

# カリー・ハワード同型対応入門

大西琢朗

takuro.onishi@gmail.com

哲学基礎文化学系ゼミナールII

2009年6月4・11日

## この講義で説明すること

# カリー・ハワード同型対応って何？

- 簡単に言うと

数学における証明の構造と，  
コンピュータ・プログラムの構造が，  
ぴったり一致する

ということ．

# カリーとハワード



Figure: H.B.Curry (1900-82)

出所: [http://www.freebase.com/view/en/haskell\\_curry](http://www.freebase.com/view/en/haskell_curry)



Figure: W.A.Howard (1926-)

# カリー・ハワード同型対応の歴史

- 1934 年，1958 年に，カリーが今とは少し違う形で言及．
- 1968 年，ハワードが現在の形で定式化．
- 比較的新しい．

# 同型対応

- 同型対応 = 構造が一致すること .
- 構造 = いくつかのモノたちと , それらの間の関係からなる骨格 .
- 中身は違うかも知れないが , 骨格は同じ .

# 哲学なの？

数学における証明の構造と，  
コンピュータ・プログラムの構造が，  
ぴったり一致する

- 証明，プログラム...これって哲学なの？
- 同型対応それ自体は，論理学の事実．
- でも，第一級の哲学的問題．

# 論理と計算

数学における証明の構造と，  
コンピュータ・プログラムの構造が，  
ぴったり一致する

- 証明：論理的な推論．
- プログラム：機械的な計算．
- 素性の違うものの間に，なぜかきれいな対応関係．

# 裏テーマ

## 「形式化」

- 形式化 = パターンを明示的に取り出すこと .
- 証明の構造 = 推論のパターン .
- プログラムの構造 = 計算のパターン .

パターンを取り出すと何が起こるか

- 形式化を行う論理学の魅力 .

# 講義のメニュー

## 証明の構造とプログラムの構造

- それぞれ，どういう問題意識のもと，どのようにパターンを取り出すか，説明する．
- 構造を取り出せば，同型対応は一目瞭然．
- 別々の，それぞれ意味のある問題意識から出てきたものが，きれいに対応する不思議さを味わってもらう．

# 今日は証明

証明と論理学

証明の構造

形式化は何のために

# 証明の構造

証明はどのような構造をしているのか  
構造を取り出すことに何の意味があるのか

- 証明の役割と、「形式」論理学の誕生．
- 実際に証明の構造を取り出してみよう．
- 論理学という学問の目的を考える．

# 証明と論理学

## 証明の構造

## 形式化は何のために

# 証明って何？

## 定理 3.6

実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.

### 証明

$(a_n)_n$  がコーシー列だと仮定する. 定理 3.5.1 により  $(a_n)_n$  は有界である. するとボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理により,  $(a_n)_n$  は収束する部分列をもつ. このとき定理 3.5.2 により,  $(a_n)_n$  も収束する. それゆえ, 実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.  $\square$

- 数学の教科書に載っている証明 (杉浦 1980, pp. 26-27).
- 証明の典型例.

## もうちょっと身近な証明

### 定理

四角形  $ABCD$  が正方形ならば,  $ABCD$  は長方形である.

### 証明

四角形  $ABCD$  が正方形であると仮定する. このとき, 4 つの角  $A, B, C, D$  の大きさはすべて等しい. よって,  $ABCD$  は長方形である. それゆえ, 四角形  $ABCD$  が正方形ならば,  $ABCD$  は長方形である.  $\square$

## もうちょっと身近な証明

### 定理

整数  $n$  が 4 の倍数ならば,  $n$  は 2 の倍数である.

