ちょっとマニアックな（？）級数・積分の計算[1]

吉田伸生 [2]

具体的に値が求まる級数というと、

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots.=\frac{\pi^2}{6},\quad (\textbf{オイラーの級数})$$
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.=\frac{\pi}{4},\quad (\textbf{ライプニッツの級数}).$$

といった有名なものから、

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\ldots.=\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}),$$
$$\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)-\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)+\ldots.=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

といった、もう少しマイナーなものまで色々ある。一方、例えば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\sqrt{2\pi}$$

といった有名かつ基本的な定積分にも証明が色々知られていて、それぞれ面白い。

この講義では、具体的に値が求まる級数や積分で、それ自体、あるいは値を求める方法に面白味がある（と私自身が感じる）ものをおもちゃに遊んでみよう。題名が示すように、ややマニアックな講義かも知れない。一方、具体例に徹底的にこだわる講義は通常のカリキュラムの中ではなかなか出来ないし、いい機会だと思う。また、「一様収束」、「項別積分」、「積分順序の交換」といった道具が秘める驚きの魔術を、具体例を通じ体感できるのでは、と期待する。

目 次

参考文献

[岩] 森口繁一 他 「岩波 数学公式 I–III」 岩波書店

[杉浦] 杉浦光夫 「解析入門 I,II」 東京大学出版会

[吉田 1] 吉田伸生 「微分積分学」（2007 年度講義録）
（`http://www.math.kyoto-u.ac.jp/ nobuo/tch/biseki/07/notes.html`）

[吉田 2] 吉田伸生 「ルベーグ積分入門–使うための理論と演習」 遊星社

[1]2007 年度「現代解析学の展開」 用ノート 平成 20 年 5 月 9 日.

[2][URL] `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nobuo`

1　予備知識

1.1　一様収束と局所一様収束

定義 1.1.1 D を集合、 $f, f_n,\ n = 0, 1, ...$ は D 上の関数とする。

•

$$\|f\|_D = \sup_D |f| \tag{1.1}$$

を D 上の**一様ノルム** (uniform norm) と呼ぶ[3]

•

(1) $\lim_n \|f_n - f\|_D = 0.$

なら、(f_n) は f に D 上**一様収束**する（converge uniformly）と言う。これに対し、

(2) 全ての $x \in D$ に対し $\lim_n f_n(x) = f(x)$

なら (f_n) は f に (D 上) **各点収束**する（converge pointwise）と言う。全ての $x \in D$ に対し $|f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_D$ だから (1), (2) より

$$\text{一様収束} \implies \text{各点収束} \tag{1.2}$$

である。次に、$D \subset \mathbb{R}^d$ とする。

- 全てのコンパクト集合 $K \subset D$ に対し

$$\lim_n \|f_n - f\|_K = 0$$

なら、(f_n) は f に (D 上) **局所一様収束**する（converge locally uniformly)、或いは **広義一様収束**（converge uniformly in wider sense）と言う。全ての $x \in D$ に対し $K = \{x\}$ はコンパクト、また、全ての部分集合 $K \subset D$ に対し

$$\|f_n - f\|_K \le \|f_n - f\|_D$$

なので、

$$\text{一様収束} \implies \text{局所一様収束} \implies \text{各点収束}. \tag{1.3}$$

問 1.1.1 $x \in [0, 1]$,$f_n(x) = x^n$, $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ とする。以下を示せ：(i) f_n は $[0, 1]$ 上 f に各点収束するが一様収束しない。(ii) $0 < \delta < 1$ のとき、f_n は $[0, \delta]$ 上 f に一様収束する。

連続関数列 f_n が f に各点収束しても、f は連続とは限らない（問 1.1.1)。所が、局所一様収束するならば f の連続性が保証される：

定理 1.1.2 $D \subset \mathbb{R}^d$, $f_n \in C(D)$, $n = 0, 1, ...$ が $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ に局所一様収束すれば、$f \in C(D)$.

[3] この節では、一様ノルムを用いる機会が多い。その度に “$\sup_D |f|$” と書くのは煩わしいので、(1.1) の略式記号を用いることにする（この講義の中だけの記号だが)。

証明： $x_n, x \in D$, $x_n \longrightarrow x$ とし、$f(x_n) \longrightarrow f(x)$ を言えばよい。任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$|f(x_n) - f(x)| \le \underbrace{|f(x_n) - f_m(x_n)|}_{(1)} + \underbrace{|f_m(x_n) - f_m(x)|}_{(2)} + \underbrace{|f_m(x) - f(x)|}_{(3)}.$$

$K \stackrel{\text{def.}}{=} \{x_n\}_{n \ge 0} \cup \{x\}$ はコンパクトである。$f_n \longrightarrow f$ (局所一様) より

(∗) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N},\ \|f - f_m\|_K < \varepsilon/3,$

従って、(∗) の m に対し

$$(1) + (3) < 2 \cdot \varepsilon/3.$$

一方、(∗) の m に対し $f_m \in C(D)$ より

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \ge n_0,\ (2) < \varepsilon/3.$$

以上より $\forall n \ge n_0$ に対し $(1) + (2) + (3) < \varepsilon$. □

1.2 関数項級数

1.1 節で関数列の（局所）一様収束という概念を導入した。関数列の具体例は巾級数の部分和をはじめ、関数項級数の形で与えられることが少なくない。1.2 節では関数項級数が（局所）一様収束するための代表的な十分条件を与える。

定理 1.2.1 (**ワイエルシュトラス の M-テスト**) D を集合、$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ （$n \in \mathbb{N}$）,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_D < \infty$$

なら関数項級数 $s = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は D の各点で絶対収束し、かつ

$$\lim_N \|s - \sum_{n=0}^{N} f_n\|_D = 0.$$

証明： 全ての $x \in D$ に対し $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_D$. よって $\|\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\|_D \le \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_D$. 以上から、全ての $x \in D$ に対し

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \le \left\| \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \right\|_D \le \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_D.$

(1) より $s = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は D の各点で絶対収束する。また、

$$\|s - \sum_{n=0}^{N} f_n\|_D \le \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n| \right\|_D \stackrel{(1)}{\le} \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_D.$$

仮定より、上式右辺 $\to 0$ $(N \to 0)$. □

問 1.2.1 $\mathrm{Arcsin}\, y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!y^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ の右辺は $y \in [-1, 1]$ について一様収束することを示せ。

ワイエルシュトラスの M-テスト (定理 1.2.1) は関数項級数が、絶対かつ一様に収束する為の十分条件を与える。一方、後で示すように (例 1.2.4)、

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\quad x\in[0,1]$$

は一様収束するが、$x=1$ まで含めた $g(x)$ の一様収束はワイエルシュトラスの M-テストから直接には得られない（ $g(1)$ は絶対収束しない)。このように、必ずしも絶対収束しない関数項級数が一様収束する為の十分条件 (定理 1.2.3) を与えよう。そのために次の補題を用意する。補題の条件は少し複雑に見えるかも知れないが、$p_n=1/n$, $q_n=(-1)^{n-1}$ といった具体例 (上記 $g(1)$ に対応する) を念頭におくと意味が分りやすいだろう。

補題 1.2.2 数列 $p_n\in[0,\infty)$, $q_n\in\mathbb{C}$ $(n\in\mathbb{N})$ に以下の条件を考える：

(a) 全ての $n\in\mathbb{N}$ に対し $p_n\geq p_{n+1}$.

(b) $Q_n=q_0+...+q_n$ は有界。

(c1) $\lim_n p_n=0$.

(c2) Q_n が 収束。

このとき、(a),(b) に加え、(c1) または (c2) を仮定すれば、

$$s_n=\sum_{m=0}^{n}p_mq_m$$

は収束し、極限 s は次を満たす：

$$|s-s_m|\leq 2p_{m+1}\sup_{j\geq m}|Q_j-Q|. \tag{1.4}$$

但し (c1) を仮定するとき $Q\in\mathbb{C}$ は任意、また、(c2) を仮定するとき $Q=\lim_n Q_n$.

