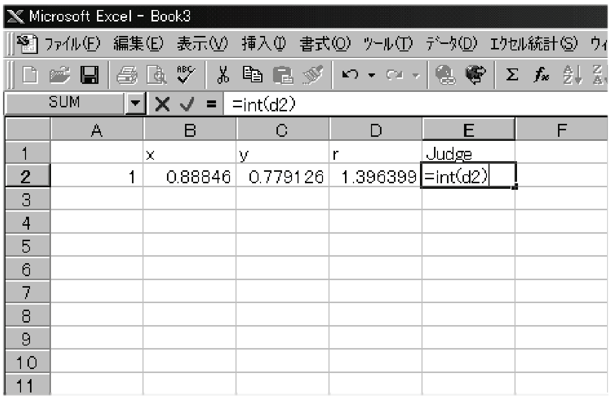
が得られることになる．

イメージとしては，n 本の針を篩（ふるい）を揺すって落としたときに，円の内側に刺さった本数 m を数えるようなものである．

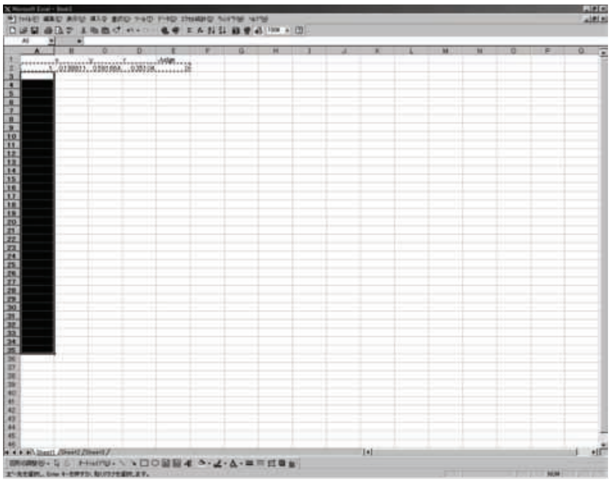
以下では「モンテカルロ法による円周率計算」を Excel で行う．



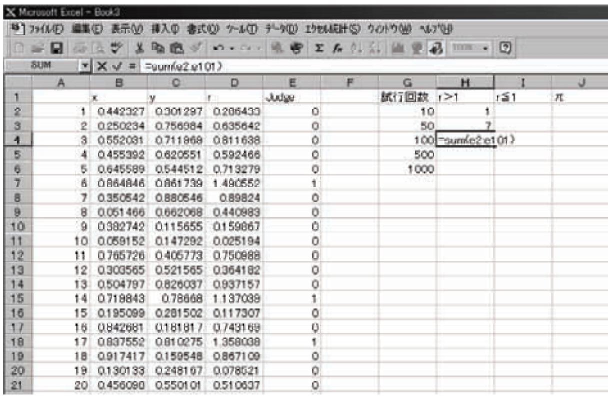
①まず，x と y の座標データを作成する．a2 セルに「=a1+1」，b2 セルと c2 セルに「=rand()」と入力する（左図）．A 桁はデータの連番用である．組込関数 rand()は一様乱数の値を返すもので，入力すればたちどころにその値（-1 ≦ rand()≦ 1）が表示される．また，ワークシートの一部を書き換えるような操作を行うと，全ての rand() がリフレッシュされる（新たな乱数列が発生する）．



② d2 セルに「=sqrt(b2^2+c2^2)」と入力する．これは当該座標と原点との距離 r を求めている．組込関数 sqrt は平方根を求めるものであるが，今回の場合使用しなくてもよい．さらに e2 セルに「=int(d2)」と入力する（左図）．r の値が 1 より大きければ e 桁には 1 が表示されることになる．



③ a2 〜 e2 セルを範囲指定（**Shift キー**を押しながら矢印キーで反転させる）してメモリにコピー（**Ctrl+C キー**）する．a3 〜 a1001 セルを範囲指定して（左図），コピー内容をペースト（**Ctrl+V キー**）する．一気に 1000 個分のデータが出来上がる．

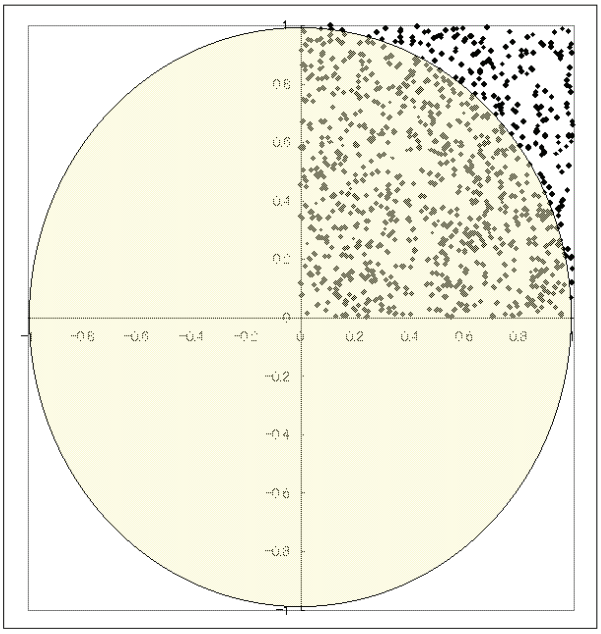


④当該座標と原点との距離 r が 1 よりも大きかった回数は，e 桁に表示された 1 の個数を数えればわかる．e 桁には 1 か 0 しかないので，任意の範囲のセルの値を合計すれば，その範囲で 1 を超えた回数が得られる．そこで，h2 セルに「=sum(e2:e11)」（試行回数 10 回），h3 セルに「=sum(e2:e51)」（試行回数 50 回），h4 セルに「=sum(e2:e101)」（試行回数 100 回）のように数式を入力しておく（左図）．

⑤ ④とは逆に，「r が 1 以下であった回数」は，「r が 1 よりも大きかった回数」を試行回数から引けばよい．そこで，i2 セルに「=g2-h2」と入力し，これを i3 〜 i6 セルにコピー&ペーストする（G 桁には試行回数を入力しておく）．

> r の値が 1 よりも大きいか小さいかを，不等号式を使わずに判定できるかどうかがポイント！
>
> ここでは int 関数の性質（小数点以下は切り捨て）をうまく利用して，r の値が 1 より大きいかどうかを判断した．
>
> 詳細は省くが，Excel に用意されているデータベース関数などを使えば，条件に当てはまる数の個数などを直接的に求めることも出来る（ただし，引数の設定などが面倒）．

G	H	I	J
試行回数	r>1	r≦1	π
10	3	7	2.8
50	16	34	2.72
100	23	77	3.08
500	92	408	3.264
1000	214	786	3.144



⑥　⑤で求めた r が「1 以下であった回数」を試行回数で除して 4 倍すれば，求めるべき π の近似値が得られる．そこで，j2 セルに「=i2/g2*4」と入力し，これを j3 ～ j6 セルにコピー＆ペーストする（左図）．

データの入っていない適当なセルをアクティブにして（カーソルを合わせておいて），例えば **DEL キー**を押すと，ワークシートの一部が改変されたことになり，組込関数 rand()が使用されている x と y の値が瞬く間に変化する．これに連動して J 桁の π の値も変化するはずである．**DEL キー**を連打すれば値が次々と変化するであろう．同時に，試行回数が多い方が真値(3.141592...)に近づく傾向は変わらないが，使用している乱数列によってシミュレーションが真値に近づいたり，逆に離れたりする様子がわかるはずだ．

