

ヘルムホルツ共鳴現象を利用した体積計測

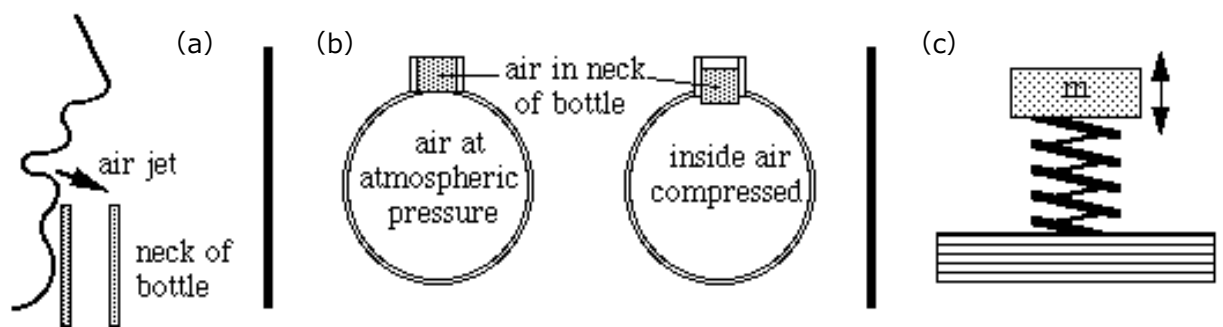
I ヘルムホルツ共鳴

図 1 に示すようなネック付きの瓶の口に息を吹きかけると、「ボーッ」という音が鳴る。これは、瓶内部の空気の振動（音圧変化）によるものである。この場合の音圧変化は、外部と内部に熱の輸送が無いことから、断熱変化とみなすことができる。



図 1 ネック付きの瓶

図 2 (a) に示すように、ボトルのネックに空気を吹き付けると、ネック部の空気の塊が微小距離だけ上下する（図 2 (b)）。この様子は、図 2 (c) に示すように、ネック部の空気の質量を m としたおもりによる上下の振動とみなせる。この振動は、バネ定数とたわみ量によって決定されるバネの固有振動数によって決まる。つまりこのヘルムホルツ共鳴は、1 自由度のバネー質量系と等価であるとみなせる。