証明： まず (a),(b) を仮定する。$n\geq m\geq 0$, $Q\in\mathbb{C}$ に対し $q_j=(Q_j-Q)-(Q_{j-1}-Q)$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
s_n-s_m &= \sum_{j=m+1}^{n}p_jq_j=\sum_{j=m+1}^{n}p_j(Q_j-Q)-\sum_{j=m}^{n-1}p_{j+1}(Q_j-Q)\\
&= \underbrace{\sum_{j=m+1}^{n-1}(p_j-p_{j+1})(Q_j-Q)}_{(1)}+\underbrace{p_n(Q_n-Q)}_{(2)}-p_{m+1}(Q_m-Q).
\end{aligned}$$

よって、s_n の収束を言うには、(1),(2) の収束 $(n\to\infty)$ を言えばよい。

<u>(1) について:</u>

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m+1}^{n-1}|(p_j-p_{j+1})(Q_j-Q)| &\leq \sup_{j\geq m+1}|Q_j-Q|\sum_{j=m+1}^{n-1}(p_j-p_{j+1})\\
&\leq p_{m+1}\sup_{j\geq m+1}|Q_j-Q|\quad (n\text{ に無関係な有限値}).
\end{aligned}$$

よって、 (1) は n についての級数と考えて絶対収束する。
(2) について: (c1) を仮定すると

$$|(2)| \le p_n \sup_j |Q_j - Q| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

また、(c2) を仮定し、$Q = \lim_n Q_n$ とすると、

$$|(2)| \le p_0 |Q_n - Q| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

以上から s_n の収束が言えた。また、上で得られた不等式を組み合わせると、

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &\le |(1)| + |(2)| + p_{m+1}|Q_m - Q| \\ &\le p_{m+1} \sup_{j \ge m+1} |Q_j - Q| + |(2)| + p_{m+1}|Q_m - Q| \\ &\le 2p_{m+1} \sup_{j \ge m} |Q_j - Q| + |(2)|. \end{aligned}$$

また、上の議論より $\lim_n (2) = 0$ だから上式で $n \to \infty$ とすれば (1.4) を得る。 □

定理 1.2.3 (**ディリクレの一様収束判定法**[4]) D を集合とし、関数列

$$p_n : D \longrightarrow [0, \infty), \quad q_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

について以下の条件を考える：

(a) 全ての $x \in D$, $n \in \mathbb{N}$ に対し $p_n(x) \ge p_{n+1}(x)$.

(b) $Q_n = q_0 + ... + q_n$ について $\sup_{n \ge 0} \|Q_n\|_D < \infty$.

(c1) $\lim_n \|p_n\|_D = 0$.

(c2) $\|p_0\|_D < \infty$ かつ Q_n が D 上一様収束。

このとき、(a),(b) に加え、(c1) または (c2) を仮定すれば、関数項級数

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} p_m q_m$$

は D 上一様収束し、極限 s は次を満たす：

$$|s(x) - s_m(x)| \le 2p_{m+1}(x) \sup_{j \ge m} |Q_j - Q|(x) \quad x \in D. \tag{1.5}$$

但し (c1) を仮定するとき $Q : D \to \mathbb{C}$ は任意、また、(c2) を仮定するとき $Q(x) = \lim_n Q_n(x)$.

証明： 各 $x \in D$ 毎に 補題 1.2.2 を適用して、s_n の各点収束と (1.5) を得る。(1.5) より、

$$\|s - s_m\|_D \le 2\|p_{m+1}\|_D \sup_{j \ge m} \|Q_j - Q\|_D.$$

よって (c1) または (c2) を仮定すれば $\lim_m \|s - s_m\|_D = 0$. □

[4] この呼び名の是非はわからないが、引用の便宜の為、こう呼ぶことにする。

例 1.2.4 $\varepsilon \geq 0$, $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \;;\; |z| \leq 1,\ |1+z| > \varepsilon\}$ とする（絵で説明）。$\varepsilon > 0$ なら $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ は D_ε 上一様収束する。

証明： 定理 1.2.3 で $D = D_\varepsilon$, $p_n = 1/n$, $q_n(z) = (-1)^{n-1} z^n$ とすると、

$$Q_n(z) = z \sum_{m=0}^{n-1} (-z)^m = z \frac{1-(-z)^n}{1+z}$$

従って、

$$|Q_n(z)| \leq \frac{2}{|1+z|} \leq \frac{2}{\varepsilon}$$

となり、定理 1.2.3 の仮定 (a),(b),(c1) が満たされ、所期の一様収束が判る。 □

定理 1.2.5 (**アーベルの定理**[5]) 複素数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ に対し $\sum a_n$ が収束するとする。このとき、

$$s_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m, \quad n \in \mathbb{N}$$

は $x \in [0,1]$ について一様収束し、極限 $s(x)$ は $[0,1]$ 上連続。

証明： $D = [0,1]$, $q_n(x) = a_n$, $p_n(x) = x^n$ とすると 定理 1.2.3 の仮定 (a), (b), (c2) が満たされ、所期の一様収束が判る。$s(x)$ の連続性は定理 1.1.2 による。 □

1.3 Γ-関数・B-関数

以下で述べる Γ-関数・B-関数は数学の様々な分野、更には物理学・工学をはじめとする応用科学でも色々な形で登場する重要な関数である。

命題 1.3.1 $u > 0$ とする。広義積分

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x}\, dx \tag{1.6}$$

は収束し、$u \mapsto \Gamma(u)$ $((0,\infty) \to (0,\infty))$ を **Γ-関数** （ガンマ関数）と呼ぶ。これについて、以下が成立する（但し $n \in \mathbb{N}$）：

$$\Gamma(u+1) = u\Gamma(u), \tag{1.7}$$

$$\Gamma(u+n) = (u+n-1)(u+n-2)\cdots(u+1)u\Gamma(u), \tag{1.8}$$

$$\Gamma(1+n) = n!. \tag{1.9}$$

証明： (1.6) の収束：$f(x) = x^{u-1}e^{-x}$ $(x > 0)$ とする。$n \in \mathbb{N}$ に対し $e^{-x} \leq n! x^{-n}$ だから

(1) $\qquad 0 \leq f(x) \leq n! x^{u-1-n}$,

(1) で $n = 0$ とすれば、次数による収束判定より $\int_0^1 f$ が収束。また、(1) で $n > u$ とすれば、再び次数による収束判定より $\int_1^\infty f$ が収束。以上より $\int_0^\infty f$ は収束。
(1.7):

$$\Gamma(u+1) = \int_0^\infty x^u e^{-x}\, dx = \underbrace{[-x^u e^{-x}]_0^\infty}_{=0} + u \underbrace{\int_0^\infty x^{u-1} e^{-x}\, dx}_{=\Gamma(u)}.$$

[5] Niels Henrik Abel (1802–1829)

(1.8): (1.7) を繰り返し適用。
(1.9): 次に注意：

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

これと、(1.8) を併せればよい。 □

問 1.3.1 $u, v \in (0, \infty)$ に対し以下を示せ：

$$\begin{aligned}\Gamma(u) &= v^u \int_0^\infty y^{u-1} e^{-vy}\, dy &(1.10)\\ &= v^u \int_0^1 \left(\log \frac{1}{s}\right)^{u-1} s^{v-1}\, ds, &(1.11)\\ &= 2v^u \int_0^\infty r^{2u-1} e^{-vr^2}\, dr &(1.12)\end{aligned}$$

命題 1.3.2 $u, v > 0$ に対し、次の広義積分の収束と等号が成立する：

$$\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1}\theta \sin^{2v-1}\theta\, d\theta \qquad (1.13)$$

これらの積分を $B(u, v)$ と記し、B**-関数**（ベータ関数）と呼ぶ。また、$B(u, v)$ は以下の性質を持つ：

$$\begin{aligned}B(u, v) &= B(v, u), &(1.14)\\ B(1, u) &= B(u, 1) = 1/u, &(1.15)\\ B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) &= \pi. &(1.16)\end{aligned}$$

証明： (1.13) 左辺の収束を言うため $f(x) = x^{u-1}(1-x)^{v-1}$, $M_u = 1 \vee (1/2)^{u-1}$ とおく。

$$\begin{aligned}&x \in (0, 1/2] \text{ なら } f(x) \le M_v x^{u-1}\\ &x \in [1/2, 1) \text{ なら } f(x) \le M_u (1-x)^{v-1}.\end{aligned}$$

これらと、次数による収束判定より $\int_0^{1/2} f$, $\int_{1/2}^1 f$ が収束、従って $\int_0^1 f$ が収束する。等号は $x = \cos^2\theta$ と変換すれば得られる。また、
(1.14): 変数変換（$y = 1 - x$）による。
(1.15):

$$B(1, u) \stackrel{(1.14)}{=} B(u, 1) = \int_0^1 x^u dx = 1/u.$$

(1.16): (1.13) 右辺で $u = v = 1/2$ とすれば明らか。 □

問 1.3.2 $t, u, v > 0$ とする。以下を示せ：
(i) $B(u, v) = \int_0^\infty \frac{y^{v-1}dy}{(1+y)^{u+v}}$. (ii) $\int_0^1 x^{u-1}(1-x^t)^{v-1}\, dx = \frac{1}{t}B(\frac{u}{t}, v)$. (iii) $B(u, u) = 2^{1-2u}B(u, \frac{1}{2})$. (iv) $\int_0^\infty \frac{x^{u-1}dx}{(1+x^t)^v} = \frac{1}{t}B(v - \frac{u}{t}, \frac{u}{t}), (vt > u)$.

