付録1

- フーリエ級数
- フーリエ変換
- 3次元空間の2次元への投影
- ファイルヘッダ

フーリエ級数

関数$f(x)$が周期Lをもつ周期関数であるとする.

> $$f(x+L)=f(x) \quad ,x\in \mathbf{R}$$

このような周期を持つ関数として代表的なものは三角関数が挙げられる.

> $$\sin(\frac{2\pi nx}{L}), \cos(\frac{2\pi nx}{L})$$

ここでnは0以上の整数とする. $n=0$のとき$\sin(0x)=0$となるので, これを除いた

> $$1, \sin(\frac{2\pi x}{L}), \cos(\frac{2\pi x}{L}), \sin(\frac{4\pi x}{L}), \cos(\frac{4\pi x}{L}), \ldots$$

を用いて, 関数$f(x)$を表すことを考える. このとき, これらの関数同士の積の積分を考える.

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} 1 \times 1 dx = L$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin(\frac{2\pi nx}{L}) \sin(\frac{2\pi mx}{L}) dx = \frac{L}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(\frac{2\pi nx}{L}) \cos(\frac{2\pi mx}{L}) dx = \frac{L}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} 1 \sin(\frac{2\pi nx}{L}) dx = 0$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} 1 \cos(\frac{2\pi nx}{L}) dx = 0$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(\frac{2\pi nx}{L}) \sin(\frac{2\pi mx}{L}) dx = 0$$

ここで，δ_{mn}はクロネッカー(Kronecker)のデルタと呼ばれ，

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

で定義される．

ここでベクトルを思い出そう．例えばその成分が(p_1, p_2, p_3)の３次元のベクトル$\vec{p}$はx，y，z方向の単位ベクトルを$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$とすると

> $$\vec{p} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3$$

と表せる．このとき，単位ベクトルは，その大きさが1であり（このことを正規化(normalized)されているという），互いに直交(orthogonal)している．このことは単位ベクトル同士の内積をとると

> $$(\vec{e}_m, \vec{e}_n) = \delta_{mn}, (m, n = 1, 2, 3)$$

となることである．このとき，各方向のベクトルの成分は

> $$(\vec{p}, \vec{e}_m) = p_m$$

で求められる．

三角関数の間の積の積分の振舞が同じであることから，$-L/2 \leq x < L/2$で定義される関数をベクトルと考え，その内積を

$$(f, g) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)g(x)dx$$

と定義する．このとき

$$\frac{1}{\sqrt{L}},$$
$$\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{2\cdot 1\pi x}{L}), \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{2\cdot 2\pi x}{L}), \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{2\cdot 3\pi x}{L}), \ldots$$
$$\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{2\cdot 1\pi x}{L}), \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{2\cdot 2\pi x}{L}), \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{2\cdot 3\pi x}{L}), \ldots$$

は，単位ベクトルと考えることが出来る．これらの関数で構成される関数の集合を正規直交系(orthonormal system)という．そこで関数$f(x)$が

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{2n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{2n\pi x}{L})) \qquad (1)$$

と表されているとする．ここで a_0 に $1/2$ が掛かっているのは，後に見るように他の 項との 整合性による．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (f, \frac{1}{\sqrt{L}})\frac{1}{\sqrt{L}} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}((f, \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{2n\pi x}{L}))\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{2n\pi x}{L}) \\
&+ (f, \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{2n\pi x}{L}))\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{2n\pi x}{L}))
\end{aligned}
$$

から，

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)dx \\
a_n &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi x}{L})dx \\
b_n &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi x}{L})dx
\end{aligned}
$$