### 証明

$n$  が 4 の倍数であると仮定する. このとき, ある整数  $m$  に対して,  $n = 4m$  となっているはずである. すると,  $n = 2 \times 2m$  であり,  $k = 2m$  とおくと,  $n = 2k$  である. よって,  $n$  は 2 の倍数である. それゆえ,  $n$  が 4 の倍数ならば,  $n$  は 2 の倍数である. □

## 証明 = 数学の証拠

- 数学 = 数や図形などの数学的対象についての研究 .
  - 数学者は , 仮説 ( 予想 ) を立てる .
    - 「整数ってこんな性質を持ってるんじゃないね？」
  - その仮説が正しいってどういうこと？
- ⇒ 仮説が正しい = 証明ができる .

証明 = 数学で認められる唯一の証拠 .

## 視点の転換：論理学

- 証明：数学者の主な仕事．数学者のやること．
- 19 世紀後半，視点の転換が起こる．

証明を行うのではなく，証明について考えてみよう

- 現代の論理学の誕生．
  - 数学者 = 証明を行う人．
  - 論理学者 = 証明について考える人．

## 現代論理学の父：フレーゲ

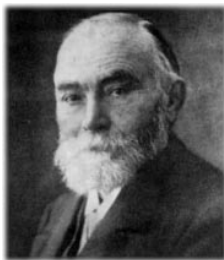


Figure: G.Frege (1848-1925)

出所：[http://www.freebase.com/view/en/gottlob\\_frege](http://www.freebase.com/view/en/gottlob_frege)

- 1879 年、『概念記法』という小冊子で、現代論理学の標準的なシステムをいきなり作り上げてしまう。
- 現代の論理学や哲学に多大な影響。

## 論理学が教えてくれること

- 証明について考えると何がわかったのか：

数学の証明はごく少数のパターンだけに  
従って作られている

- ⇒ これはけっこうすごいこと．
- ⇒ 論理学の「論理学」たる所以．

# なにがすごいのか

- 数学的対象：数や図形など，いろんな種類がある．さらに，無限に多くある．
- それらについての証明も無限にあるはず．

⇒ でも，パターンとしては有限．

無限の数学的世界を，一挙に捉えられる...かも

# 人はそれを「論理」と呼ぶ

## 無限にある証明 $\Leftrightarrow$ 有限のパターン

- 証明の無限性：数学的対象の無限性に由来する．
- パターンの有限性：そのパターンは，数についても，図形についても適用できる．つまり，いつでもどこでも使える．普遍性．

数学の証明で，いつでもどこでも使えるパターン，それを論理法則と呼ぼう

# 内容と形式

- 証明の無限性 = 対象の無限性 = 命題の内容の無限性

## 定理 3.6

実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.

## 定理

四角形  $ABCD$  が正方形ならば,  $ABCD$  は長方形である.

## 定理

整数  $n$  が 4 の倍数ならば,  $n$  は 2 の倍数である.

- いつでもどこでも使える = 内容に関係なく使える.
- 論理法則 = 内容に関係なく使える, 命題や証明の「形」だけに着目して取り出されるパターン.

# 「形式」論理学

## 証明の「形式化」が，現代論理学の出発点

- 形式化：内容は無視．パターンだけ取り出す．
- 現代の論理学は「形式論理学」と呼ばれる．

証明の構造 = 形式化により取り出された  
パターンと，その組み合わせ．

## 証明と論理学：まとめ

- 証明：数学の唯一の証拠．数学者の中心的な実践．
- 視点の転換：証明をするのではなく，証明について考えてみる．
- 証明やそこに登場する命題の内容ではなく，形，パターンに着目する．
- 「いつでもどこでも使える」という意味での論理法則を取り出し，研究する「形式論理学」の誕生．

証明と論理学

証明の構造

形式化は何のために

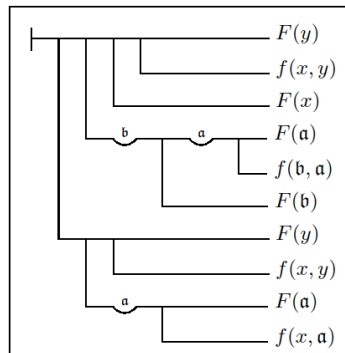
# 形式化，やってみよう

というわけで，

- 証明はどのように形式化されたのか
- 証明はどのような構造をしているのか  
を実際に見ていこう．

## いろんな形式化

- とはいっても，いろんな形式化ができる．
- フレーゲの形式化はこんなの↓



Theorem 71 from *Begriffsschrift*

## 自然演繹



Figure: G.Gentzen (1909-45)