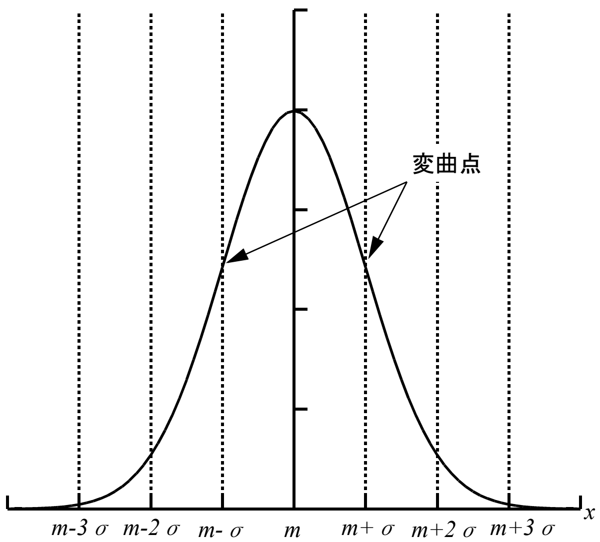
左図は 1000 個の(x, y)座標をプロットしたものに，半径 $r = 1$ の円を重ねたものである．

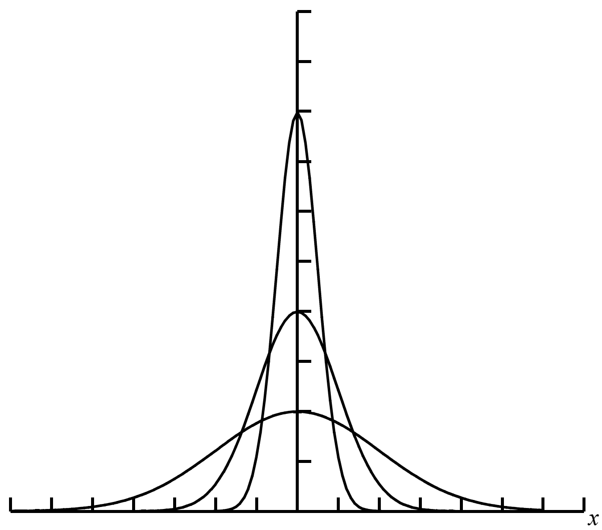
4. 成績シミュレーション

京大生の多くは受験生時代に「偏差値」の大小に一喜一憂した覚えがあるだろう．偏差値とはある受験者のテストの得点が全受験者の中でどのくらい秀でているのかを客観的に数値化したもので，次の式で算出される．

偏差値 ＝ （得点 － 平均点）／標準偏差 × 10 ＋ 50 (1)

この数式の意味を少し詳しく考えてみよう．





まず前提として，全受験者の得点は正規分布すると考える．得点のヒストグラムを描いたとき，その形が平均値 m を中心とする左右対称な釣鐘型分布になる（上左図）．この分布の重要なパラメータが標準偏差 σ である．図形的には，平均値 m から正規分布曲線の変曲点までの距離が σ に相当する．全受験者の得点が平均値 m に接近していて（得点のばらつきが小さい），分布形が尖っていると σ の値は当然小さくなり，逆に σ が大きいと，高得点や低い得点が混在した平坦な分布になる（得点のばらつきが大きい）．上右図は平均値 m が同じで σ が異なる 3 つの正規分布を重ね書きしたものである．

正規分布では標準偏差 σ を物差しとしていろいろな事象を確率的に見積もることができる．例えば，上左図の曲線について $m \pm \sigma$ の範囲の面積は全体の約 68 %になる．テストの成績に限らず，正規分布にしたがう事象が発生したとき，過半数はこの $m \pm \sigma$ の範囲に収まってしまうのである．$m \pm 2\sigma$ では全体の約 95 %，さらに $m \pm 3\sigma$ では 99.5 %ほどになる．したがって，正規分布にしたがう事象のほとんどは $\pm 3\sigma$ の範囲内で発生していると見なせる．ただし，中にはとんでもなく得点の低い者や高い者がいて，3σ の境界線を越えてしまうことがある．これはなかなか発生しにくいレアケースといえる．

偏差値を求める式(1)の第 1 項では，ある受験者の得点と平均点の差（これを偏差といいます）を求め，これを標準偏差で除すことにより，何 σ 分平均値から離れているかを求めている．もし得点と平均点が一致すれば偏差値は 50，3σ 分高得点側にはずれていれ

ば，偏差値は 80 となる．偏差値 80 がしばしばすばらしい成績の目安として取り上げられるが，これは成績上位者の 0.25 %に入っている（受験者 1 万人に対して上位 25 名以内），すなわち，レアケースといえるからである．

では，何かの試験の結果をシミュレーションするには，どのようなことに気をつければよいだろうか？

各受験者の得点（100 点満点）を乱数で決定すればいいことにはすぐ気づくだろうが，この得点分布が正規分布になっていなくてはならない．単純に組込関数 rand()を用いたのでは，得点分布は一様分布になってしまう．そこで，冒頭で紹介したボックス・ミュラー法によって正規乱数（正規分布にしたがう乱数）を発生させることにする．ボックス・ミュラー法では，2 つの一様乱数 U_1, U_2 を使って，次式によって正規乱数 Z_1, Z_2 を得る．

$$\begin{cases} Z_1 = (-2\log_e U_1)^{0.5}\cos 2\pi U_2 \\ Z_2 = (-2\log_e U_1)^{0.5}\sin 2\pi U_2 \end{cases} \tag{2}$$

正規乱数 Z は，平均値 0，標準偏差 1 の標準正規分布にしたがうもので，$\pm\sigma$ (=± 1)の範囲の値が約 68 %の確率で，1 σ ～ 2 σ (=1 ～ 2), -1 σ ～-2 σ (=-1 ～-2)の範囲の値が約 27 %の確率で，それよりも絶対値の大きい値が約 5%の確率で発生する．± 3 σ (=± 3)を超えるような値は滅多に発生しないが，ゼロではない．

ある科目 a の平均点を m_a に，その標準偏差を s_a に設定したとき，ある受験者 i の得点 T_{ai} は正規乱数 Z を使って次式でシミュレートできる．

$$T_{ai} = m_a + Zs_a \tag{3}$$

では，Excel を使って受験者数 1000 名の模擬試験をシミュレートしてみよう．

①新しいワークシートを用意する．a11 セルに「=a10+1」と入力し，これを a12 ～ a1010 セルにコピー&ペーストする．これは受験者番号に相当する．

② B 桁に国語，C 桁に数学，D 桁に理科，E 桁に社会，F 桁に英語の成績を入力することにする．各科目の設定平均値を B8 ～ F8 のセルに，その標準偏差（ばらつき）を B 9 ～ F9 のセルに入力する．

③ b11 セルに基本となる式を次のように入力する（左図）．

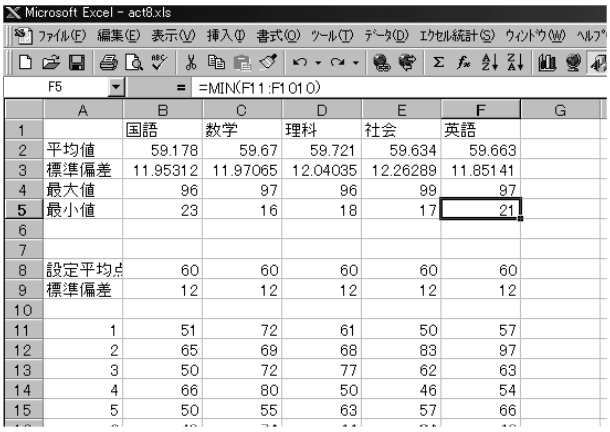
=int(b$8+b$9*(sqrt(-2*ln(rand()))*cos(2*pi()*rand())))

