画像処理論 レポート課題２ (回答例)

2004 年 5 月 18 日

命題

$F(\omega_1, \omega_2)$ を $f(t_1, t_2)$ の Fourier 変換とする．このとき $F(\omega_1, \omega_2)$ が以下の性質を満たすとき

$$\begin{cases} F(\omega_1, \omega_2) & |\omega_1| < W_1 \text{かつ } |\omega_2| < W_2 \\ 0 & |\omega_1| \geq W_1 \text{または } |\omega_2| \geq W_2 \end{cases}$$

$f(t_1, t_2)$ は

$$f(t_1, t_2) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} f(n_1 T_1, n_2 T_2) g(t_1 - n_1 T_1, t_2 - n_2 T_2)$$

と表すことが出来ることを示す. ただし,

$$T_1 = \frac{\pi}{W_1}, T_2 = \frac{\pi}{W_2}$$

$$g(t_1 - n_1 T_1, t_2 - n_2 T_2) = \frac{\sin\{W_1(t_1 - n_1 T_1)\}\sin\{W_2(t_2 - n_2 T_2)\}}{W_1(t_1 - n_1 T_1) W_2(t_2 - n_2 T_2)}$$

証明

$|\omega_1| < W_1$ かつ $|\omega_2| < W_2$ において $F(\omega_1, \omega_2)$ の Fourier 級数展開を考えると

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} c_{1,2} e^{-\pi i (\frac{n_1 \omega_1}{W_1} + \frac{n_2 \omega_2}{W_2})}$$

$$c_{1,2} = \frac{1}{4 W_1 W_2} \int_{-W_1}^{W_1} \int_{-W_2}^{W_2} F(\omega_1, \omega_2) e^{\pi i (\frac{n_1 \omega_1}{W_1} + \frac{n_2 \omega_2}{W_2})} d\omega_1 d\omega_2$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1, \omega_2) e^{i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-W_1}^{W_1} \int_{-W_2}^{W_2} F(\omega_1, \omega_2) e^{i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \tag{1}$$

であることを用いると,

$$c_{1,2} = \frac{\pi^2}{W_1 W_2} f(\frac{n_1 \pi}{W_1}, \frac{n_2 \pi}{W_2})$$

となる. つまり

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{W_1 W_2} f(\frac{n_1 \pi}{W_1}, \frac{n_2 \pi}{W_2}) e^{-\pi i (\frac{n_1 \omega_1}{W_1} + \frac{n_2 \omega_2}{W_2})}$$

これに対して Fourier の逆変換を行うと

$$
\begin{aligned}
f(t_1,t_2) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1,\omega_2)e^{i\omega_1 t_1+i\omega_2 t_2}d\omega_1 d\omega_2 && (2)\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-W_1}^{W_1}\int_{-W_2}^{W_2} F(\omega_1,\omega_2)e^{i\omega_1 t_1+i\omega_2 t_2}d\omega_1 d\omega_2 && (3)\\
&= \frac{1}{4W_1W_2}\sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty} f(\frac{n_1\pi}{W_1},\frac{n_2\pi}{W_2})\int_{-W_1}^{W_1}\int_{-W_2}^{W_2} e^{i\omega_1(t_1-\frac{n_1\pi}{W_1})+i\omega_2(t_2-\frac{n_2\pi}{W_2})}d\omega_1 d\omega_2 && (4)\\
&= \sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty} f(\frac{n_1\pi}{W_1},\frac{n_2\pi}{W_2})\frac{\sin\{W_1(t_1-\frac{n_1\pi}{W_1})\}\sin\{W_2(t_2-\frac{n_2\pi}{W_2})\}}{W_1(t_1-\frac{n_1\pi}{W_1})W_2(t_2-\frac{n_2\pi}{W_2})} && (5)\\
&= \sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1T_1,n_2T_2)g(t_1-n_1T_1,t_2-n_2T_2) && (6)
\end{aligned}
$$

以上より示せた.