出所 : [http://www.freebase.com/view/en/gerhard\\_gentzen](http://www.freebase.com/view/en/gerhard_gentzen)

- ゲンツェン考案の自然演繹で考える .
- その名の通り , 数学者が実際に行っている証明を , ごく自然に形式化したもの .

# 証明

## 定理 3.6

実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.

### 証明

$(a_n)_n$  がコーシー列だと仮定する. 定理 3.5.1 により  $(a_n)_n$  は有界である. するとボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理により,  $(a_n)_n$  は収束する部分列をもつ. このとき定理 3.5.2 により,  $(a_n)_n$  も収束する. それゆえ, 実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.  $\square$

- 内容は無視して, その構造を取り出していく.

# 証明の骨格

## 定理 3.6

実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.

### 証明

$(a_n)_n$  がコーシー列だと**仮定する**. 定理 3.5.1 により  $(a_n)_n$  は有界である. **すると**ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理により,  $(a_n)_n$  は収束する部分列をもつ. **このとき**定理 3.5.2 により,  $(a_n)_n$  も収束する. **それゆえ**, 実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する. □

## 証明の骨格

$X_1$  と仮定する  
すると  $X_2$  だ  
このとき  $X_3$  だ  
⋮  
それゆえ  $X$  だ

- 「すると」、「このとき」、「それゆえ」: 全部意味は同じ.
- ある命題から, 別の命題を導きだす **推論**.

証明は推論ステップの積み重ね

## 証明の中で定理を使う

### 定理 3.6

実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.

#### 証明

$(a_n)_n$  がコーシー列だと仮定する. 定理 3.5.1 により  $(a_n)_n$  は有界である. するとボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理により,  $(a_n)_n$  は収束する部分列をもつ. このとき定理 3.5.2 により,  $(a_n)_n$  も収束する. それゆえ, 実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.  $\square$

- 証明の中で, 他の場所で証明された定理が使われる.
- 例えば「収束する部分列をもつ」+「定理 3.5.2」→「収束する」.

## 証明の骨格

$$\begin{array}{c}
 X_1 \\
 \vdots \\
 \begin{array}{ccc}
 X_2 & Y & \vdots \\
 \hline
 X_3 & & Z
 \end{array} \\
 \hline
 X_4 \\
 \vdots \\
 X
 \end{array}$$

- 証明の骨格は，こういった逆三角形，あるいは木<sup>キ</sup>の形に書くことができる．
- 「proof tree」などと呼ばれたりする．

# 推論の構造

- 証明全体の骨格はわかった．
- 今度は，その骨格を作っている個々の推論ステップについて考える．
- ここでも重要なのは「形」．

# 定理の形に注目

## 定理 3.6

実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列 **ならば** ,  $(a_n)_n$  は収束する .

### 証明

$(a_n)_n$  がコーシー列だと仮定する . 定理 3.5.1 により  $(a_n)_n$  は有界である . するとボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理により ,  $(a_n)_n$  は収束する部分列をもつ . このとき定理 3.5.2 により ,  $(a_n)_n$  も収束する . **それゆえ** , 実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列 **ならば** ,  $(a_n)_n$  は収束する .  $\square$

## 定理の形に注目

### 定理

四角形  $ABCD$  が正方形ならば,  $ABCD$  は長方形である.

### 証明

四角形  $ABCD$  が正方形であると仮定する. このとき, 4 つの角  $A, B, C, D$  の大きさはすべて等しい. よって,  $ABCD$  は長方形である. それゆえ, 四角形  $ABCD$  が正方形ならば,  $ABCD$  は長方形である.  $\square$

# 定理の形に注目

## 定理

整数  $n$  が 4 の倍数**ならば**,  $n$  は 2 の倍数である .