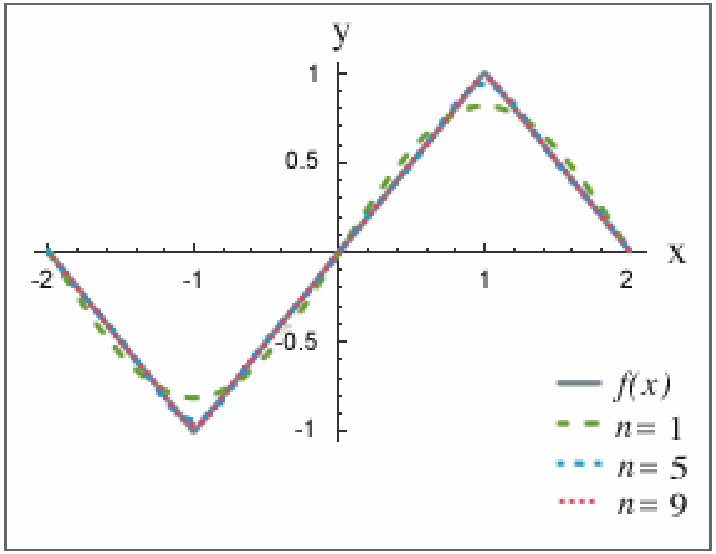
となる．このとき，(1)を$f(x)$のフーリエ級数(Fourier series), a_n, b_nをフーリエ係数(Fourier coefficient)という．フーリエ級数は関数を平面波（正弦波）で表現しようとしているものである．

例）周期4の関数の場合

$$f(x) = \begin{cases} -2-x & (-2 \le x < -1) \\ x & (-1 \le x < 1) \\ 2-x & (1 \le x < 2) \end{cases}$$

この関数をフーリエ級数展開すると,

$$a_n = 0, b_n = \frac{8}{\pi^2 n^2} \sin(\frac{\pi n}{2})$$



となる.

$a_n = 0$であるが, 一般に$f(x)$が偶関数のとき$b_n = 0$, 奇関数であるとき$a_n = 0$であることが容易に示せる. 図18に関数$f(x)$と$n = 1, 5, 9$までの級数の和をとった場合の結果を示す.

複素フーリエ級数

eを自然対数の底，$\mathbf{j}$を虚数単位とする．xを実数とすると

$$e^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathbf{j}\sin x$$

と書ける．これを用いれば

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x}}{2}, \sin x = \frac{e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x}}{2\mathbf{j}}$$

となり，指数関数を用いてフーリエ級数を表すことが出来る．

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n x}{L}} \qquad (2)$$

ここで$-L/2 \leq x < L/2$で定義されている複素数値関数の内積を

$$(f,g) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)g^*(x)dx$$

とする．ここで$g^*(x)$を$g(x)$の 複素共役とする．内積は 次のような 性質を持つ．

$$\begin{aligned}
(f,g) &= (g,f)^* \\
(f, ag_1 + bg_2) &= a^*(f,g_1) + b^*(f,g_2) \\
(af_1 + bf_2, g) &= a(f_1,g) + b(f_2,g)
\end{aligned}$$

ここでa,bは 複素定数としている．また，

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} \geq 0$$

をfのノルム(norm)と言う．

指数関数の内積を求めると,

$$\begin{aligned}(e^{\mathrm{j}\frac{2\pi nx}{L}}, e^{\mathrm{j}\frac{2\pi mx}{L}}) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\mathrm{j}\frac{2\pi nx}{L}} e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi mx}{L}} dx \\ &= L\delta_{nm}\end{aligned}$$

なので,

$$\frac{1}{\sqrt{L}} e^{\mathrm{j}\frac{2\pi nx}{L}}$$

は正規直交系をなす. 形式的にフーリエ級数展開すれば,

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f, \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\mathrm{j}\frac{2\pi nx}{L}}) \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\mathrm{j}\frac{2\pi nx}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi nx}{L}} dx e^{\mathrm{j}\frac{2\pi nx}{L}}\end{aligned}$$

から,

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi n x}{L}}dx$$

となる.

ここまでは $f(x)$ が三角関数や指数関数で展開できるものとして議論してきた. 実際に $f(x)$ と形式的なフーリエ級数展開した級数の誤差を求めると

$$\begin{aligned}\|f(x)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n x}{L}}\|^2 &= (f(x)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n x}{L}}, f(x)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n x}{L}}) \\ &= \|f\|^2 - L\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n^2\end{aligned}$$