問 1.3.3 $u, v > 0$ に対し以下を示せ：

$$\begin{aligned}B(u+1, v) &= \frac{u}{v}B(u, v+1), \quad B(u, v+1) = \frac{v}{u}B(u+1, v), &(1.17)\\ B(u+1, v) &= \frac{u}{u+v}B(u, v), \quad B(u, v+1) = \frac{v}{u+v}B(u, v). &(1.18)\end{aligned}$$

更に $k,\ell\in\mathbb{N}$ に対し

$$B(k+u,\ell+v)=\frac{(k-1+u)_k(\ell-1+v)_\ell}{(k+\ell-1+u+v)_{k+\ell}}B(u,v), \tag{1.19}$$

但し、ここで次の記号を用いた：一般に、数列 a_n と $0\le k\le n$ に対し

$$(a_n)_k=\underbrace{a_na_{n-1}\cdots a_{n-k+1}}_{k\text{ 個}} \tag{1.20}$$

特に

$$B(k+1,\ell+1)=\int_0^1 x^k(1-x)^\ell\,dx=\frac{k!\ell!}{(k+\ell+1)!} \tag{1.21}$$

問 1.3.4 $-\infty<a<b<\infty$, $u,v>0$ に対し次を示せ：

$$\int_a^b (x-a)^{u-1}(b-x)^{v-1}dx=(b-a)^{u+v-1}B(u,v)$$

これと (1.21) より $\int_a^b(x-a)^m(b-x)^ndx=\frac{(b-a)^{m+n+1}m!n!}{(m+n+1)!}$ $(m,n\in\mathbb{N})$ が分かる。

Γ 関数と B 関数は、実は次の関係式で結ばれている：

命題 1.3.3 任意の $u,v>0$ に対し

$$B(u,v)=\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{1.22}$$

ここでは証明（例 3.3.3 参照）は省略し、応用を述べる。

系 1.3.4 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. また、$v>0$ に対し

$$\int_0^\infty e^{-vr^2}\,dr=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi/v}.$$

証明：

$$\pi\stackrel{(1.16)}{=}B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\stackrel{(1.22)}{=}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\Gamma(\tfrac{1}{2})^2$$

より $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. また、

$$\int_0^\infty e^{-vr^2}\,dr\stackrel{(1.12)}{=}\frac{1}{2\sqrt{v}}\Gamma(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi/v}.$$

□

問 1.3.5 $m,n\in\mathbb{N}$ に対し次を示せ：

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)&=\begin{cases}\frac{(n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n/2}}, & n\in 2\mathbb{N},\\ \frac{(n-1)!!}{2^{(n-1)/2}}, & n\notin 2\mathbb{N}.\end{cases}\\ B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)&=2\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta=\begin{cases}\pi\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \{m,n\}\subset 2\mathbb{N},\\ 2\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \{m,n\}\not\subset 2\mathbb{N}.\end{cases}\end{aligned}$$

2　級数の計算

2.1　項別積分による級数計算 I

2.1 節では、関数列の極限と積分の交換可能性：

$$\lim_n \int_I f_n = \int_I \lim_n f,$$

(項別積分とも言う) を用いていくつかの級数の和を求める。

定理 2.1.1 (**項別積分**) $I \subset \mathbb{R}^d$ を有界区間、$f_n \in \mathscr{R}(I)$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ は有界かつ可積分とする。このとき、以下の条件に関して (a) ⇒ (b) ⇒ (c) が成立する：

(a) $\lim_n \|f_n - f_\infty\|_I = 0.$

(b) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_I < \infty$ かつ $f_n \longrightarrow f_\infty$ (I 上局所一様)

(c) $\lim_n \int_I |f_n - f_\infty| = 0.$ 特に、$\lim_n \int_I f_n = \int_I f_\infty.$

注：「項別積分」というと、微積分の多くの教科書で 定理 2.1.1 の (a) ⇒ (c) のみが載っているが、応用上は (a) が不成立でも (b) なら成立することがあるので、(b) ⇒ (c) も有用である。実は定理 2.1.1 (b) より更に緩やかな次の条件を仮定しても (c) は成立する (ルベーグの収束定理の特別な場合、[吉田 2, 52 頁, 定理 2.4.1] 参照)：

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_I < \infty \text{ かつ } f_n \longrightarrow f_\infty \ (I \text{ 上各点収束})$$

但し、$f_n \longrightarrow f_\infty$ (I 上各点収束) だけでは (c) を結論出来ない。例えば、$I = (0, 1]$, $f_n(x) = \left(n - n^2 x\right) \vee 0$ $(x \in I,\ n \in \mathbb{N})$ とする。絵を描いてみると容易に分るように I 上各点で $f_n \longrightarrow 0$ だが、$\int_I f_n \equiv 1/2.$ 従って (c) は正しくない。

　定理 2.1.1 の証明は後回しにし、例を見よう。

例 2.1.2 $x \in [-1, 1]$ に対し $\mathrm{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. 特に $x = 1$ とすれば

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + ... = \tfrac{\pi}{4}, \quad (\textbf{ライプニッツの級数})$$

を得る。

証明：<u>$x \in (-1, 1)$ の場合:</u> $f_N(y) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n y^{2n}$ とおく。容易に分るように

(1) $x \in (-1, 1)$ について局所一様に $\lim_N f_N(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

(2) $x \in (-1, 1)$ に対し $\int_0^x f_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

$x\in(-1,1)$ とすると (1) の収束は $[0\wedge x, 0\vee x]$ 上一様。従って、

$$\begin{aligned}\mathrm{Arctan}\,x &= \int_0^x \frac{dy}{1+y^2} \stackrel{\text{項別積分}}{=} \lim_N \int_0^x f_N \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

$\underline{y=\pm 1\text{ の場合}}$: 右辺の級数を $f(y)$ として、$f(y)$ が $[-1,1]$ で一様収束すれば 定理 1.1.2 より $y=\pm 1$ での連続性が判り結論を得る。ところが、$f(y)$ の部分和は奇関数なので $[0,1]$ 上での一様収束を言えば十分。今、$f(1)$ は $y=1$ で収束する（補題 1.2.2)。従って、定理 1.2.5 より $f(y)$ は $[0,1]$ 上一様収束する。 □

問 2.1.1 $x\in[-1,1]$ に対し $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \int_0^x \frac{\mathrm{Arctan}\,y}{y}dy$ を示せ。$x=1$ のときこの級数（積分）の値をカタラン数と言う[6]。

例 2.1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

証明：$f_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} f_N\circ\sin &= \sum_{n=0}^N \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1} \\ &\stackrel{\text{問 1.3.5}}{=} \sum_{n=0}^N \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

よって

$$\textbf{(1)}\qquad \lim_N \int_0^{\pi/2} f_N\circ\sin = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

一方、問 1.2.1 より $\lim_N f_N = \mathrm{Arcsin}$ （$[0,1]$ 上一様収束). 従って $\lim_N f_N\circ\sin\theta = \theta$ ($\theta\in[0,\pi/2]$ について一様収束). よって項別積分 (定理 2.1.1) より

$$\textbf{(2)}\qquad \lim_N \int_0^{\pi/2} f_N\circ\sin = \int_0^{\pi/2}\theta\,d\theta = \frac{\pi^2}{8}\ .$$

(1),(2) より $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. また、

$$s \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \underbrace{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}}_{=\pi^2/8} + \underbrace{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2}}_{=s/4},\quad \text{よって } s=\tfrac{\pi^2}{6}.$$

□

例 2.1.3 の等式は 1735 年、オイラーが示した（オイラーは $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^k}$, $k=4,6,8,10,12$ も求めた）。ここではオイラーの証明 ([杉浦, I 巻, 315 頁] 参照）に少し工夫を加え、広義積分を使わず議論した。なお、より一般に、

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1}B_k\pi^{2k}}{(2k)!},\quad k=1,2,..$$

が知られている [杉浦, II 巻, 337 頁]、ここで $B_1, B_2, ..$ はベルヌーイ数を表す。

[6]Eugéne Charles Catalan (1814–1894).