一様乱数 u_2

一様乱数 u_1

標準偏差

設定平均値



	A	B	C	D	E	F	G
1		国語	数学	理科	社会	英語	
2	平均値	59.178	59.67	59.721	59.634	59.663	
3	標準偏差	11.95312	11.97065	12.04035	12.26289	11.85141	
4	最大値	96	97	96	99	97	
5	最小値	23	16	18	17	21	
6							
7							
8	設定平均点	60	60	60	60	60	
9	標準偏差	12	12	12	12	12	
10							
11	1	51	72	61	50	57	
12	2	65	69	68	83	97	
13	3	50	72	77	62	63	
14	4	66	80	50	46	54	
15	5	50	55	63	57	66	

④ b11 セルを b11 ～ f1010 セルにコピー&ペーストする．これで全受験者の全科目の得点がシミュレートされる．

⑤得点の統計情報を得るために，b2 セルに「=average(b11:b1010)」（平均値），b3 セルに「=stdev(b11:b1010)」（標準偏差），b4 セルに「=max(b11:b1010)」（最高点），b5 セルに「=min(b11:b1010)」（最低点）を入力．さらに，b2 ～ b5 セルを c2 ～ f5 セルにコピー&ペーストする（左図）．

F	G	H	I	J	K	L
英語		国語	数学	理科	社会	英語
58.933						
12.05387						
102						
21						
60						
12						
48		=(B11-B$2)/B$3*10+50				
58						
68						
58						
29						

⑥各人の各科目の偏差値を求める．H 桁に国語，I 桁に数学，J 桁に理科，K 桁に社会，L 桁に英語の偏差値を入力することにする．

h11 セルに基本となる式を次のように入力する（左図）．

=(b11-b$2)/b$3*10+50

⑦ h11 セルを h11 ～ l1010 セルにコピー&ペーストする．これで全受験者の全科目の偏差値がシミュレートされる．

F	G	H	I	J	K	L
英語		国語	数学	理科	社会	英語
58.701	平均値	50	50	50	50	50
11.60346	標準偏差	10	10	10	10	10
98	最大値	79.60822	79.36915	75.27231	79.09219	83.86835
19	最小値	17.9797	16.30926	21.54128	11.06233	15.7852
60						
12						
63		66.76895	42.65073	70.38767	64.33873	53.70493
83		40.23445	48.23831	48.40679	22.53725	70.94117
56		47.93801	42.65073	45.15037	42.20853	47.67225
76		54.78563	49.03654	60.61839	55.32272	64.90849

⑧偏差値の統計情報を得るために，b2 ～ F5 セルを h2 ～ l5 セルにコピー&ペーストする．当然のことながら，偏差値の平均値は 50，標準偏差は 10 となる（左図）．

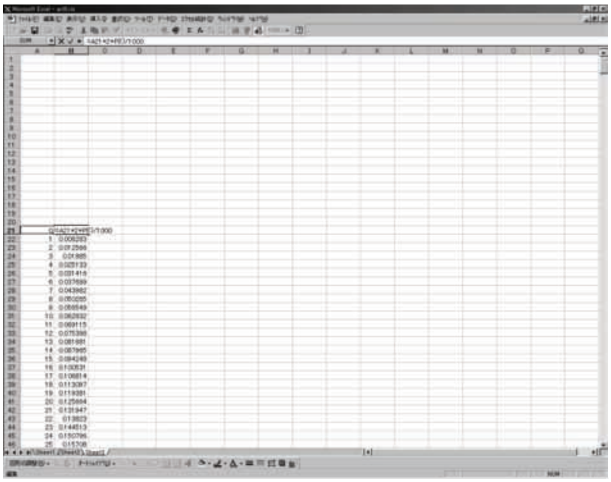
左の例では，英語に偏差値 84（実際の得点は 98 点）という高得点者がいることがわかる．

設定平均値と標準偏差を変化させると，得点および偏差値がリアルタイムで変化する．

なお，このシミュレーションでは，実際の得点が 100 点を上回らず，0 点を下回らないように気をつける必要がある．

5. 関数シミュレーション

初めて三角関数を習ったときに，その式とグラフがなかなか結びつかなくて苦労した経験はないだろうか？　そういう苦労はなかったという人でも，$y = \Sigma\ a_i \sin(b_i x + c_i)$という複数の正弦波が重なった関数の概形を想像できるだろうか？　表計算ソフトウェアを上手に使うと手軽に関数シミュレーションを行える．ここではその例として正弦波の重ね合わせシミュレーションを行う．



①新しいワークシートを用意する．a21 セルに「0」を入力し，a22 セルに「=a21+1」と入力する．a22 セルを a23 ～ a1021 セルにコピー&ペーストする．これにより 0 ～ 1000 のデータ連番が出来上がる．

② B 桁に横軸の値(x)を作成する．ここでは⊿ x=2 π /1000 に設定する．b21 セルに「=a21*2*pi()/1000」を入力し，これを b22 から b1021 セルにコピー&ペーストする（左図）．