よってベッセル(Bessel)の不等式

$$\|f\|^2 \geq L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2$$

が成り立つ．すなわち，一般には形式的にフーリエ級数展開した関数のノルムは，もとの関数のノルム以下であり，等しくならない場合がある．このことはフーリエ級数で展開しきれない部分が存在する関数があることを意味する．フーリエ級数展開が可能で，展開した級数と同じになる場合は，ノルムの関係は等号になりパーセバル(Parseval)の等式

$$\|f\|^2 = L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2$$

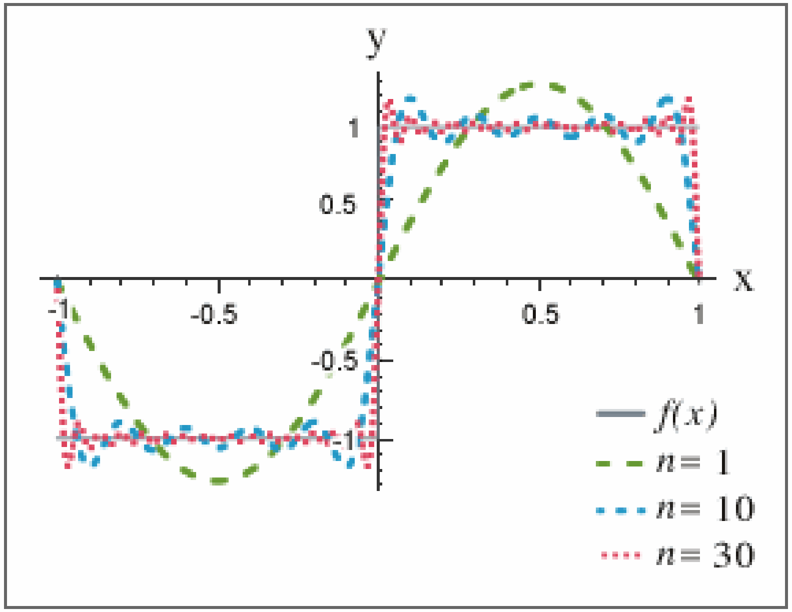
が成り立つ．三角関数や指数関数は連続な関数であるにも関わらず，$f(x)$が連続でなくてもフーリエ級数展開が可能になる．例えば区分的に連続で有界な関数は不連続でもフーリエ級数展開可能である．

例）周期2の関数の場合

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-1 \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

この関数をフーリエ級数展開すると,

$$c_n = \frac{\mathbf{j}(-1 + \cos n\pi)}{n\pi} = \frac{\mathbf{j}(-1 + (-1)^n)}{n\pi}$$



となる．図19に関数$f(x)$と$n = 1, 10, 30$までの級数の和をとった場合の結果を示す．

不連続点の近くで次数が上がっても収束しないように見える点が存在する．これはギブス(Gibbs)現象と呼ばれ不連続な点がある場合，一様収束しないために有限項で打ち切ると発生する．

2次元フーリエ級数

2次元の場合，x方向に周期L_x，y方向に周期L_yの周期関数のフーリエ級数は1次元のFourier級数と同様に

$$f(x,y) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{2\pi \mathrm{j}\left(\frac{mx}{L_x}+\frac{ny}{L_y}\right)}$$

で与えられる．このとき

$$c_{mn} = \frac{1}{L_x L_y} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \int_{-\frac{L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} f(x,y) e^{-2\pi \mathrm{j}\left(\frac{mx}{L_x}+\frac{ny}{L_y}\right)} dx dy$$

である．

1次元フーリエ変換

フーリエ級数展開で周期Lの関数は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n x}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi n x}{L}} dx$$

で与えられた．これより，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi n x}{L}} dx e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n x}{L}}. \tag{3}$$

ここで，

$$k = \frac{2\pi n}{L}$$
$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}$$

とおくと，Lが大きくなれば，Δkが小さくなり，細かな周波数を表現できるようになる．式(3)を書き換えると

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) e^{-\mathrm{j}kx} dx e^{\mathrm{j}kx}.$$

ここで周期$L \to \infty$の極限をとると

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{j}kx} dx e^{\mathrm{j}kx} dk.$$

ここで

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{j}kx} dx$$

を$f(x)$の**フーリエ変換(Fourier transform)**，

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{jkx} dk$$

を逆フーリエ変換という．フーリエ変換したものを逆フーリエ変換すればもとの関数に戻ることからフーリエ変換が可能であれば，xを変数とする実空間とkを変数とする周波数空間は1対1に対応していることがわかる．関数$f(x)$は二乗可積分

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) dx < \infty$$

であるとき，フーリエ変換できることが知られている．二乗可積分であれば

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$．

また，フーリエ変換出来るとき，次のようにパーセバルの等式が成り立ち，実空間と周波数空間では内積が保存される．

$$
\begin{aligned}
(\hat{f},\hat{g}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\hat{g}^*(k)dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-\mathrm{j}kx}dx)^*dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)e^{\mathrm{j}kx}dxdk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{\mathrm{j}kx}dkdx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)f(x)dx \\
&= (f,g)
\end{aligned}
$$