問 2.1.2 以下を示せ：(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x\log x)^n}{n!}$ は $x \in (0,1]$ について一様収束する。(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x}\,dx$. ヒント：(1.9),(1.11).

問 2.1.3 以下を示せ：(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} = \int_0^x \frac{1}{y}\log\frac{1}{1-y}dy$ $(x \in [0,1])$.
(ii) $\int_0^1 \frac{1}{x}\log\frac{1}{1-x}dx = \int_0^1 \frac{1}{1-x}\log\frac{1}{x}dx = \int_0^{\infty}\frac{x}{e^x-1}dx = \frac{\pi^2}{6}$. ヒント：例 2.1.3.

例 2.1.4 $\theta \in (0,2\pi)$, $r \in [0,1]$ に対し

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n e^{\mathbf{i}n\theta}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\cos(n\theta)}{n} + \mathbf{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\sin(n\theta)}{n} \\ &= -\tfrac{1}{2}\log\left(1-2r\cos\theta+r^2\right) + \mathbf{i}\varphi(r,\theta), \end{aligned} \tag{2.1}$$

但し $\varphi(r,\theta) = \begin{cases}\mathrm{Arctan}\,\left(\frac{r-\cos\theta}{\sin\theta}\right), & \theta \neq \pi, \\ 0, & \theta = \pi.\end{cases}$ 特に $r=1$ のとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\mathbf{i}n\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n} + \mathbf{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n} = -\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{i}\frac{\pi-\theta}{2}. \tag{2.2}$$

また級数の収束は $r<1$ なら $\theta \in (0,2\pi)$ について一様、$r=1$ なら $\theta \in (0,2\pi)$ について局所一様である。

注：

(1) (2.1) の各辺は、対数の主値を用い $-\mathrm{Log}\,(1-re^{\mathbf{i}\theta})$ と表せる。

(2) (2.2) 虚部の等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$ は $\theta=0$ で不成立（左辺 =0, 右辺=$\frac{\pi}{2}$）. これは、左辺の $\theta=0$ での不連続性による。一方、この等式で $\theta=\frac{\pi}{2}$ とすればライプニッツの級数 (例 2.1.2) を得る。

証明：<u>$r \in [0,1)$ の場合：</u>$\theta \in (0,2\pi)$ を任意に固定すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n e^{\mathbf{i}(n+1)\theta} = \frac{e^{\mathbf{i}\theta}}{1-\rho e^{\mathbf{i}\theta}} = \frac{\cos\theta-\rho+\mathbf{i}\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}, \quad (\rho \in [0,r] \text{ について一様収束}).$$

両辺を $\rho \in [0,r]$ で積分すると、項別積分（定理 2.1.1） より (2.1) を得る。
<u>$r=1$ の場合：</u>$\theta \in (0,2\pi)$ だから 例 1.2.4 より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n e^{\mathbf{i}n\theta}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-re^{\mathbf{i}\theta})^n}{n}$$

は $r \in [0,1]$ について一様収束する。従って (2.1) の左辺は $r \in [0,1]$ について連続。故に $r<1$ の場合の (2.1) で $r \to 1$ として

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\mathbf{i}n\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n} + \mathbf{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n} = -\tfrac{1}{2}\log(2-2\cos\theta) + \mathbf{i}\varphi(1,\theta).$$

右辺で $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ を用いれば (2.2) を得る。 $\square$

問 2.1.4 以下を示せ：$\theta \in (-\pi, \pi)\backslash\{0\}$ に対し、
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(2n-1)\mathbf{i}\theta}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\theta)}{2n-1} + \mathbf{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\theta)}{2n-1} = -\frac{1}{2} \log\left(\tan\frac{|\theta|}{2}\right) + \mathbf{i} \frac{\theta}{|\theta|}\frac{\pi}{4}$.
特に $\theta = \frac{\pi}{4}$ として、

$$1 - \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}\right) + \left(\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9}\right) - \left(\tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13}\right) + \left(\tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{17}\right) - .... = -\tfrac{1}{2}\log(\tan\tfrac{\pi}{8}) = \tfrac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}),$$
$$\left(1 + \tfrac{1}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11}\right) - \left(\tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15}\right) + ... = \tfrac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

問 2.1.5 次を示せ：$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(1 - 2r\cos\theta + r^2)d\theta = \begin{cases} 0, & 0 \le r < 1, \\ 2\log r, & r > 1. \end{cases}$
ヒント：(2.1) の項別積分で $0 \le r < 1$ の場合を得る。$r > 1$ の場合は $0 \le r < 1$ の場合に帰着。

問 2.1.6 以下を示せ：(i) $\int_0^{\pi} \log\sin = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos = -\pi\log 2$.
(ii) $\int_0^1 \frac{\mathrm{Arcsin}\, x}{x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\tan\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\tan\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\log 2$.
(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2}\log 2$.
(i) のヒント：(2.2) を $\theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ について項別積分し、$\varepsilon \to 0$ とする。

問 2.1.7 (2.2) の虚部に対する部分和 $f_N(\theta) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ $(\theta \in I \stackrel{\mathrm{def.}}{=} (0, 2\pi))$ について以下を示せ：(i) $f_N(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^{\theta} \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\varphi\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi - \frac{\theta}{2}$. (ii) $\sup_N \|f_N\|_I < \infty$.

問 2.1.8 フーリエ級数の部分和

$$f_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{\mathbf{i}n\theta}, \quad g_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} b_n e^{\mathbf{i}n\theta}$$

$(a_n, b_n \in \mathbb{C},\, \theta \in I \stackrel{\mathrm{def.}}{=} (0, 2\pi))$ および関数 $f(\theta)$, $g(\theta)$ について、$\lim_N f_N = f$, $\lim_N g_N = g$ (共に I 上局所一様) かつ $\sup_N(\|f_N\|_I + \|g_N\|_I) < \infty$ のとき、次を示せ[7] ：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n} = \frac{1}{2\pi}\int_I f\overline{g} \quad \textbf{(パーセヴァルの等式)}$$

また、これと (2.2), 問 2.1.7 から $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を示せ。

問 2.1.9 以下を示せ:
(i) $\theta \in [0, 2\pi]$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} = \frac{(\theta-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
ヒント：(i):問 2.1.7 の結果から (2.2) の虚部を項別積分できる。あるいは、問 2.1.7 を用いずに、$\theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ について一様収束することを利用し項別積分してから $\varepsilon \to 0$ としてもよい。(ii):パーセヴァルの等式 (問 2.1.8)。
注: 問 2.1.9 の方法を繰り返せば $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ $(k = 4, 6, ...)$ を順次求めることができる。

定理 2.1.1 の証明： (a) $\Rightarrow$ (b) は明らか。(b) $\Rightarrow$ (c) を示す前に、(a) $\Rightarrow$ (c) が次のようにして分かることに注意する：

$$\left|\int_I f_\infty - \int_I f_n\right| \le \int_I |f_\infty - f_n| \le \|f_\infty - f_n\|_I |I| \longrightarrow 0 \ \ (n \longrightarrow \infty).$$

[7] パーセヴァルの等式は 1799 年、Marc-A. Parseval (1755–1836) により示された。

(b) ⇒ (c) を示す。$M = \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \|f_n\|_I$ とおく。今、$\varepsilon > 0$ と任意とし、閉区間 $J \subset I$ を $|I| - |J| < \frac{\varepsilon}{4M+1} \le \varepsilon$ なるようにとる。$\lim_n \|f_n - f_\infty\|_J = 0$ と、先程述べた注意より、次のような $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在：

$$n \ge n_0 \implies \int_J |f_n - f_\infty| \le \varepsilon/2.$$

$n \ge n_0$ とするとき、$\|f_\infty - f_n\|_I \le 2M$, 及び区間加法性を用い、

$$\int_I |f_n - f_\infty| \le \int_J |f_n - f_\infty| + 2M(|I| - |J|) \le \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M+1} \le \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから (c) を得る。 □