## 証明

$n$  が 4 の倍数であると仮定する . このとき , ある整数  $m$  に対して ,  $n = 4m$  となっているはずである . すると ,

$n = 2 \times 2m$  であり ,  $k = 2m$  とおくと ,  $n = 2k$  である .

よって ,  $n$  は 2 の倍数である . **それゆえ** ,  $n$  が 4 の倍数**ならば** ,  $n$  は 2 の倍数である . □

## 定理の形に注目

- ここで例として挙げた定理はすべて「 $A$  ならば  $B$ 」という形をしている．記号を使って

$$A \rightarrow B$$

と書こう．

- 定理は，証明全体の結論として，最後の推論ステップで導き出されている．

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ ??? \end{array}}{A \rightarrow B}$$

- 「 $A \rightarrow B$  ( $A$  ならば  $B$ )」という形の命題を導き出す推論のパターンを取り出してみよう.

# 「 $A$ ならば $B$ 」の $B$

## 定理 3.6

実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.

### 証明

$(a_n)_n$  がコーシー列だと仮定する. 定理 3.5.1 により  $(a_n)_n$  は有界である. するとボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理により,  $(a_n)_n$  は収束する部分列をもつ. このとき定理 3.5.2 により,  $(a_n)_n$  も収束する. それゆえ, 実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.  $\square$

## 「 $A$ ならば $B$ 」の $B$

### 定理

四角形  $ABCD$  が正方形ならば、 $ABCD$  は長方形である。

### 証明

四角形  $ABCD$  が正方形であると仮定する。このとき、4つの角  $A, B, C, D$  の大きさはすべて等しい。よって、 $ABCD$  は長方形である。それゆえ、四角形  $ABCD$  が正方形ならば、 $ABCD$  は長方形である。  $\square$

# 「 $A$ ならば $B$ 」の $B$

## 定理

整数  $n$  が 4 の倍数ならば、 $n$  は 2 の倍数である。

## 証明

$n$  が 4 の倍数であると仮定する。このとき、ある整数  $m$  に対して、 $n = 4m$  となっているはずである。すると、

$n = 2 \times 2m$  であり、 $k = 2m$  とおくと、 $n = 2k$  である。

よって、 $n$  は 2 の倍数である。それゆえ、 $n$  が 4 の倍数ならば、 $n$  は 2 の倍数である。  $\square$

## 「 $A$ ならば $B$ 」の $B$

- $A \rightarrow B$  の後ろの部分,  $B$  が結論の一手手前に現れている.

$$\frac{\vdots B}{A \rightarrow B}$$

- じゃあ  $A$  はどこに行った?

# 「 $A$ ならば $B$ 」の $A$

## 定理 3.6

実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.

証明

$(a_n)_n$  がコーシー列だと仮定する. 定理 3.5.1 により  $(a_n)_n$  は有界である. するとボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理により,  $(a_n)_n$  は収束する部分列をもつ. このとき定理 3.5.2 により,  $(a_n)_n$  も収束する. それゆえ, 実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.  $\square$

# 「 $A$ ならば $B$ 」の $A$

## 定理

四角形  $ABCD$  が正方形ならば、 $ABCD$  は長方形である。

## 証明

四角形  $ABCD$  が正方形であると仮定する。このとき、4つの角  $A, B, C, D$  の大きさはすべて等しい。よって、 $ABCD$  は長方形である。それゆえ、四角形  $ABCD$  が正方形ならば、 $ABCD$  は長方形である。  $\square$

# 「 $A$ ならば $B$ 」の $A$

## 定理

整数  $n$  が 4 の倍数ならば,  $n$  は 2 の倍数である.