また，実数値関数をフーリエ変換した関数は一般には複素数値関数になる．このため周波数空間での振舞を明確化するために$\hat{f}(k)$の複素共役を掛けた関数

$$
|\hat{f}(k)|^2 = \hat{f}(k)\hat{f}^*(k)
$$

がよく使われる．これをパワースペクトル(power spectrum)という．周波数kでのパワースペクトルの大きさで，その周波数の成分の大きさがわかる．k=0のとき

> $$\hat{f}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$$

で$f(x)$の積分の定数倍となり，直流成分と呼ばれる．

フーリエ変換の性質

線形性

フーリエ変換出来る任意の関数f_1, f_2に対して，任意の複素数a_1, a_2とすると

$$\mathcal{F}[a_1 f_1 + a_2 f_2] = a_1 \mathcal{F}[f_1] + a_2 \mathcal{F}[f_2]$$

導関数のフーリエ変換

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}[\tfrac{df}{dx}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{-\mathrm{j}kx} dx \\
&= [\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-\mathrm{j}kx}]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j} k f(x) e^{-\mathrm{j}kx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j} k f(x) e^{-\mathrm{j}kx} dx \\
&= \mathbf{j} k \mathcal{F}[f]
\end{aligned}$$

フーリエ変換の微分

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dk}\mathcal{F}[f] \\
&= \frac{d}{dk}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{j}kx}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} -\mathbf{j}x f(x)e^{-\mathrm{j}kx}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} -\mathbf{j}x f(x)e^{-\mathrm{j}kx}\,dx \\
&= \mathcal{F}[-\mathbf{j}x f]
\end{aligned}
$$

平行移動のフーリエ変換

cを実定数とするとき

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}[f(x-c)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-c)e^{-\mathrm{j}kx}\,dx \\
&= e^{-\mathrm{j}kc}\hat{f}(k)
\end{aligned}
$$

伸縮のフーリエ変換

cを実定数とするとき

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}[f(cx)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(cx)e^{-\mathrm{j}kx}\,dx \\
&= \frac{1}{\|c\|}\hat{f}\left(\frac{k}{c}\right)
\end{aligned}
$$

2次元フーリエ変換

2次元のフーリエ変換は x, y それぞれに対して，もう一方の変数を定数とみなして1次元のフーリエ変換を行えば良い．

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \mathcal{F}[f(x,y)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-\mathrm{j}(k_x x + k_y y)}dxdy$$

で，逆変換は

$$f(x,y) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k_x, k_y)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x, k_y)e^{\mathrm{j}(k_x x + k_y y)}dk_x dk_y$$

で定義される．

離散フーリエ変換

標本化定理では，高周波数領域の値が0，すなわち周波数空間が有限の範囲内でしか値を持たないものは，実空間で離散的（可算無限）のパラメータで表現できることを示している．これは逆に見れば実空間で有限の範囲内のものは，周波数空間では離散的に表現できることになる．

デジタル画像を取り扱う場合，画像は有限で離散的な配列となる．そこで，離散かつ有限の範囲の点のフーリエ変換として**離散フーリエ変換(DiscreteFourier Transform)(DFT)**が用いられている．N個の点のDFTは

$$\hat{F}(m) = \mathcal{F}[F(X)] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{X=0}^{N-1} F(X) e^{-\frac{2\pi \mathrm{j} m X}{N}}$$

で，逆DFTは

$$F(X) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{F}(m)] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{F}(m) e^{\frac{2\pi \mathrm{j} m X}{N}}$$

で定義される．ここで，離散的な関数の内積を

$$(F(X), G(X)) = \sum_{X=0}^{N-1} F(X)G(X)^*$$

で定義すると,

$$\hat{F}(m) = (F(X), \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi j m X}{N}})$$

と表せる.

$$(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi j m X}{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi j n X}{N}}) = \delta_{mn}$$

から,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi j X n}{N}}$$

で，周波数nの成分に分解していることになる．ここで注意すべきことはDFTではフーリエ級数と同様に対象が周期的であるように取り扱われていることである．また，明らかに