2.2 項別積分による級数計算 II （広義積分の場合）

広義積分に対する項別積分（定理 2.2.3）と、その応用例を述べる。広義積分に対する項別積分は、狭義積分に対するもの（定理 2.1.1）に帰着させて証明する。その為に、「広義積分の一様収束」という概念を導入する。積分は級数の連続版と考えられるが、その観点からは、「広義積分の一様収束」は、関数項級数の一様収束の連続版に該当する。

定義 2.2.1 （**広義積分の一様収束**）$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, J を集合、 $f_t \in \mathscr{R}_{\mathrm{loc}}(I)$ $(t \in J)$ とする。各 $t \in J$ で広義積分 $\int_a^b f_t$ が収束し、更に

$$\lim_{\substack{u \to a \\ u > a}} \sup_{t \in J} \left| \int_a^u f_t \right| = 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{\substack{v \to b \\ v < b}} \sup_{t \in J} \left| \int_v^b f_t \right| = 0 \tag{2.3}$$

であるとき、広義積分 $\int_a^b f_t$ は $t \in J$ について**一様収束**すると言う。

多くの場合、広義積分の一様収束は次の例 2.2.2 で述べる十分条件を通じて検証される。関数項級数の一様収束との類似という観点からは、例 2.2.2(a) はワイエルシュトラスの M-テスト に該当、また、例 2.2.2(b) は 定理 1.2.3 に該当する。

例 2.2.2 (**広義積分が一様収束するための十分条件**) 記号は 定義 2.2.1 の通りとする。次のいずれかのとき、広義積分 $\int_a^b f_t$ は一様収束する。

(a) 次のような $g : I \longrightarrow [0, \infty)$ が存在：

$$(x, t) \in I \times J \implies |f_t(x)| \le g(x),$$
$$\int_a^b g \text{ は収束}$$

(b) $f_t = f g_t$, 但し $f, g_t : I \longrightarrow \mathbb{C}$ は次の通りとする：

$$\int_a^b f \text{ は収束},$$
$$g_t \in C^1(I)\ (t \in J),\ \sup_{t \in J} \|g_t\|_I < \infty,\ \sup_{t \in J} \int_a^b |g_t'| < \infty.$$

証明: (a):仮定より各 $t \in J$ で広義積分 $\int_a^b f_t$ は絶対収束する。(2.3) のうち、$\displaystyle\lim_{\substack{v\to b\\ v<b}} \sup_{t\in J} \left|\int_v^b f_t\right| = 0$ を示すが、他方も同様である。

$$\left|\int_v^b f_t\right| \le \int_v^b |f_t| \le \int_v^b g.$$

よって

$$\sup_{t\in J}\left|\int_v^b f_t\right| \le \int_v^b g \longrightarrow 0 \quad (v \longrightarrow b).$$

(b):

$$F(x) = \int_a^x f, \ \ M = \sup_{t\in J}\left(\|g_t\|_I + \int_a^b |g_t'|\right)$$

とおく。$\int_a^b f$ の収束より

$$\lim_{v\to b} \sup_{x\in[v,b)} |F(x) - F(b)| = 0.$$

また、

$$\int_v^b |(F(x) - F(b))g_t'(x)|\, dx \le \sup_{x\in[v,b)} |F(x) - F(v)| M < \infty.$$

よって $f_t(x) = (F(x) - F(b))' g_t(x)$ の部分積分より、$\int_v^b f_t$ の収束及び、次式を得る：

$$\int_v^b f_t \overset{\text{部分積分}}{=} -\underbrace{(F(v) - F(b))g_t(v)}_{(1)} - \underbrace{\int_v^b (F(x) - F(b))g_t'(x)\, dx}_{(2)}$$

更に $v \to b$ のとき、

$$|(1)| \le M|F(b) - F(v)| \longrightarrow 0, \quad |(2)| \le \sup_{x\in[v,b)} |F(x) - F(v)| M \longrightarrow 0.$$

以上より $\displaystyle\lim_{\substack{v\to b\\ v<b}} \sup_{t\in J} \left|\int_v^b f_t\right| = 0$ を得る。$\int_a^u f_t$ $(u \in I)$ の収束及び (2.3) の他方も全く同様に示せる。 □

項別積分（定理 2.1.1）は次のような形で広義積分に一般化される：

定理 2.2.3 (**項別の広義積分**) $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $f_n \in \mathscr{R}_{\text{loc}}(I)$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ とし、以下を仮定する：

(a) $\lim_n f_n = f_\infty$ （I 局所一様）,

(b) 広義積分 $\int_a^b f_n$ は $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ について一様収束する。

このとき、

$$\lim_n \int_a^b |f_n - f_\infty| = 0, \ \ \text{特に、} \ \ \lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f_\infty.$$

証明は後回しにし、例を見よう。

例 2.2.4 等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+a)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-as} s^{b-1}}{1-xe^{-s}}\, dt = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^1 \frac{t^{a-1}\left(\log \frac{1}{t}\right)^{b-1}}{1-xt}\, dt$$

が以下の場合に成立する：(i) $a > 0$, $b > 1$, $x = 1$. (ii) $a, b > 0$, $x \in [-1, 1)$.

証明：$f_n(s) = e^{-(a+n)s} s^{b-1}$ とすると、

$$\int_0^{\infty} f_n = \frac{\Gamma(b)}{(n+a)^b}.$$

次に

$$g(s) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{e^{-as} s^{b-1}}{1-xe^{-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n f_n(s), \quad g_N(s) \stackrel{\text{def.}}{=} e^{-as} s^{b-1} \frac{1-(xe^{-s})^{N+1}}{1-xe^{-s}} = \sum_{n=1}^{N} x^n f_n(s)$$

とし、以下を検証する：

(a) $\lim_N g_N = g$ ($(0, \infty)$ 上局所一様)。

(b) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} g_N$ は N について一様収束する。

これらが分れば、項別積分（定理 2.2.3）を用い、

$$\int_0^{\infty} g = \lim_N \int_0^{\infty} g_N = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_0^{\infty} f_n = \Gamma(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+a)^b}.$$

<u>(a) の検証：</u>$\varepsilon > 0$ を任意、$I = [\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]$ とし、I 上の一様収束を言えばよい。$s \in I$ なら $1 - xe^{-s} \geq 1 - e^{-\varepsilon} > 0$. よって $I \ni s \mapsto \frac{e^{-as}s^{b-1}}{1-xe^{-s}}$ は連続。そこで、その最大値を M とすると、

$$|g - g_N|(s) = e^{-as} s^{b-1} \frac{|xe^{-s}|^{N+1}}{1-xe^{-s}} \leq M|xe^{-s}|^{N+1} \leq Me^{-\varepsilon(N+1)} \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty.$$

これで所期一様収束が分った。

<u>(b) の検証：</u>

$$0 \leq g_N(s) \leq \frac{2e^{-as} s^{b-1}}{1-xe^{-s}}$$

上式右辺は、N に無関係で、仮定 (i) または (ii) のもとで $s \in (0, \infty)$ について可積分。よって 例 2.2.2(a) より、(b) が言える。 □

問 2.2.1 例 2.2.4 の結果から次を示せ：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+b} = x^{-b/a} \int_0^{x^{1/a}} \frac{u^{b-1}}{1+u^a}$, $(a, b > 0$, $x \in (0, 1])$ また、これを用以下の級数の値を求めよ：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$（ライプニッツの級数), $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$.

問 2.2.2 $y \in \mathbb{R}$ に対し次を示せ：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2+n^2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{e^x - 1}\, dx$.