## 証明

$n$  が 4 の倍数であると仮定する. このとき, ある整数  $m$  に対して,  $n = 4m$  となっているはずである. すると,  $n = 2 \times 2m$  であり,  $k = 2m$  とおくと,  $n = 2k$  である. よって,  $n$  は 2 の倍数である. それゆえ,  $n$  が 4 の倍数ならば,  $n$  は 2 の倍数である.  $\square$

## 「 $A$ ならば $B$ 」の $A$

- $A \rightarrow B$  の  $A$  は、証明の最初で**仮定**されている。

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

- $A$  を仮定し、そこからアレコレやって  $B$  を導き出したあと、さらにそこから  $A \rightarrow B$  が導き出される。
- $A$  と  $B$  の間のプロセスは、命題の内容によって違ってくるけれども、このパターンは三つの証明に共通。

## ならば導入則

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \mathcal{D} \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} (\rightarrow I)$$

- $A$  を仮定して  $B$  が導けたなら，そこから  $A \rightarrow B$  と推論してよろしい．
- 推論の結果，新しい  $\rightarrow$  という記号が現れるので，  
導入則 (introduction rule)  
という．

## ならば導入則

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \mathcal{D} \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} (\rightarrow I)$$

- $[A]$  は「 $A$  という仮定が消去された」ということ .
- 「 $A$  という仮定のもとで  $B$  が成り立つ」から「仮定なしに  $A \rightarrow B$  が成り立つ」への移行 .

## 命題の二つの役割

$$\frac{\frac{\vdots A \quad \vdots B}{C} \quad \vdots D}{E}$$

- $C$  は ,

$$\frac{A \quad B}{C}$$

という推論の結論でもあり , それと同時に ,

$$\frac{C \quad D}{E}$$

という推論の前提でもある .

## 命題の二つの役割

- 証明の中に出てくる命題は，ある推論の結論になれるが，それと同時に，別の推論の前提にもなれる．
- ならば導入則： $A \rightarrow B$  という形の命題を，**結論**として導くパターン．
- $A \rightarrow B$  を**前提**とする推論のパターンはどんなものか．

$$\frac{A \rightarrow B \quad ???}{???}$$

# 一部分だけ取り出す

## 定理 3.6

実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.

### 証明

$(a_n)_n$  がコーシー列だと仮定する. 定理 3.5.1 により  $(a_n)_n$  は有界である. するとボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理により,  $(a_n)_n$  は収束する部分列をもつ. このとき定理 3.5.2 により,  $(a_n)_n$  も収束する. それゆえ, 実数列  $(a_n)_n$  がコーシー列ならば,  $(a_n)_n$  は収束する.  $\square$

- 一部分だけ取り出してみよう.

$$\frac{\text{B} \cdot \text{W} \text{ の定理} \quad (a_n)_n \text{ は有界である}}{(a_n)_n \text{ は収束する部分列をもつ}}$$

# ボルツァーノ・ワイエルシュトラス

## 定理 (ボルツァーノ・ワイエルシュトラス)

$(a_n)_n$  が有界ならば,  $(a_n)_n$  は収束する部分列をもつ.

- これも「ならば」の形だ. ということは,

$$\frac{\text{B・W の定理} \quad (a_n)_n \text{ は有界である}}{(a_n)_n \text{ は収束する部分列をもつ}}$$

↓

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

というのが, この推論の形.

## ならば除去則

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow E)$$

- $A \rightarrow B$  と  $A$  から  $B$  を導いてよろしい .
- $\rightarrow$  を含んだ命題から , それを含まないより単純な命題を導くので ,

除去則 (elimination rule)

と呼ばれる .

- 伝統的には「Modus Ponens」と呼ばれてきた推論規則 .

## 導入則と除去則

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \mathcal{D} \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} (\rightarrow I) \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow E)$$

- $A \rightarrow B$  という命題の形 .
- その形に対応する推論規則 : 導入則と除去則 .
- 導入則 : その形の命題を結論とする推論 .
- 除去則 : その形の命題を前提とする推論 .