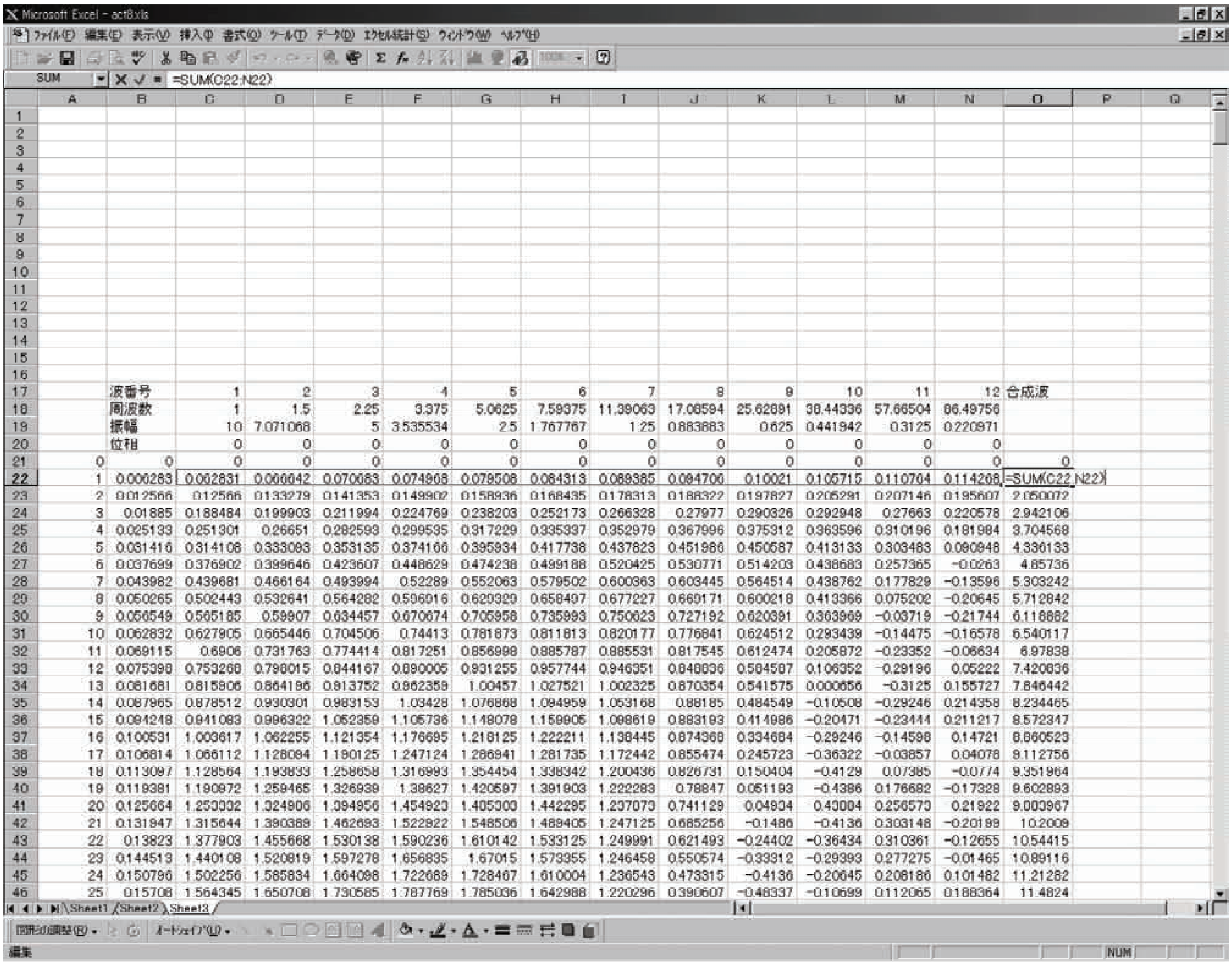
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17		波番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合成波
18		周波数	1	1.5	2.25	3.375	5.0625	7.59375	11.39063	17.08594	25.62891	38.44336	57.66504	86.49756	
19		振幅	10	7.071068	5	3.535534	2.5	1.767767	1.25	0.883883	0.625	0.441942	0.3125	0.220971	
20		位相	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21	0	0													
22	1	0.006283													
23	2	0.012566													
24	3	0.01885													
25	4	0.025133													

③合成する正弦波の数を決め（上図では 12 個），各波の周波数，振幅，位相を設定する．上の例では，各波の周波数は，第 1 の波の周波数を 1 として，以後は一つ前の波の 1.5 倍となるように設定されている．各波の振幅は，第 1 の波の振幅を 10 として，以後は一つ前の波の $2^{-0.5}$ として定義されている．位相は全て 0 とした．

④ c21 セルに基本となる数式を次のように入力する．

=c\$19*sin(c\$18*\$b21+c\$20*pi()*2)

振幅値　周波数　x の値　位相項



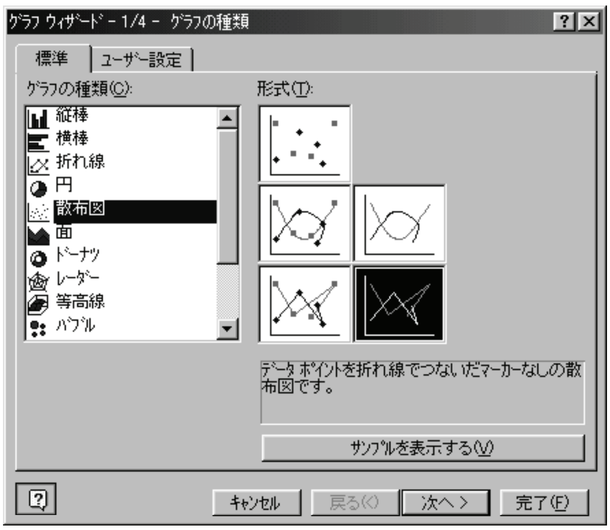
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
9																	
10																	
11																	
12																	
13																	
14																	
15																	
16																	
17		波番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合成波		
18		周波数	1	1.5	2.25	3.375	5.0625	7.59375	11.39063	17.08594	25.62891	38.44336	57.66504	86.49756			
19		振幅	10	7.071068	5	3.535534	2.5	1.767767	1.25	0.883883	0.625	0.441942	0.3125	0.220971			
20		位相	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
22	1	0.006283	0.062831	0.066642	0.070683	0.074968	0.079508	0.084313	0.089385	0.094706	0.10021	0.105715	0.110764	0.114268	=SUM(C22:N22)		
23	2	0.012566	0.12566	0.133279	0.141353	0.149902	0.158936	0.168435	0.178313	0.188322	0.197827	0.205291	0.207146	0.195607	2.050072		
24	3	0.01885	0.188484	0.199903	0.211994	0.224769	0.238203	0.252173	0.266328	0.27977	0.290326	0.292948	0.27663	0.220578	2.942106		
25	4	0.025133	0.251301	0.26651	0.282593	0.299535	0.317229	0.335337	0.352979	0.367996	0.375312	0.363596	0.310196	0.181984	3.704568		
26	5	0.031416	0.314108	0.333083	0.353135	0.374166	0.395934	0.417738	0.437823	0.451986	0.450587	0.413133	0.303483	0.080846	4.336133		
27	6	0.037699	0.376902	0.399646	0.423607	0.448629	0.474238	0.499188	0.520425	0.530771	0.514203	0.438683	0.257365	−0.0263	4.85736		
28	7	0.043982	0.439681	0.466164	0.493994	0.52289	0.552063	0.579502	0.600363	0.603445	0.564514	0.438762	0.177829	−0.13596	5.303242		
29	8	0.050265	0.502443	0.532641	0.564282	0.596916	0.629329	0.658497	0.677227	0.669171	0.600218	0.413366	0.075202	−0.20645	5.712842		
30	9	0.056549	0.565185	0.59907	0.634457	0.670674	0.705958	0.735993	0.750623	0.727192	0.620391	0.363969	−0.03719	−0.21744	6.118882		
31	10	0.062832	0.627905	0.665446	0.704506	0.74413	0.781873	0.811813	0.820177	0.776841	0.624512	0.293439	−0.14475	−0.16578	6.540117		
32	11	0.069115	0.6906	0.731763	0.774414	0.817251	0.856998	0.885787	0.885531	0.817545	0.612474	0.205872	−0.23352	−0.06634	6.97838		
33	12	0.075398	0.753268	0.798015	0.844167	0.890005	0.931255	0.957744	0.946351	0.848836	0.584587	0.106352	−0.29196	0.05222	7.420836		
34	13	0.081681	0.815806	0.864196	0.913752	0.962359	1.00457	1.027521	1.002325	0.870354	0.541575	0.000656	−0.3125	0.155727	7.846442		
35	14	0.087965	0.878512	0.930301	0.983153	1.03428	1.076868	1.094959	1.053168	0.88185	0.484549	−0.10508	−0.29246	0.214358	8.234465		
36	15	0.094248	0.941083	0.996322	1.052359	1.105736	1.148078	1.159905	1.098619	0.883193	0.414986	−0.20471	−0.23444	0.211217	8.572347		
37	16	0.100531	1.003617	1.062255	1.121354	1.176695	1.218125	1.222211	1.138445	0.874368	0.334684	−0.29246	−0.14598	0.14721	8.860523		
38	17	0.106814	1.066112	1.128084	1.190125	1.247124	1.286941	1.281735	1.172442	0.855474	0.245723	−0.36322	−0.03857	0.04078	9.112756		
39	18	0.113097	1.128564	1.193833	1.258658	1.316993	1.354454	1.338342	1.200436	0.826731	0.150404	−0.4129	0.07385	−0.0774	9.351964		
40	19	0.119381	1.190972	1.259465	1.326939	1.38627	1.420597	1.391903	1.222283	0.78847	0.051193	−0.4386	0.176682	−0.17328	9.602893		
41	20	0.125664	1.253332	1.324986	1.394956	1.454923	1.485300	1.442295	1.237873	0.741129	−0.04934	−0.43884	0.256573	−0.21922	9.883967		
42	21	0.131947	1.315644	1.390389	1.462693	1.522822	1.548506	1.489405	1.247125	0.685256	−0.1486	−0.4136	0.303148	−0.20189	10.2009		
43	22	0.13823	1.377903	1.455668	1.530138	1.590236	1.610142	1.533125	1.249991	0.621493	−0.24402	−0.36434	0.310361	−0.12655	10.54415		
44	23	0.144513	1.440108	1.520819	1.597278	1.656835	1.67015	1.573355	1.246458	0.550574	−0.33312	−0.29393	0.277275	−0.01465	10.89116		
45	24	0.150796	1.502256	1.585834	1.664098	1.722669	1.728467	1.610004	1.236543	0.473315	−0.4136	−0.20645	0.208186	0.101462	11.21282		
46	25	0.15708	1.564345	1.650708	1.730585	1.787769	1.785036	1.642988	1.220296	0.390607	−0.48337	−0.10699	0.112065	0.188364	11.4824		