定理 2.2.3 の証明：以下のようにして狭義積分の場合（定理 2.1.1）に帰着させる。$a < u < v < b$ とする。

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_n - f_\infty| &\leq \int_v^b |f_n - f_\infty| + \int_u^v |f_n - f_\infty| + \int_a^u |f_n - f_\infty| \\ &\leq \underbrace{2 \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \int_v^b |f_n|}_{(1)} + \underbrace{\int_u^v |f_n - f_\infty|}_{(2)} + \underbrace{2 \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \int_a^u |f_n|}_{(3)}\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ を任意とすると、仮定 (b) より u, v を

$$(1) \le \varepsilon/6, \ \ (3) \le \varepsilon/6$$

となるようにとれる。更に $[u, v]$ は有界閉区間だから、仮定 (a) より $f_n \to f_\infty$ ($[u, v]$ 上一様). 従って、狭義の積分に対する項別積分（定理 2.1.1）より、次のような $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在：

$$n \ge n_0 \implies (2) \le \varepsilon/3.$$

以上から、$n \ge n_0$ なら

$$\int_a^b |f_n - f_\infty| \le \varepsilon.$$

これで、定理が示された。 $\square$

3　積分の計算

3.1　径数の微分による積分計算 I

定理 3.1.1 (**径数付き積分**) $I \subset \mathbb{R}^d$ を有界閉区間、$J \subset \mathbb{R}^k$, 関数 $(x,t) \mapsto f_t(x)$ $(I \times J \longrightarrow \mathbb{C})$ は連続とする。このとき、

(a) (**連続性**) $F(t) = \int_I f_t(x)\,dx$ は $t \in J$ について連続である。

(b) (**微分**) 更に $J \subset \mathbb{R}$ が区間で、全ての $(x,t) \in I \times J$ で $\partial_t^\ell f_t(x)$ $(\ell = 1, ..., m)$ が存在し $(x,t) \in I \times J$ について連続なら $F \in C^m(J)$ かつ

$$F^{(\ell)}(t) = \int_I \partial_t^\ell f_t(x) dx, \quad \ell = 1, ..., m.$$

証明は後回しにし、例を見よう：

例 3.1.2 $t \in [0, \infty)$ に対し $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t.$

証明： $b \in (0, \infty)$ に対し

$$f_t(x) \stackrel{\text{def.}}{=} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}, \quad \partial_t f_t(x) = -e^{-tx} \sin x$$

は $(x,t) \in [0,b] \times [0,\infty)$ について連続。従って、定理 3.1.1 より $F_b(t) = \int_0^b f_t(x)\,dx$ は $t \in [0,\infty)$ について C^1 かつ

$$F_b'(t) = -\int_0^b e^{-tx} \sin x\,dx = -\,\mathrm{Im}\left(\int_0^b e^{-(t-\mathbf{i})x}\,dx\right) = -\frac{1 - e^{-tb}(\cos b - t \sin b)}{1+t^2}.$$

よって

$$\begin{aligned} F_b(t) &= \int_t^\infty \frac{1 - e^{-sb}(\cos b - s \sin b)}{1+s^2} + C, \quad (C \text{ は定数}) \\ &= \underbrace{\int_t^\infty \frac{ds}{1+s^2}}_{=\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t} - r_b(t) + C, \end{aligned}$$

但し $r_b(t) = \displaystyle\int_t^\infty \frac{e^{-sb}(\cos b - s \sin b)}{1+s^2}$. ところが、

$$|F_b(t)| \le \int_0^b |f_t| \le \int_0^b e^{-tx}\,dx \le \frac{1}{t} \longrightarrow 0 \ \ (t \longrightarrow \infty)$$

だから $C = 0$. また、$\frac{|\cos b - s \sin b|}{1+s^2} \le 2$ より

$$|r_b(t)| \le 2 \int_t^\infty e^{-sb} ds \le \frac{2}{b} \longrightarrow 0 \ \ (b \longrightarrow \infty).$$

以上より、$\displaystyle\lim_{b \to \infty} F_b(t) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t.$ □

問 3.1.1 $q(\theta) = a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta$ $(a, b > 0)$ に対し以下を示せ：(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{q} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$. (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2}{q^2} = -\partial_a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{q} = \frac{\pi}{4a\sqrt{ab}}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2}{q^2} = -\partial_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{q} = \frac{\pi}{4b\sqrt{ab}}$. (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

問 3.1.2 全ての $t \geq 0$ に対し $\left(\int_0^t \exp(-x^2)\,dx\right)^2 + \int_0^1 \frac{\exp\left(-(1+x^2)t^2\right)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ を示し、そこから $\int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}/2$ を導け。

問 3.1.3 $q(\theta) = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$ $(a, b > 0)$ に対し以下を示せ：
(i) $\partial_a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log q = \frac{\pi}{2\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$. (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log q = \pi \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$.

問 3.1.4 以下を示せ（(ii),(iii) では 例 3.1.2 の証明を参考にせよ）：
(i) $x \in (0, \infty)$ に対し $0 \leq 1 - \cos x \leq 2 \wedge x \wedge \frac{x^2}{2}$.

(ii) $$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x} e^{-tx} dx = \begin{cases} \log\sqrt{1+(1/t)^2}, & t > 0, \\ \infty & t = 0. \end{cases}$$

(iii) $$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} e^{-tx} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t - t\log\sqrt{1+(1/t)^2}, & t > 0, \\ \frac{\pi}{2} & t = 0. \end{cases}$$

なお、$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ と積分変数の変換より、(iii) の左辺$= \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-2tx} dx$.

定理 3.1.1 の証明：(a): $t_n, t \in J$, $t_n \longrightarrow t$ とする。このとき $K = \{t_n\}_{n \geq 1} \cup \{t\}$ はコンパクト。故に $f_t(x)$ は $(x, t) \in I \times K$ について一様連続。従って補題 3.1.3（後述）より

$$f_{t_n}(x) \longrightarrow f_t(x) \ \ (x \in I \text{ について一様})$$

ゆえに項別積分（定理 2.1.1）より

$$\int_I f_{t_n}(x)\,dx \longrightarrow \int_I f_t(x)\,dx.$$

よって、F は連続。
(b): 仮定を A_m, 示すべき結論を P_m と呼び、「$A_m \Rightarrow P_m$」 を m についての帰納法で示す。
まず $m = 1$：J の替わりに、任意の有界閉区間 $K \subset J$ をとって結論が言えれば J 自身に対しても言える。そこで初めから J は有界閉区間とする。次を示す：

$$(*) \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f_{t+h}(x) - f_t(x)}{h} = \partial_t f_t(x) \qquad (x \in I \text{ について一様収束})$$

仮定より $\partial_t f_t(x)$ は $I \times J$ 上一様連続. 故に 補題 3.1.3 より任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次のような $\delta > 0$ が存在：

$$t, t' \in J,\ |t - t'| \leq \delta \implies \sup_{x \in I} |\partial_t f_t(x) - \partial_t f_{t'}(x)| \leq \varepsilon.$$

すると、$|h| \leq \delta$ なら、

$$\begin{aligned} \left|\frac{f_{t+h}(x) - f_t(x)}{h} - \partial_t f_t(x)\right| &= \left|\int_0^1 (\partial_t f_{t+\theta h}(x) - \partial_t f_t(x))\,d\theta\right| \\ &\leq \int_0^1 |\partial_t f_{t+\theta h}(x) - \partial_t f_t(x)|\,d\theta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

上式で $x \in I$ は任意なので $(*)$ が言えた。
$h \neq 0$ に対し

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \int_I \frac{f_{t+h}(x) - f_t(x)}{h} dx.$$

従って $h \longrightarrow 0$ で $(*)$ に注意すれば、項別積分（定理 2.1.1）より

$$F'(t) = \int_I \partial_t f_t(x) dx$$

上式と径数を含む積分の連続性（定理 3.1.1） より $F' \in C(J)$. 以上から P_1 を得る。これで $m = 1$ の場合が出来た。残りは簡単なので問にしよう。 $\square$

問 3.1.5 定理 3.1.1(b) の証明の残りを完成せよ。

定理 3.1.1 の証明に用いた補題を述べる：

補題 3.1.3 $A_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ $(i = 1, 2)$, $f \in C_{\mathrm{u}}(A_1 \times A_2)$ とする。このとき、

$$x, x_n \in A_1,\ x_n \longrightarrow x \implies \lim_n \sup_{y \in A_2} |f(x_n, y) - f(x, y)| = 0.$$

証明：任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次のような $\delta > 0$ が存在することを言えばよい：

$$x, x' \in A_1,\ |x - x'| \le \delta \implies \sup_{y \in A_2} |f(x, y) - f(x', y)| \le \varepsilon.$$

仮定より、$\forall \varepsilon > 0$ に対し次のような $\delta > 0$ が存在：

$$(x, y), (x', y') \in A_1 \times A_2,\ |(x, y) - (x', y')| \le \delta \implies |f(x, y) - f(x', y')| \le \varepsilon.$$

特に、$y = y'$ の場合

$$x, x' \in A_1, y \in A_2,\ |x - x'| \le \delta \implies |f(x, y) - f(x', y)| \le \varepsilon.$$

$y \in A_2$ は任意なので結論を得る。 $\square$

3.2 径数の微分による積分計算 II (広義積分の場合)

径数付き積分の微分 (定理 3.1.1) を広義積分に一般化する：

定理 3.2.1 (**径数付き広義積分**) $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}^k$, 関数 $(x, t) \mapsto f_t(x)$ $(I \times J \longrightarrow \mathbb{C})$ は連続とする。広義積分

$$F(t) = \int_a^b f_t(x) dx$$

$t \in J$ について局所一様収束する（つまり、任意のコンパクト集合 $K \subset J$ に対し上の広義積分が、$t \in K$ について一様収束する）とする。このとき、

(a) (**連続性**) $F \in C(J)$.