## 例：証明の構造

- 導入則と除去則だけを使って，こんな構造を作ることができる．

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \quad [A]}{B \rightarrow C} \quad \frac{[A \rightarrow B] \quad [A]}{B} \\
 \hline
 C \\
 \hline
 A \rightarrow C \\
 \hline
 (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \\
 \hline
 (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))
 \end{array}$$

# いろいろな形

- 命題の形は「 $A$  ならば  $B$ 」だけではない .
- 他にもいろいろな形があり , その形に応じて推論規則がある .
- 基本的にいつでも推論規則は導入則と除去則のセット .

## いろんな推論規則

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} (\wedge I) \qquad \frac{A_0 \wedge A_1}{A_i} (\wedge E)$$

$$\frac{A_i}{A_0 \vee A_1} (\vee I) \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A] \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ C \end{array}}{C} (\vee E)$$

$$\frac{A[x/y]}{\forall x A} (\forall I) \qquad \frac{\forall x A}{A[x/t]} (\forall E)$$

$$\frac{A[x/t]}{\exists x A} (\exists I) \qquad \frac{\begin{array}{c} [A[x/y]] \\ \exists x A \end{array} \quad C}{C} (\exists E)$$

$$\frac{}{A} (\bot_i) \qquad \frac{[\neg A]}{\bot} (\bot_c)$$

## 証明の構造：まとめ

- 証明：推論ステップの積み重ねでできる木の構造．
- 推論ステップを作る推論規則：導入則と除去則．

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \mathcal{D} \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} (\rightarrow I) \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow E)$$

証明と論理学

証明の構造

形式化は何のために

# 形式化は何のために

- 証明の形式化：証明のパターンを取り出す．
- でも数学者は，そんなパターンのことなど意識せずに，楽々と証明を作っている．

証明をわざわざ形式化して，何が嬉しい？  
形式化の目的は何か．

- 大西なりの考え方を提示する．論理学の中でも「証明論」と呼ばれる分野の基本的な発想．

# 視点の転換，ふたたび

証明を行うのではなく，証明について考える

- 論理学をもたらした，視点の転換．
- この転換が何を意味するのか，もう少し考えてみよう．

# 数学の研究対象

## 数学 = 数学的对象についての研究

- 数学者：数学的对象に対するある種の感覚（直観）をもっている．ぴこーんとひらめく感じがする．
- 数学的命題：数学的对象について，何かを語っている，表現している（ように見える）．

「整数  $n$  が 4 の倍数ならば， $n$  は 2 の倍数である」

# 数学的対象の謎

- 数や図形，関数などなど．見たり触ったりできない（抽象的）．無限にある！

数学的対象って何？どこにあるの？  
そんなものをどうやって研究するの？  
数学的命題の内容って何？

- 数学的対象の存在論・認識論的問題．数学的命題の意味の問題．
- ⇒ 数学という研究実践を，どう理解すればよいのか．

# 欠落

## この問題で抜け落ちているもの：証明

- 数学で認められる唯一の証拠 = 証明
- 数学的命題の正しさは，数学的対象を観察したり，それにかんする実験によって立証されることはない．
- 証明は数学者の主な仕事．

# 証明という道具

- 何で抜け落ちたのか：

## 数学者は楽々と証明を作る

- 例えば， $A$  ならば  $B$  と  $A$  から， $B$  が推論できることなど，当たり前．
- 証明（推論）は，数学者にとって使い慣れた道具．だから，意識しない．

## 原因

- 問題の原因は数学に対する見方のギャップ：

証明の「当たり前さ」 $\iff$  証明の重要性

- 証明について考える論理学：

「当たり前だけど大事なこと」について，  
ちゃんと意識的に考えてみる

# アプローチ

- 「証明」というギャップを埋めることで、数学的対象と数学的命題の問題は、どのように考えられるか．
- 論理学：命題の内容の観点からアプローチする．

# 命題とは何か

- 証明というファクターに意識的になると：

命題 = 証明の中で，他の命題から導き出されたり，他の命題を導いたりするもの

- 「命題 = 表現するもの」から「命題 = 他の命題と関係するもの」への視点の転換．
- すると...