⑤ c21 セルを c21 ～ n1021 セルにコピー&ペーストする（もっと多くの正弦波を設定する場合にはペースト範囲をそれに合わせる）.

⑥合成波の基本式を o21 セルに次のように入力する.

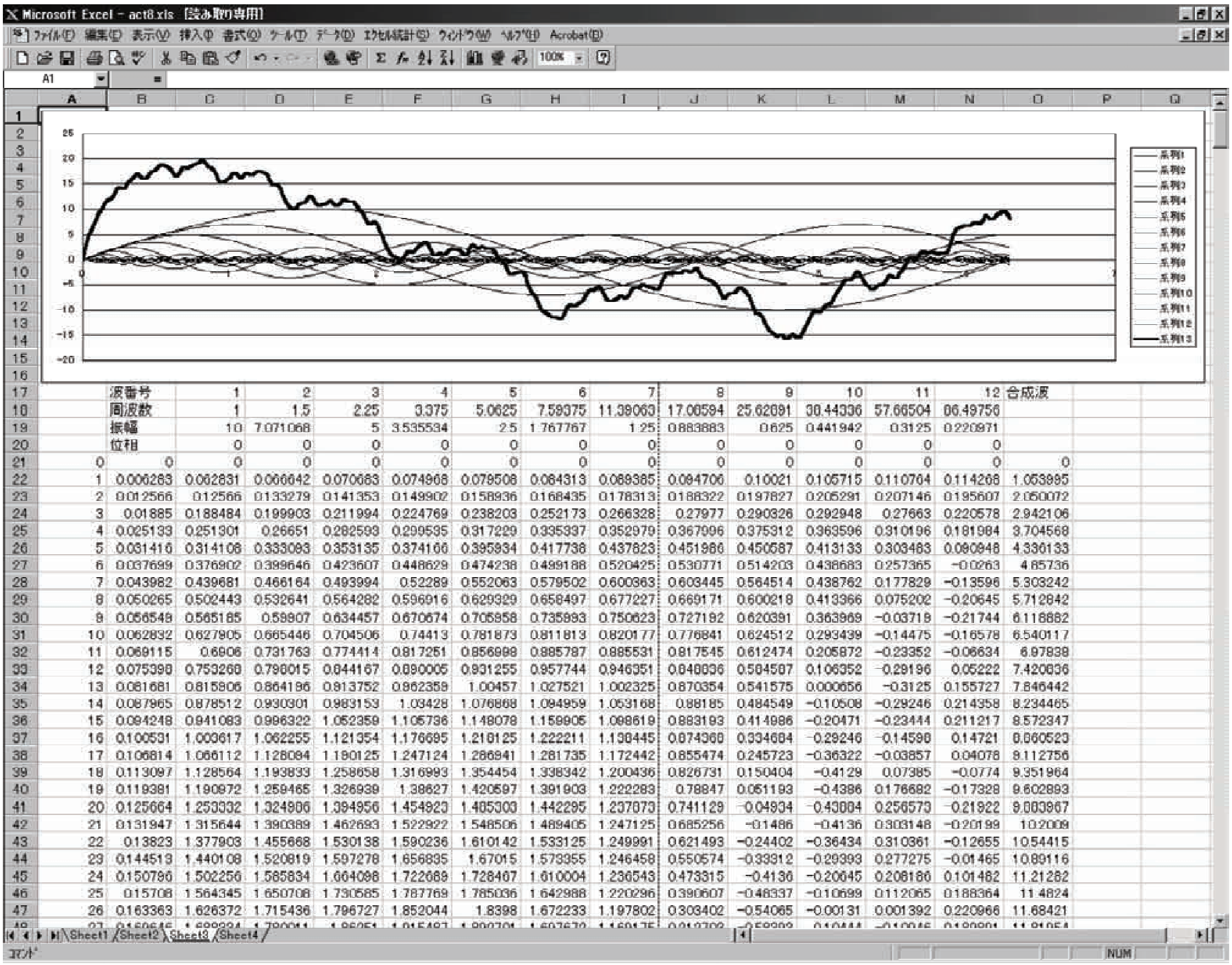
=sum(c21:n21)

o21 セルを o22 ～ o1021 セルにコピー&ペーストする（上図）.



⑦関数グラフとして図示する範囲（b21 ～ o1021）を範囲指定（Shift キーを押しながら矢印キーを操作）する.「挿入」→「グラフ」とメニューをたどるか，グラフウィザードアイコン  を選択して，「グラフウィザード」ウィンドウを開く.

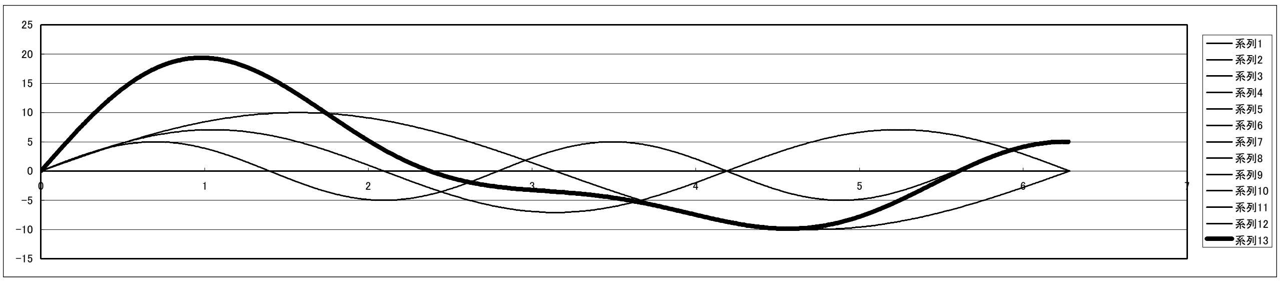
⑧グラフの種類として「散布図」を選択し，形式には「折れ線でつないだマーカーなし」を選択する（左図）.