> $$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[F] = F$$

が成り立つ．

２次元DFTは１次元の拡張として$N_x N_y$個の点のDFTは

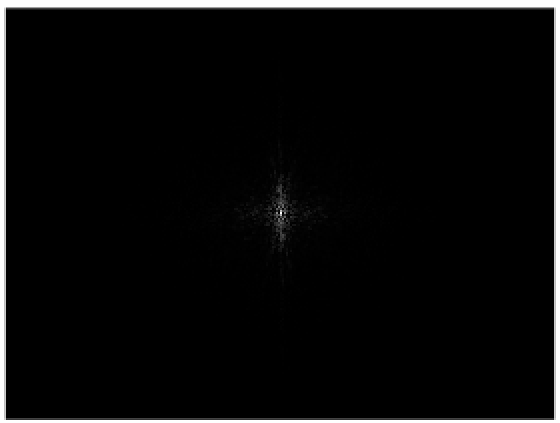
> $$\hat{F}(m,n) = \mathcal{F}[F(X,Y)] = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{X=0}^{N_x-1} \sum_{Y=0}^{N_y-1} F(X,Y) e^{-2\pi \mathrm{j}\left(\frac{mX}{N_x} + \frac{nY}{N_y}\right)}$$

で，逆離散フーリエ変換は

> $$F(X,Y) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{F}(m,n)] = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^{N_y-1} \hat{F}(m,n) e^{2\pi \mathrm{j}\left(\frac{mX}{N_x} + \frac{nY}{N_y}\right)}$$