(b) (**微分**) 更に、$J \subset \mathbb{R}$ が区間かつ $\ell = 1, ..., m$ に対し以下を仮定する：

全ての $(x, t) \in I \times J$ で $\partial_t^\ell f_t(x)$ が存在し $I \times J$ 上連続

広義積分 $\displaystyle\int_a^b \partial_t^\ell f_t(x) dx$ が $t \in J$ について局所一様収束する

このとき、$F \in C^m(J)$ かつ、$t \in J$ に対し

$$F^{(\ell)}(t) = \int_a^b \partial_t^\ell f_t(x) dx, \quad \ell = 1, ..., m.$$

証明は後回しにして、例を見よう。

例 3.2.2 $f :\in C((0,\infty))$, $\int_0^\infty f$ が収束するとする。このとき、

(a) 広義積分 $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\,dx$ は $t \in [0,\infty)$ について一様収束し、$\lim_{t\to 0} F(t) = \int_0^\infty f$, $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

(b) $F \in C^\infty((0,\infty))$, $F^{(\ell)}(t) = \int_0^\infty (-x)^\ell e^{-tx} f(x)\,dx$.

証明：(a): $g_t(x) = e^{-tx}$, $f_t = fg_t$ とすれば 例 2.2.2(b) の仮定が満たされ、広義積分 $\int_0^\infty f_t$ は $t \in [0,\infty)$ について一様収束する。また、

$$\lim_{t\to 0} f_t = f, \quad \lim_{t\to\infty} f_t = 0.\text{（}(0,\infty)\text{ 上、局所一様）}$$

実際、任意のコンパクト集合 $K \subset (0,\infty)$ に対し、$K \subset [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ となる $\varepsilon > 0$ が存在するから $I \stackrel{\text{def.}}{=} [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ 上一様収束すればよい。ところが

$$\begin{aligned} \|f_t - f\|_I &\le (1 - e^{-t/\varepsilon})\|f\|_I \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow 0). \\ \|f_t\|_I &\le e^{-t\varepsilon}\|f\|_I \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty). \end{aligned}$$

以上と、項別の広義積分（定理 2.2.3） から結果を得る。
(b): $\partial_t^\ell f_t(x) = (-x)^\ell f_t(x)$ は $(x,t) \in (-\infty,\infty)^2$ について連続だから、$\int_0^\infty \partial_t^\ell f_t$ が $t \in (0,\infty)$ について局所一様収束することを言えば、定理 3.2.1 より結論を得る。(a) と同様に考えて、$t \in J \stackrel{\text{def.}}{=} [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ について一様収束すればよい。ところが $t \in J$ なら

$$|\partial_t^\ell f_t(x)| = |(x)^\ell e^{-tx} f(x)| \le \varepsilon^{-\ell} e^{-\varepsilon x}\|f\|_I.$$

右辺は $t \in J$ に無関係かつ $x \in (0,\infty)$ について広義可積分だから例 2.2.2(a) より $\int_0^\infty \partial_t^\ell f_t$ は $t \in J$ について局所一様収束する。 □

問 3.2.1 ガンマ関数について、 $\Gamma \in C^\infty((0,\infty))$ かつ任意の $q \ge 1$ に対し $\Gamma^{(q)}(t) = \int_0^\infty x^{t-1}(\log x)^q e^{-x}\,dx$ を示せ。

例 3.2.3 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi v}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-m)^2}{2v} + \mathrm{i}tx}\,dx = e^{\mathrm{i}mt - \frac{vt^2}{2}}$, $m \in \mathbb{R}$, $v > 0, t \in \mathbb{R}$.

注：$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}$ は**正規分布**と呼ばれる確率分布の密度であり、m は平均、$v > 0$ は分散（平均からの「ばらつき具合い」: 問 3.2.3 参照）を表す[8]。例 3.2.3 は正規分布のフーリエ変換である。

証明： まず $m = 0$ の場合を考える。$m = 0$ なら $e^{-\frac{x^2}{2v}}$ が偶関数だから

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2v} + \mathrm{i}tx}\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2v}} \cos(tx)\,dx.$$

そこで $v > 0$ を固定し、$f_t(x) = e^{-\frac{x^2}{2v}} \cos(tx)$ とする。$f_t(x)$, $\partial_t f_t(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2v}} \sin(tx)$ は共に $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ について連続。また、

$$|f_t(x)| \le e^{-\frac{x^2}{2v}}, \quad |\partial_t f_t(x)| \le |x| e^{-\frac{x^2}{2v}}$$

[8]例えば、知能指数の分布は $m = 100$, $\sqrt{v} = 15$ の正規分布である。

より、$F(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_t$, $\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t f_t$ は共に $t \in \mathbb{R}$ について一様収束する。以上と定理 3.2.1 より $F \in C^1(\mathbb{R})$ かつ

$$F'(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2v}} \sin(tx)\, dx \stackrel{\text{部分積分}}{=} \underbrace{\left[ve^{-\frac{x^2}{2v}} \sin(tx)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - vt \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2v}} \cos(tx)\, dx}_{=F(t)}.$$

また、$F(0) = \sqrt{2\pi v}$ (系 1.3.4). よって 問 3.2.2 より $m = 0$ に対する結論を得る。$m \neq 0$ の場合、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v} + \mathbf{i}tx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2v} + \mathbf{i}t(x+m)}\, dx = e^{\mathbf{i}tm} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2v} + \mathbf{i}tx}\, dx.$$

よって、$m = 0$ の場合を $e^{\mathbf{i}tm}$ 倍すれば、$m \neq 0$ の場合を得る。 $\square$

問 3.2.2 $F \in C^1(\mathbb{R})$, $h \in C(\mathbb{R})$ に対し「$F' = hF \iff F(t) = F(0)\exp\left(\int_0^t h\right)$」を示せ。$\Rightarrow$ のヒント： $G(t) = \exp\left(\int_0^t h\right)$ として、$(F/G)' \equiv 0$ を言えばよい。

問 3.2.3 例 3.2.3 について以下を示せ：
$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}\, dx = m$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}\, dx = v$.

問 3.2.4 例 3.1.2 で示した等式：$\int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t$ $(t \in [0, \infty))$ を定理 3.2.1 の応用として再証明せよ。

問 3.2.5 問 3.1.4 で示した等式を定理 3.2.1 の応用として再証明せよ。

問 3.2.6 $(\star)$ $t, u \geq 0$ に対し以下を示せ：
(i) $\int_0^{\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{t}{x}\right)^2\right) dx = t\int_0^{\infty} \exp\left(-\left(y - \frac{t}{y}\right)^2\right) \frac{dy}{y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
(ii) $\int_0^{\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{t^2}{4x^2}\right)\, dx = \sqrt{\pi}e^{-t}$.
(iii)：$\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)e^{-u(1+x^2)}}{1+x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_u^{\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{t^2}{4x^2}\right)\, dx$, 特に $\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}e^{-t}$.
ヒント：(i)： 最初の等式の左辺、右辺を I_1, I_2 とする。まず $I_1 = I_2$ を示し、次に $(I_2 + I_2)/2$ を考える。(iii)：左辺を u について微分。

定理 3.2.1 の証明に先だって、別の定理を準備しよう：

定理 3.2.4 (**項別微分**) $I \subset \mathbb{R}$ を区間、$f_n \in C^m(I)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ とし、以下を仮定する：

(a) f_n は I 上、 関数 f に各点収束する。

(b) $f_n^{(k)}$ $(1 \leq k \leq m)$ は I 上、局所一様収束する。

このとき、$f \in C^m(I)$ かつ

$$\text{全ての } x \in I,\ 1 \leq k \leq m \text{ に対し } f^{(k)}(x) = \lim_n f_n^{(k)}(x).$$

証明：仮定を A_m, 示すべき結論を P_m と呼び、「$A_m \Rightarrow P_m$」 を m についての帰納法で示す。$m = 1$ のとき：$g(x) = \lim_n f_n'(x)$ $(\in I)$ とする。局所一様収束で連続性は保たれる（定理 1.1.2）から $g \in C(I)$. 一方、$a, x \in I$ を任意とし、$a, x \in J \subset I$ となる有界閉区間 J をとる。微積分の基本公式より

(1) $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'$.