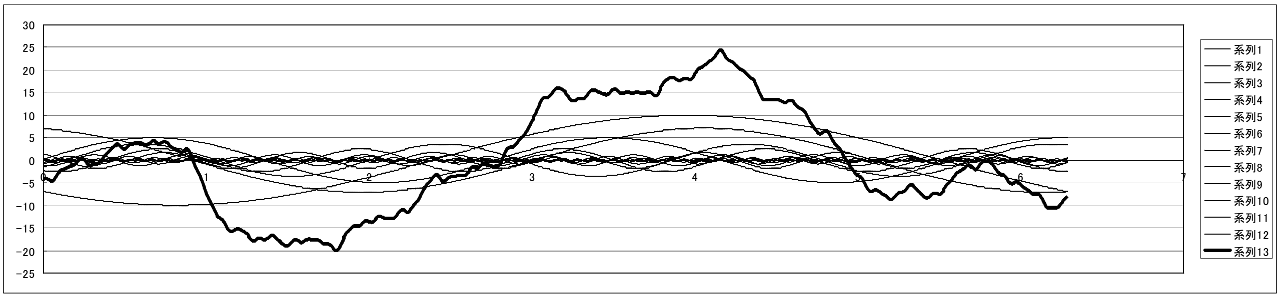


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
17		波番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合成波
18		周波数	1	1.5	2.25	3.375	5.0625	7.59375	11.39063	17.08594	25.62891	38.44336	57.66504	86.49756	
19		振幅	10	7.071068	5	3.535534	2.5	1.767767	1.25	0.883883	0.625	0.441942	0.3125	0.220971	
20		位相	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	1	0.006283	0.062831	0.066642	0.070683	0.074968	0.079508	0.084313	0.089385	0.094706	0.10021	0.105715	0.110764	0.114268	1.053995
23	2	0.012566	0.12566	0.133279	0.141353	0.149902	0.158936	0.168435	0.178313	0.188322	0.197827	0.205291	0.207146	0.195607	2.050072
24	3	0.01885	0.188484	0.199903	0.211994	0.224769	0.238203	0.252173	0.266328	0.27977	0.290326	0.292948	0.27663	0.220578	2.942106
25	4	0.025133	0.251301	0.26651	0.282593	0.299535	0.317229	0.335337	0.352979	0.367996	0.375312	0.363596	0.310196	0.181984	3.704568
26	5	0.031416	0.314108	0.333093	0.353135	0.374166	0.395934	0.417738	0.437823	0.451966	0.450587	0.413133	0.303483	0.090948	4.330133
27	6	0.037699	0.376902	0.399646	0.423607	0.448629	0.474238	0.499188	0.520425	0.530771	0.514203	0.438683	0.257365	−0.0263	4.85736
28	7	0.043982	0.439681	0.466164	0.493994	0.52289	0.552063	0.579502	0.600363	0.603445	0.564514	0.438762	0.177829	−0.13596	5.303242
29	8	0.050265	0.502443	0.532641	0.564282	0.596916	0.629329	0.658497	0.677227	0.669171	0.600218	0.413366	0.075202	−0.20645	5.712842
30	9	0.056549	0.565185	0.59907	0.634457	0.670674	0.705958	0.735993	0.750623	0.727192	0.620391	0.363969	−0.03718	−0.21744	6.118882
31	10	0.062832	0.627905	0.665446	0.704506	0.74413	0.781873	0.811813	0.820177	0.776841	0.624512	0.293439	−0.14475	−0.16578	6.540117
32	11	0.069115	0.6906	0.731763	0.774414	0.817251	0.856998	0.885787	0.885531	0.817545	0.612474	0.205872	−0.23352	−0.06634	6.97838
33	12	0.075398	0.753268	0.798015	0.844167	0.890005	0.931255	0.957744	0.946351	0.848836	0.584587	0.106352	−0.29196	0.05222	7.420836
34	13	0.081681	0.815906	0.864196	0.913752	0.962359	1.00457	1.027521	1.002325	0.870354	0.541575	0.000656	−0.3125	0.155727	7.846442
35	14	0.087965	0.878512	0.930301	0.983153	1.03428	1.076868	1.094959	1.053168	0.88185	0.484549	−0.10508	−0.29246	0.214358	8.234465
36	15	0.094248	0.941083	0.996322	1.052359	1.105736	1.148078	1.159905	1.098619	0.883193	0.414986	−0.20471	−0.23444	0.211217	8.572347
37	16	0.100531	1.003617	1.062255	1.121354	1.176695	1.218125	1.222211	1.138445	0.874368	0.334684	−0.29246	−0.14598	0.14721	8.860523
38	17	0.106814	1.066112	1.128084	1.190125	1.247124	1.286941	1.281735	1.172442	0.855474	0.245723	−0.36322	−0.03857	0.04078	9.112756
39	18	0.113097	1.128564	1.193833	1.258658	1.316993	1.354454	1.338342	1.200436	0.826731	0.150404	−0.4129	0.07385	−0.0774	9.351964
40	19	0.119381	1.190972	1.259465	1.326939	1.38627	1.420597	1.391903	1.222283	0.78847	0.061193	−0.4386	0.176682	−0.17328	9.602893
41	20	0.125664	1.253332	1.324906	1.394956	1.454923	1.485303	1.442295	1.237073	0.741129	−0.04934	−0.43884	0.256573	−0.21922	9.883967
42	21	0.131947	1.315644	1.390389	1.462693	1.522922	1.546506	1.489405	1.247125	0.685256	−0.1486	−0.4136	0.303148	−0.20199	10.2009
43	22	0.13823	1.377903	1.455668	1.530138	1.590236	1.610142	1.533125	1.249991	0.621493	−0.24402	−0.36434	0.310361	−0.12655	10.54415
44	23	0.144513	1.440108	1.520819	1.597278	1.656835	1.67015	1.573355	1.246458	0.550574	−0.33312	−0.29393	0.277275	−0.01465	10.89116
45	24	0.150796	1.502256	1.585834	1.664098	1.722689	1.728467	1.610004	1.236543	0.473315	−0.4136	−0.20645	0.208186	0.101462	11.21282
46	25	0.15708	1.564345	1.650708	1.730585	1.787769	1.785036	1.642988	1.220296	0.390607	−0.48337	−0.10699	0.112065	0.188364	11.4824
47	26	0.163363	1.626372	1.715436	1.796727	1.852044	1.8398	1.672233	1.197802	0.303402	−0.54065	−0.00131	0.001392	0.220966	11.68421

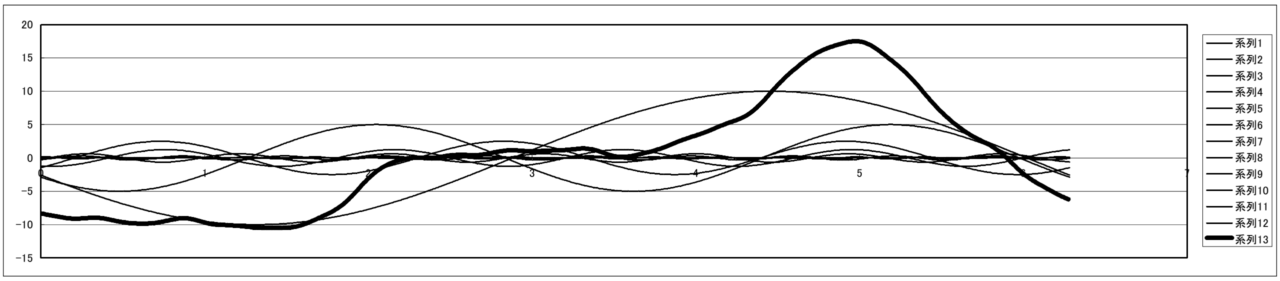
⑨グラフの概形をつかむことが目的なので，細かな設定は無視していきなり「完了」ボタンをクリックする．13 種類の波形が重なったグラフが現れる．ワークシートの上方にグラフ全体を移動させ, 画面いっぱいの横長の図となるように縦横比を変更する（上図）．上図では系列 1 が波番号 1，系列 2 が波番号 2，の順に波形が各数値データに対応している．