## 内容 = 帰結関係

- 数学的对象なんてものを想定しなくても，数学的命題はそれ自身で内容（＝情報）をもっている：

他のどのような命題から帰結するか  
他のどのような命題を帰結するか

- 帰結する = 推論によって導かれる．

命題の内容 = 他の命題との帰結関係

って考えてみたらどう？

# 内容 = 帰結関係

- 帰結関係でできる命題たちのネットワーク．
- 命題は，それ自身で内容を持つと考える必要はない．  
命題たちのネットワークの中での位置，役割こそ，その命題の内容と考えればよい．

## 形式化 = 内容の明示化

- 形式化 = 証明で使われる推論のパターンを取り出す .
- ⇒ ある形の命題が , 他のどのような命題と , どのような帰結関係に立つことができるか , をはっきりさせる .

## 形式化 = 数学的命題の内容の明示化

- あるいは , その出発点 . 命題たちのネットワークの解明を目指す .

# 数学的对象

- 数学的对象：命題の中に現れて，他の命題との帰結関係をとりもつ．
- 数学的对象とは，そのような役割をまとめ上げて，便利のいいように呼んでいるだけのもの．

## 無限性と抽象性

- 数学的対象の問題 = 無限性と抽象性 .

推論パターンを組み合わせ , 繰り返すことで ,  
証明は無限に作ることができる

- その一方で ,

証明には有限のパターンしかない  
証明はわれわれ自身が作るものである

# 無限性と抽象性

- 数や図形：われわれが（普通的手段では）直接認識できない，無限のモノたち．
- 証明：われわれが「推論する」という形でアクセスする，無限のモノたち．
- 視点を転換することで浮かび上がってきた，数学の**実践そのもの**に潜む無限性．

# 論理学は何をやるのか

証明を行うのではなく、証明について考える

- 「当たり前だけど大事なこと」に意識的になる．
- 命題や無限の数学的対象に対する視点の転換．

数学という実践に潜むパターン  
⇒ 数学に対するよりよい理解

# 形式化は何のために：まとめ

- 数学：なにをやっているのか．数学的対象の問題．
- 論理学：証明という実践に着目．当然視され暗黙のままにされていたパターンを取り出す．
- 数学的命題，数学的対象，数学という学問に対する新たなアプローチ．

# 今日おぼえて帰ってほしいこと

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \mathcal{D} \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} (\rightarrow I) \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow E)$$

- 証明の構造は，こんなパターンの組み合わせで作られる．

# 今日おぼえて帰ってほしいこと

- なにげない，当たり前に見えるパターン．
- でもそれを取り出すには，視点の転換が必要だった．
- 視点の転換は，数学という実践に対するよりよい理解を得るためのアプローチをもたらしてくれる．

# 問題

- 実践の中にあるパターンを取り出すことで、その実践に対するよりよい理解を得る．この手法は、数学以外の場面にも応用できるだろうか？
- 形式化とは「内容のことは無視して形だけを取り出す」ことであった．しかし、われわれが最終的にたどり着いたのは、「形式化することで内容を明示化する」という考え方である．これはどういうことだろう？

## 次回予告

- 今日は、数学というとても抽象的な分野についての話．
- 次回は、プログラムというとても具体的・実用的なものについての話．
- カリー・ハワード対応：そんな違う分野のパターンが一致してしまうという不思議．

## 宿題

$$(2 + 3) \times 5$$

- このような数式は，何を表わしているでしょうか．少なくとも，二つの解釈（読み方）があります．
- ヒント：

$$(2 + 3) \times 5 = (4 \times 7) - 3$$

等式の両辺は「同じような違うような」．

今日はここまで．お疲れさまでした．