で定義される．

離散フーリエ変換

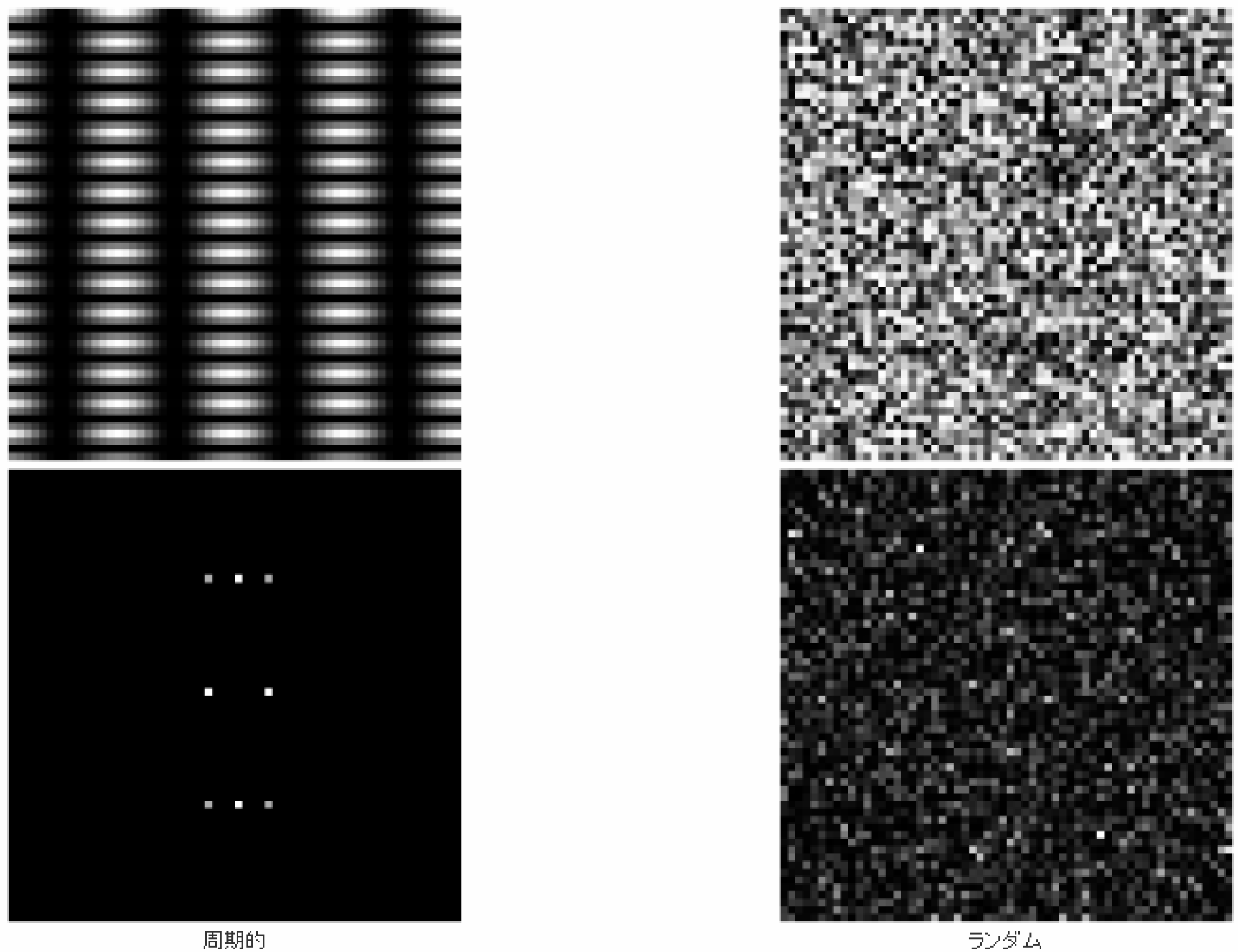


光学的

非光学的

直流成分を中心に来るようして表示した光学的フーリエ変換

周波数とピーク



パワースペクトルは，画像中にどのような周波数が含まれるかによって
対応する周波数の強度が強くなる.

高速フーリエ変換

$N_x \times N_y$ 個の点の２次元離散フーリエ変換は

$$\hat{F}(m,n) = \mathcal{F}[F(X,Y)] = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{X=0}^{N_x-1} \sum_{Y=0}^{N_y-1} F(X,Y) e^{-2\pi \mathrm{j}\left(\frac{mX}{N_x}+\frac{nY}{N_y}\right)}$$

で，逆離散フーリエ変換は

$$F(X,Y) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{F}(m,n)] = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_y-1} \hat{F}(m,n) e^{2\pi \mathrm{j}\left(\frac{mX}{N_x}+\frac{nY}{N_y}\right)}$$

で定義された．

$N_x \times N_y$ の点の２次元離散フーリエ変換は定義式通りに計算すると $N_x N_y$ 個の $F(X,Y)$ に対して，積

$$F(X,Y) e^{-2\pi \mathrm{j}\left(\frac{mX}{N_x}+\frac{nY}{N_y}\right)}$$

を $N_x N_y$ 回繰り返さねばならず，結局全部で $(N_x N_y)^2$ 回の積を行わなければならない．しかし，

$$
\begin{aligned}
\hat{F}(m,n) &= \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{X=0}^{N_x-1} \sum_{Y=0}^{N_y-1} F(X,Y) e^{-2\pi \left(\frac{mX}{N_x} + \frac{nY}{N_y}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{X=0}^{N_x-1} e^{-2\pi \mathrm{j} \frac{mX}{N_x}} \sum_{Y=0}^{N_y-1} F(X,Y) e^{-2\pi \mathrm{j} \frac{nY}{N_y}}
\end{aligned}
$$

であるので，

$$
\Phi(X,n) = \sum_{Y=0}^{N_y-1} F(X,Y) e^{-2\pi \mathrm{j} \frac{nY}{N_y}}
$$

とおけば，

$$
\hat{F}(m,n) = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{X=0}^{N_x-1} \Phi(X,n) e^{-2\pi \mathrm{j} \frac{mX}{N_x}}
$$

となる．このとき$N_x N_y$個の$\Phi(X,n)$を求めるのに，1つあたりN_y回の積で計算し，$N_x N_y$個の$\hat{F}(m,n)$に対して，N_x回の積で計算する．よって総計

$$N_x N_y \times N_y + N_x N_y \times N_x = N_x N_y (N_x + N_y)$$

の積を行っていることになり，$N_x, N_y \geq 2$ならば積演算を削減できる．これは，2次元Fourier変換の場合であったが3次元以上の場合でも，中間状態となる変数を導入することで同様に高速化が図れる．これは配列の同じ行や列に属するものに対して同じ計算をするため，省略が可能なのである．このようにDFTの計算を高速化する手法を**高速フーリエ変換(Fast Fourier Transform (FFT))**とよぶ．