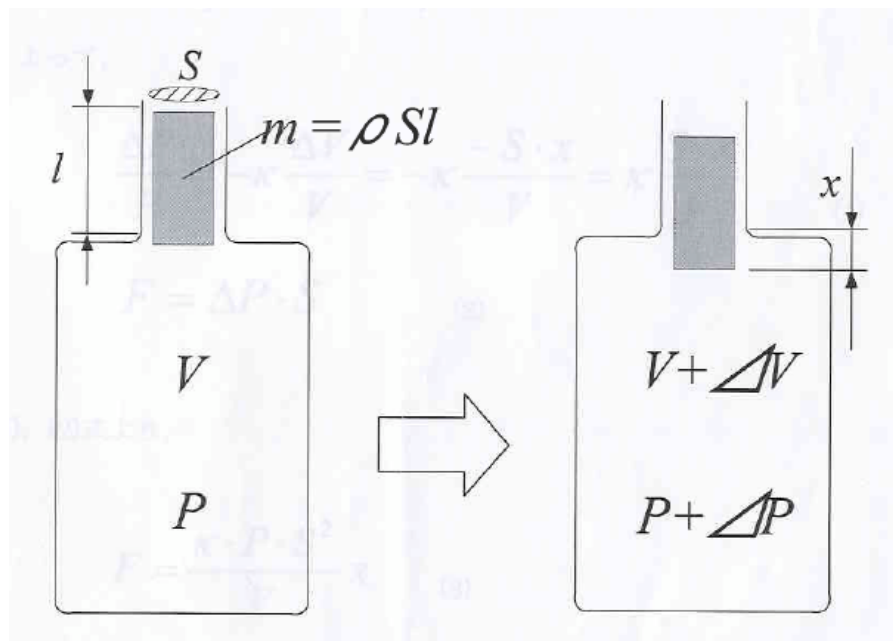


<http://www.phys.unsw.edu.au/jw/Helmholtz.html>

図 2 ヘルムホルツ共鳴の概要

(a) 空気を吹き付ける様子, (b) ネック部の空気の動き, (c) 1 自由度のバネー質量系

このことを，以下の模式図を用いて説明する。



l :ネック長[m], S :ネック部断面積[m²], m :ネック部の空気の質量[kg], ρ :空気の密度[kg/m³], V :共鳴器の空洞部容積[m³], P :空気圧力[Pa], x :微小距離[m]

図3 ヘルムホルツ共鳴器の模式図

振動によりネック部の空気の塊が微小距離 x だけ動いたとする。空気の比熱を用いた断熱変化を表す式は，ポアソンの法則より

$$\frac{P + \Delta P}{P} = \left(\frac{V + \Delta V}{V} \right)^\gamma = 1 + \gamma \frac{\Delta V}{V}$$

ただし， γ =CPCV:比熱比

この式を変形し， $\Delta V/V \ll 1$ を使って整理すると，

$$\Delta P = -\gamma \frac{P}{V} \Delta V = \frac{\gamma P}{V} S x \quad (1)$$

さらに，容器内空洞部にかかる力 F を表わす式 (2) より，圧力変動 ΔP を消去すると，力と変位の関係式 (3) が得られる。

$$F = \Delta P \cdot S \quad (2)$$

$$F = \frac{\gamma P}{V} S^2 x \quad (3)$$

このように式 (3) において $\frac{\gamma P}{V} S^2$ はバネ定数に相当し，このヘルムホルツ共鳴器は，図 2(c)に見られるような，1 自由度バネー質量系としてみなすことができる。

バネー質量系において，固有振動数 f_0 はバネ定数 k を用いて以下の式で表わされる。

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

また，音速 c は空気の密度，比熱比，気圧によって決定されるので，共鳴周波数と体積との関係は，以下の式の通りとなる。

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{Vl}} \quad (4)$$

ただし、 $\rho = \rho_0 \cdot \gamma$

さらに、共鳴器に試料 ($V_L[\text{m}^3]$) を入れると、式 (4) は、以下のように書き換えられ、これらの式を元に、共鳴周波数から共鳴器内の物質の体積を計算することが可能となる。

$$f = \frac{2}{\pi} \frac{1}{l} (\gamma - \gamma_0) \cdot \pi \quad (5)$$

【備考】

- ☆ 温度 $T^\circ\text{C}$ 時の音速は、 $331.45 + 0.607 \times T$ で表わすことができる。
- ☆ 実際には式 (4)、式 (5) において、ネック長 l は $l + \delta$ で表わされる。このときの δ を開口端補正とよび、ネック部断面の半径を r とすると、 $\delta = 0.6r$ と書ける。

II 実験内容

体積と共鳴周波数の関係を調べて検量線を作成し、その結果を元に課題として与えられたサンプルの体積を求める。

実験概要

1. ヘルムホルツ共鳴の原理を理解し、各班で必要な実験機器を準備・確認する。(周波数解析用ソフトの使用方法については十分に注意して説明を聞くこと)
2. サンプル(大豆、小豆、水、お湯)の体積を実測し、それぞれのサンプルについて、共鳴周波数と体積の関係をプロットした検量線を作る。このとき、理論値による直線も図示し、誤差が生じる場合は誤差要因について考察する。
3. 体積未知のサンプルを教員からもらい、ヘルムホルツ共鳴を用いて体積を求める。
4. 実験レポートを作成。(より正確な測定を行う際に必要な事柄や、吸音する性質のある物質の体積を測定する場合、真値に比べてどのようになると考えられるか、についても考察すること)