仮定より、$f_n' \to g$ (J 上一様収束). そこで (1) で $n \to \infty$ として項別積分 (定理 2.1.1) すると

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g.$$

上式より $f \in C^1(I)$, かつ I 上で $f' = g$. 即ち P_1 を得る。これで $m = 1$ の場合が出来た。残りは簡単なので問にしよう。 □

問 3.2.7 定理 3.2.4 の証明の残りを完成せよ。

定理 3.2.1 の証明：(a):$t_n, t \in J$, $t_n \longrightarrow t$ とする。定理 3.1.1 の証明と同様に

$$\lim_n f_{t_n}(x) = f_t(x), \quad (x \in I \text{ について局所一様})$$

また、仮定から、広義積分 $\int_a^b f_{t_n}$ の収束は n について一様。従って項別の広義積分（定理 2.2.3）より

$$\lim_n \int_a^b f_{t_n}(x)\, dx = \int_a^b f_t(x)\, dx.$$

よって F は連続である。

(b):項別微分（定理 3.2.4）を用いて狭義積分の場合 (定理 3.1.1) に帰着させる。$u, v \in I \cup \{a, b\}$ に対し $F_{u,v}(t) = \int_u^v f_t$ と書く。このとき、 $F = F_{a,c} + F_{c,b}$ なので、F の替わりに $F_{a,c}$, $F_{c,b}$ に対し結果を示せば十分。そこで $F_{c,b}$ を考える。$v \in I$ なら仮定と径数付き狭義積分の微分 (定理 3.1.1) より、$F_{c,v} \in C^m(J)$ かつ

$$F_{c,v}^{(\ell)}(t) = \int_c^v \partial_t^\ell f_t, \quad \ell = 1, .., m.$$

また、全ての $t \in J$ に対し

$$\lim_{v \to b} F_{c,v}(t) = F_{c,b}(t)$$

かつ $\ell = 1, .., m$ に対し

$$\lim_{v \to b} F_{c,v}^{(\ell)}(t) = \int_c^b \partial_t^\ell f_t \quad (t \in J \text{ について局所一様}).$$

従って、項別微分（定理 3.2.4）より $F_{c,b} \in C^m(J)$,

$$F_{c,b}^{(\ell)}(t) = \int_c^b \partial_t^\ell f_t$$

□

3.3 積分の順序交換による積分計算

定理 3.3.1 フビニの定理（の特別な場合）: (a, b), (c, d) を共に $\mathbb{R}$ の区間（長さ無限でもよい）、$f \in C((a, b) \times (c, d))$ とする。このとき、

$$\int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| dy = \int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)| dx.$$

上式は両辺が無限大となる場合も含め無条件に成立する。また、上式両辺の一方（従って両方）が有限なら、関数

$$(a,b) \ni x \mapsto \int_c^d f(x,y)dy, \quad (c,d) \ni x \mapsto \int_a^b f(x,y)dy$$

が定義され、かつ可積分。更に

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

定理 3.3.1 本来はルベーグ積分の定理だが (より詳しくは [吉田 2, 101 頁] を参照)、大変便利である。例を通じて使い方を見てみよう。

例 3.3.2 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ (系 1.3.4）.

証明： $I \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi/2}$ を言えばよい。そこで、

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_0^\infty e^{-\frac{x^2y^2}{2}} x dy \\ &\stackrel{\text{定理 3.3.1}}{=} \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-\frac{(1+y^2)x^2}{2}} x dx = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \pi/2. \end{aligned}$$

□

例 3.3.3 $u, v > 0$ に対し $B(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ (命題 1.3.3 参照).

証明：

$$\begin{aligned} B(u,v) &\stackrel{(1.17),(1.18)}{=} \frac{(u+v)(u+v+1)}{uv} B(u+1, v+1), \\ \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} &\stackrel{(1.7)}{=} \frac{(u+v)(u+v+1)}{uv} \frac{\Gamma(u+1)\Gamma(v+1)}{\Gamma(u+v+2)}. \end{aligned}$$

よって u, v を $u+1, v+1$ におきかえて所期等式を示せばよい。ということは、$u, v > 1$ に対し所期等式を示せばよい。そこで以後 $u, v > 1$ とする。$x \geq 0$, $x < 0$ に応じて $g_u(x) = x^{u-1}e^{-x}$, $g_u(x) = 0$ とおくと、$g_u \in C(\mathbb{R})$. g_v も同様である。更に $f(x,y) = g_u(x-y)g_v(y)$ とすると $f \in C(\mathbb{R}^2)$ また、

$$\int_0^\infty f(x,y)dx = g_v(y) \int_y^\infty g_u(x-y)dx = g_v(y) \int_0^\infty g_u(x)dx = g_v(y)\Gamma(u).$$

よって

(1) $$\int_0^\infty dy \int_0^\infty f(x,y)dx = \Gamma(u)\Gamma(v).$$

一方、

$$\int_0^\infty f(x,y)dy = e^{-x} \int_0^x (x-y)^{u-1} y^{v-1} dy = x^{u+v-1} e^{-x} B(u,v).$$

よって、

(2) $$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(x,y)dy = \Gamma(u+v)B(u,v).$$

また、定理 3.3.1 より

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty f(x,y)dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty f(x,y)dy$$

□

例 3.3.4 任意の $t \geq 0$ に対し $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t$. (例 3.3.4 参照)

証明： $t > 0$ の場合が分れば、両辺の連続性（例 3.2.2）から $t = 0$ の場合も分る。

(∗) $x > 0$ なら $\displaystyle\frac{e^{-xt}}{x} = \int_t^\infty e^{-xy}dy.$

より

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty dx \int_t^\infty e^{-xy}\sin x\, dy.$$

もし、上式右辺（(1) と呼ぶ）の積分順序交換が出来れば、$\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\, dx = \frac{1}{1+y^2}$ より

$$(1) = \int_t^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy}\sin x\, dx = \int_t^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t.$$

となり、所期等式を得る。

(1) の積分順序交換を Fubini の定理で正当化する $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$ とすると、$|f(x,y)| \leq e^{-xy}x$. 従って、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx \int_t^\infty |f(x,y)|\, dy \quad &\leq \quad \int_0^\infty x\, dx \int_t^\infty e^{-xy}\, dy \\ &\overset{(*)\text{より}}{=} \int_0^\infty e^{-xt}dx = 1/t < \infty.\end{aligned}$$

従って、Fubini の定理より積分順序を交換出来る。 □

問 3.3.1 $t \geq 0$ に対し $\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}e^{-t}$ （問 3.2.6 参照）. これを、左辺の積分に $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)y}dy$ を代入し、積分順序を交換することにより別証明せよ。

問 3.3.2 (**フレネル積分**[9]) 次を示せ：$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

ヒント：$t \geq 0$ とする。$\int_0^\infty e^{-xy^2}\, dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ より

$$I_t \overset{\text{def.}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \frac{e^{\mathbf{i}x-tx}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^\infty\, dx \int_0^\infty e^{-(y^2+t-\mathbf{i})x}\, dy.$$

まず、$t > 0$ とし、関数 $f(x,y) = e^{-(y^2+t-\mathbf{i})x}$ に 定理 3.3.1 を適用する。

[9] Augustin Jean Fresnel (1788–1827) フランスの物理学者。フレネル積分を用いて光の回折を論じた。