このFFTは高次元の場合のみならず1次元の場合でも次数Nが合成数であるならば拡張可能である．Nが因数分解($N = N_1 N_2$)できるとき，$X = n_1 + N_1 n_2, m = N_2 k_1 + k_2$とおけば

$$\begin{aligned}
\hat{F}(N_2 k_1 + k_2) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} F(n_1 + N_1 n_2) e^{-\frac{2\pi j (N_2 k_1 + k_2)(n_1 + N_1 n_2)}{N_1 N_2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} F(n_1 + N_1 n_2) e^{-\frac{2\pi j (N_2 k_1 n_1 + N_1 N_2 k_1 n_2 + k_2 n_1 + N_2 k_2 n_2)}{N_1 N_2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-\frac{2\pi j k_1 n_1}{N_1}} e^{-\frac{2\pi j k_2 n_1}{N_1 N_2}} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} F(n_1 + N_1 n_2) e^{-\frac{2\pi j k_2 n_2}{N_2}}
\end{aligned}$$

である．ここで，

$$\Phi(n_1,k_2)=e^{-\frac{2\pi\mathrm{j}k_2n_1}{N_1N_2}}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}F(n_1+N_1n_2)e^{-2\pi\mathrm{j}\frac{k_2n_2}{N_2}}$$

とおけば，

$$\hat{F}(N_2k_1+k_2)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}e^{-\frac{2\pi\mathrm{j}k_1n_1}{N_1}}\Phi(n_1,k_2)$$

このように，1次元の場合でも因数分解できれば2次元の場合と同様に積を減らして高速化が図れる．もっとも効率的なのは2の冪乗の場合である．

離散コサイン変換

関数 $f(x)$が偶関数 $f(x) = f(-x)$であるとき，このフーリエ変換は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f] = \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{j}kx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(kx) - \mathbf{j}\sin(kx))dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx)dx
\end{aligned}
$$

となり，奇関数であるサインの項が消滅する．これは虚部が消滅することになるので，偶関数のフーリエ変換は実数だけで行うことが出来る．もし，$f(x) = 0 \quad (x < 0)$なる関数があるとき，

$$
\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x < 0) \end{cases}
$$

と拡張すれば，関数 $\tilde{f}(x)$は偶関数になり，上で導いたことが成り立つ．このことを離散的な場合に適用することを考える．

$F(X) \quad (0 \leq X \leq N-1)$で与えられているとき，

> $$\tilde{F}(X) = \begin{cases} F(X) & (0 \leq X \leq N-1) \\ F(-X-1) & (-N \leq X \leq -1) \end{cases}$$

と拡張すれば，$\tilde{F}(X)$は$-1/2$を中心として対称なので．偶関数と考えられる．そこで，この離散フーリエ変換を考える．これは全部で$2N$個の数列のDFTであるので

> $$\hat{\tilde{F}}(m) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{X=-N}^{N-1} \tilde{F}(X) e^{-\frac{2\pi j m X}{2N}}$$

となる．原点は$-1/2$にとるので，

$$
\begin{aligned}
\hat{\tilde{F}}(m) &= \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{\pi j m}{2N}} \sum_{X=-N}^{N-1} \tilde{F}(X) e^{-\frac{2\pi j m (X+\frac{1}{2})}{2N}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{\pi j m}{2N}} \sum_{X=0}^{N-1} \tilde{F}(X) e^{-\frac{2\pi j m (X+\frac{1}{2})}{2N}} + \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{\pi j m}{2N}} \sum_{X=-N}^{-1} \tilde{F}(X) e^{-\frac{2\pi j m (X+\frac{1}{2})}{2N}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{\pi j m}{2N}} \sum_{X=0}^{N-1} \tilde{F}(X) e^{-\frac{2\pi j m (X+\frac{1}{2})}{2N}} + \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{\pi j m}{2N}} \sum_{X=1}^{N} \tilde{F}(-X) e^{-\frac{2\pi j m (-X+\frac{1}{2})}{2N}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{\pi j m}{2N}} \sum_{X=0}^{N-1} \tilde{F}(X) e^{-\frac{2\pi j m (X+\frac{1}{2})}{2N}} + \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{\pi j m}{2N}} \sum_{X=0}^{N-1} \tilde{F}(-X-1) e^{-\frac{2\pi j m (-X-\frac{1}{2})}{2N}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{\pi j m}{2N}} \sum_{X=0}^{N-1} F(X) e^{-\frac{2\pi j m (X+\frac{1}{2})}{2N}} + \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{\pi j m}{2N}} \sum_{X=0}^{N-1} F(X) e^{-\frac{2\pi j m (-X-\frac{1}{2})}{2N}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{\pi j m}{2N}} \sum_{X=0}^{N-1} F(X) (e^{-\frac{2\pi j m (X+\frac{1}{2})}{2N}} + e^{\frac{2\pi j m (X+\frac{1}{2})}{2N}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{\pi j m}{2N}} \sum_{X=0}^{N-1} F(X) \cos(\frac{2\pi m (X+\frac{1}{2})}{2N})
\end{aligned}
$$