⑩例えば，D19 セルの波番号 2 の振幅値を 0 にすると，以後の波の振幅値も全て 0 になるため，波番号 1 の波形だけが表示される．F19 セルの波番号 4 の振幅値を 0 にすると，同様に以後の振幅値が 0 となるが，合成波は波番号 1 ～ 3 の波形が重なり合ったものとして表示される（下図）．

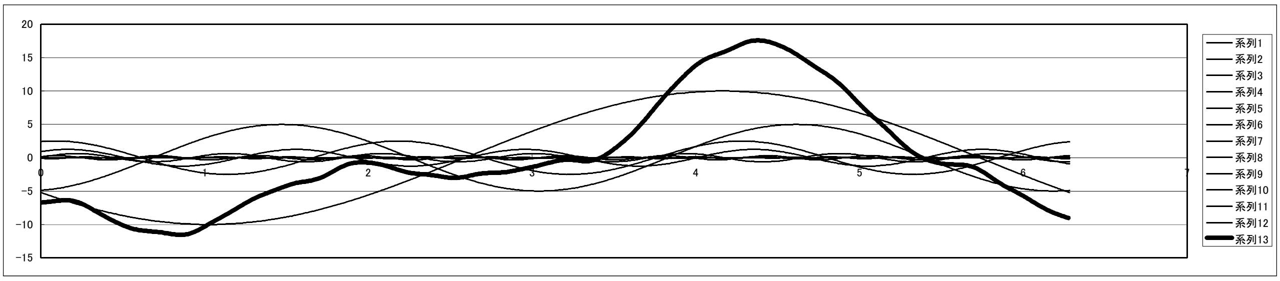




⑪ c20 ～ n20 セルの各波の位相欄に乱数を設定してみる（=rand()を入力する）．上図のように，規則的な周期関数（正弦波）を重ね合わせただけなのに，その周期性を感じさせない複雑な合成波形が得られていることがわかる．



⑫合成する波の数を減らす，増やすなどして，合成波の波形の変化を確かめる．上図は波番号 8 以後の振幅を 0 にした場合．



⑬周波数や振幅の与え方もいろいろと変更してみる．上図は周波数を一つ前の波の 2 倍，振幅を 1/2 となるように与えた場合．

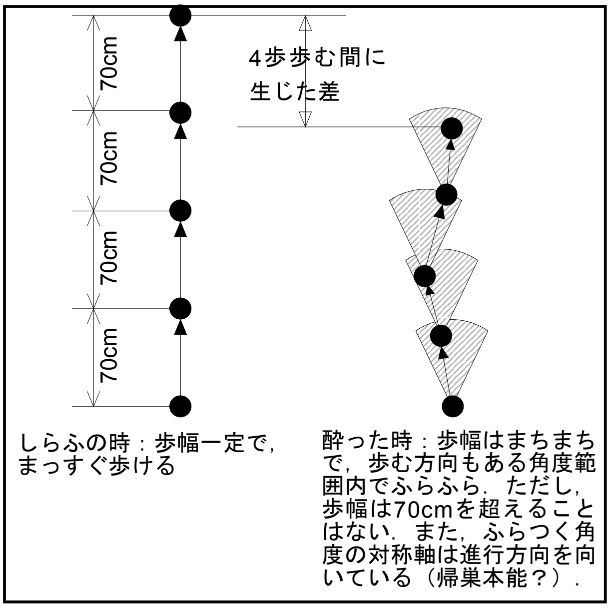
⑭データの入っていない適当なセルをアクティブにしておいて（カーソルを合わせておいて），例えば **DEL キー**を連打すると，ダンスを踊っているかのように合成波が変化するのがわかる．

例題

電車通勤の A さん．最寄り駅の改札から自宅玄関までは **500m** の直線道路（幅 **6m**）を歩くだけだ．A さんが普通に歩くときの歩幅は約 **70cm**．改札を抜けて自宅玄関まで，いつもなら 700 歩ちょっと歩めば到着する．

問題は A さんが飲んで帰ってきたときだ．いつもならまっすぐ歩ける道なのに，あっちを向きこっちを向きでふらりふらりと千鳥足で進むことになる．歩幅も短かったり長かったりと定まらない．あまりふらふらし過ぎると，6m 幅道路際の側溝に落ちてしまう危険も伴う．さらにやっかいなことに，歩みが **1000 歩**を超えると酔いが回りすぎて A さんはその場に座り込んで寝入ってしまう．これも危険だ．

そんな A さんが駅から自宅へ無事帰れるかどうか，表計算ソフトウェアでシミュレーションしてみよ．

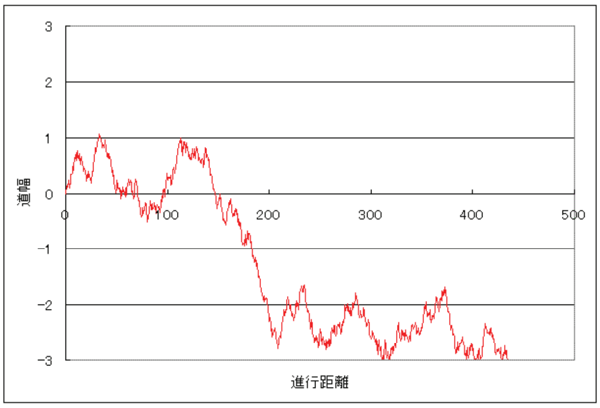


◎シミュレーションのポイント

・酔いの程度を表すファクター：

(1) ふらふらする角度の大きさ（大きいほど酔っぱらっている，しらふの時はほとんど 0 度）．設定角度内でふらふらするように乱数を使用すればよい．

(2) 歩幅の変化（変化が大きいほど酔っぱらっている，しらふの時はほとんど変化しない）．設定変化率内で歩幅変わるように乱数を使用すればよい．



←例えば左図は，毎歩 40cm 確実に歩むが，残りの 30cm がいい加減で，ふらつき角度を 30 度に設定した場合の A さんの歩み．450m 付近で側溝に落ちた．

Tips!