これはベクトルの考え方から言えば，互いに直交するベクトルのうち

> $$\frac{1}{\sqrt{2N}}e^{-\frac{2\pi jm(X+\frac{1}{2})}{2N}},\ \frac{1}{\sqrt{2N}}e^{\frac{2\pi jm(X+\frac{1}{2})}{2N}}$$

で新たな互いに直交するベクトル

> $$\sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{2\pi m(X+\frac{1}{2})}{2N})$$

を構成したことになるが，$m=0$のときは同じベクトルの和になるので補正しなければならない．ここで

> $$C_m=\frac{1}{\sqrt{1+\delta_{0m}}}$$

とおけば，

> $$\sqrt{\frac{2}{N}}C_m\cos(\frac{2\pi m(X+\frac{1}{2})}{2N})(m=0,\ldots,N-1)$$

は正規直交である．そこで，

$$G(m)=\sqrt{\frac{2}{N}}C_m\sum_{X=0}^{N-1}F(X)\cos(\frac{2\pi m(X+\frac{1}{2})}{2N})$$

を**離散コサイン変換(discrete cosine transform (DCT))**と定義する．$G(m)$の逆変換は

$$\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{m=0}^{N-1}C_mG(m)\cos(\frac{2\pi m(X+\frac{1}{2})}{2N})$$

で与えられる．DCTの定義は幾つかあるがここで定義したDCTはDCT-IIと呼ばれるもので画像圧縮の基礎技術として用いられる．

3次元空間の2次元への投影 -平行投影-

- 世界座標(X,Y,Z)を画像座標(x,y)に平行投影. 画像を世界座標 X- Y平面上にあるとし、世界座標のX,Yが画像座標(x, y)と一致しているとする.

$$x = X$$

$$y = Y$$

- 平行投影は3次元から2次元への線形変換
- 3次元空間での直線間の平行性は画像でも平行性は保たれる.

3次元空間の2次元への投影 -射影幾何-

- ２次元射影幾何
  - 座標(u ,v ,w)に対して（ただし u=v =w =0 を除く）線形変換を許し，その比u :v :w が等しいものを同一視する幾何学
  - 特にw≠0 ならば，座標値として、

$$p = \frac{u}{w}$$

$$q = \frac{v}{w}$$

3次元空間の2次元への投影 -透視投影1-

f=1とするとき，世界座標(X,Y,Z)を画像座標(x,y)に移す写像は,

$$x = \frac{X}{Z}$$

$$y = \frac{Y}{Z}$$

このときu=X, v=Y, w=Z とすれば射影幾何であることがわかる

3次元空間の2次元への投影
-透視投影2-

- Zが定数の場合
  - ３次元から2次元への線形写像なので直線は直線に移される
- Zが一定でない場合
  - 直線のパラメータとしてZが採用でき，３次元の座標は

$$X = uZ + X_0$$

$$Y = vZ + Y_0$$

3次元空間の2次元への投影 -透視投影3-

このとき透視投影すると、

$$x = \frac{uZ + X_0}{Z}$$

$$= u + \frac{X_0}{Z}$$

$$y = \frac{vZ + Y_0}{Z}$$

$$= v + \frac{Y_0}{Z}$$

ここで、*1/Z=t*を新たにパラメータとしてとる

$$x = u + X_0 t$$

$$y = v + Y_0 t$$

これは2次元での直線を表現
Z → ∞ で t → 0なので，３次元空間中で平行な直線は２次元画像中では平行ではない．
この端点は，絵画の遠近法では消失点と呼ばれている．
透視投影において対象となる被写体までの距離 Zが，その存在する範囲 δZより十分大きければ，平行投影として取り扱うことが可能