・度(degree)を radian に変換する関数：radians(x)（x は degree で表された角度）

・正負の値を持つ乱数の作り方：(rand()-0.5)とすれば，± 0.5 の乱数が得られる．これに 2 を乗じれば± 1 となる．

例題の考え方

	A	B	C	D	E
7					
8	基本歩幅	0.4	可変歩幅	0.3	
9	振れ角	30			
10	歩数	歩幅	角度	x	y
11	0			0	0
12	=A11+1	0.460911	-8.13336	0.456275	-0.06521
13	2	0.436249	11.94458	0.883079	0.02508
14	3	0.690465	-13.0789	1.555632	-0.13117
15	4	0.431071	-3.87756	1.985717	-0.16032

①まずはデータ連番代わりに“歩数”を a11 ～ a1011 セルに入力する．a11 セルには「0」を入力（ここがスタート地点なので）．a12 セルには「=a11+1」を入力し，この数式を a13 ～ a1011 セルにコピー&ペーストすればよい（左図）．

②“基本歩幅”(B)と“可変歩幅”(V)を設定しておく．前者はどんなにふらついても必ず進むことのできる歩幅，後者は基本歩幅にプラスされる可変量である．左上図では $B = 0.4$ m，$V = 0.3$ m に設定した．

	A	B	C	D	E
7					
8	基本歩幅	0.4	可変歩幅	0.3	
9	振れ角	30			
10	歩数	歩幅	角度	x	y
11	0			0	0
12	1	=B$8+D$8*RAND()		0.456275	-0.06521
13	2	0.436249	11.94458	0.883079	0.02508
14	3	0.690465	-13.0789	1.555632	-0.13117
15	4	0.431071	-3.87756	1.985717	-0.16032

③ i 歩目（今回の場合，$0 \leqq i \leqq 1000$）の歩幅 A_i は，一様乱数 u を用いて，次式で表される．

$$A_i = B + uV$$

そこで，B12 セルに 1 歩目の歩幅を決めるために「=b$8+d$8*rand()」と入力する．この基本式を B13 ～ B1011 セルにコピー&ペーストする（左図）．

	A	B	C	D	E
7					
8	基本歩幅	0.4	可変歩幅	0.3	
9	振れ角	30			
10	歩数	歩幅	角度	x	y
11	0			0	0
12	1	0.460911	=B9*(RAND()-0.5)		-0.06521
13	2	0.436249	11.94458	0.883079	0.02508
14	3	0.690465	-13.0789	1.555632	-0.13117
15	4	0.431071	-3.87756	1.985717	-0.16032

④ある 1 歩を歩むとき，体の正面に対してどれだけ逸れてしまうかを“最大振れ角”(T_{max})を設定しておく．ここでは $T_{max} = 30$ 度（正面に対して± 15 度）とした．

⑤ i 歩目の振れ角 T_i は 0 ～$\pm(T_{max} / 2)$の範囲内ででたらめに決まる．ただし，0 歩目は正面を向いていると考えて $T_0 = 0$ とする．C12 セルに「=b9*(RAND()-0.5)」と基本式を入力（左図）し，これを C13 ～ C1011 セルにコピー&ペーストする．

⑤ i 歩目を歩んだときの位置(x_i, y_i)は，1 つ前の$(i$-$1)$歩目の位置(x_{i-1}, y_{i-1})に新たに踏み出した 1 歩の x 方向移動量⊿ x_i，および，y 方向移動量⊿ y_i を足すことで決まる．すなわち，

	A	B	C	D	E	F
7						
8	基本歩幅	0.4	可変歩幅	0.3		
9	振れ角	30				
10	歩数	歩幅	角度	x	y	
11	0			0	0	
12	1	0.592475	−8.81933	=D11+$B12*COS(RADIANS($C12))		
13	2	0.567204	12.84328	1.138484	0.035243	
14	3	0.451773	−12.307	1.579875	−0.06105	
15	4	0.640542	8.021092	2.214151	0.028328	
16	5	0.564883	12.68866	2.765238	0.152406	
17	6	0.567173	11.53923	3.320947	0.265862	
18	7	0.481431	14.61901	3.786792	0.387371	
19	8	0.546681	−13.1062	4.319233	0.263408	
20	9	0.455328	−0.63081	4.774534	0.258395	
21	10	0.46129	4.55107	5.23437	0.294997	
22	11	0.573952	9.375827	5.800654	0.388499	
23	12	0.413332	4.943095	6.212449	0.424114	
24	13	0.674729	12.34249	6.871583	0.568341	
25	14	0.469325	5.05914	7.339079	0.609728	
26	15	0.671511	2.288518	8.010054	0.636542	
27	16	0.6688	9.437706	8.669801	0.746209	
28	17	0.490551	1.917166	9.160078	0.76262	
29	18	0.498262	14.03482	9.643466	0.883454	

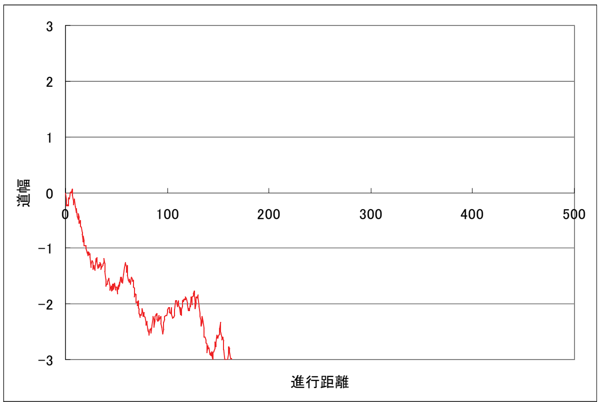
$x_i = x_{i-1} + \triangle x_i$, $y_i = y_{i-1} + \triangle y_i$

この$\triangle x_i$, $\triangle y_i$に乱数項が含まれていて,

$\triangle x_i = A_i * \cos(T_i)$, $\triangle y_i = A_i * \sin(T_i)$

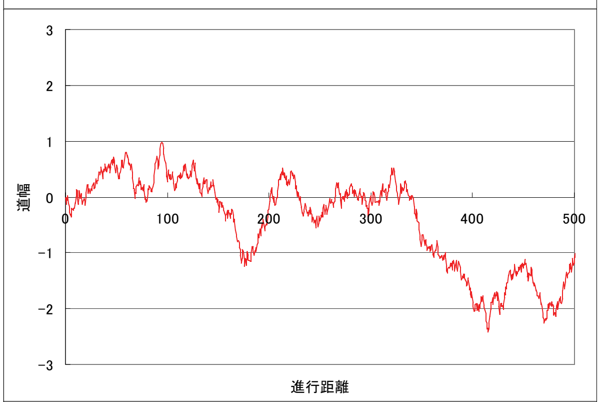
で表される.

⑥ 0 歩目の位置を原点と考えて，D11 セルおよび E11 セルには 0 を入力する．i 歩目の位置を表す基本式として，D12 セルに「=d11+$b12*cos(radians($c12))」を，E12 セルに「=e11+$b12*sin(radians($c12))」を入力する．これらを D13 ～ E1011 セルにコピー&ペーストする（左図）．radians は degree で表された角度を radian に変換する組込関数.



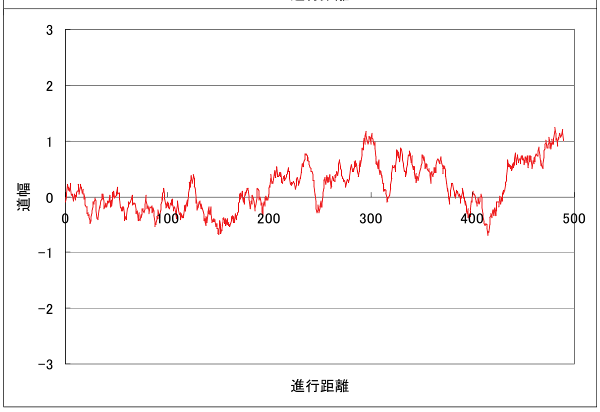
シミュレーション例 1

200m 弱で側溝に落ちた場合



シミュレーション例 2

何とか家までたどり着いた場合



シミュレーション例 3

最大振れ角 30 度，基本歩幅 0.3m，可変歩幅 0.4m で，家の直前で行き倒れになった場合