画像処理論 ： 課題1 (回答例)

平成16年5月19日

1 問題1

1.1 1. 距離 $D_4 = d$ の時の点の個数 N_4 を求めよ

1. $d = 0$

   (x_1, y_1) は (x_0, y_0) のみ

   よって $N_4 = 1(d = 0)$

2. $d > 0$

   $|x_1 - x_0|, |y_1 - y_0|$ はともに0以上の整数. そのためそれらがとり得る値は,

$$\begin{pmatrix} |x_1 - x_0| \\ |y_1 - y_0| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & d-1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & d-1 & d \end{pmatrix}$$

   となる.

   (a) $|x_1 - x_0| \neq 0$ かつ $|y_1 - y_0| \neq 0$ のとき

   $|x_1 - x_0| = i(1 \leq i \leq d-1)$ と置くと, $x_1 = x_0 \pm i$, $y_1 = y_0 \pm (d-i)$ をとりうる.
   $|x_1 - x_0| = i$ を満たす4点が存在する. i の範囲を考えると $4(d-1)$ 個の点が存在する.

   (b) $|x_1 - x_0| = 0$ の時

   $|y_1 - y_0| = d$ であり,$y_1 = y_0 \pm d$ をとり得るので2点存在.

   (c) $|y_1 - y_0| = 0$ の時

   $|x_1 - x_0| = d$ であり,$x_1 = x_0 \pm d$ をとり得るので2点存在.

   以上から $4(d-1) + 2 + 2 = 4d$

よって

$$N_4 = \begin{cases} 4d & d \neq 0 \\ 1 & d = 0 \end{cases}$$

1.2 2. 距離 $D_6 = d$ の時の点の個数 N_6 を求めよ

1. $d = 0$ の時

   $x_1 = x_0$ かつ $y_1 = y_0$ より1個.

2. $d \neq 0$ の時

   (a) $(x_1 - x_0) > 0$ かつ $(y_1 - y_0) > 0$ の時

   $$D_6 = (x_1 - x_0) + (y_1 - y_0) = d$$

   よって $(x_1 - x_0), (y_1 - y_0)$ のとり得る値は以下のようになる.

   $$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & d-1 \\ d-1, & d-2 & \dots, & 1 \end{pmatrix}$$

   よって $d-1$ 個の点が存在する.

   (b) $(x_1 - x_0) < 0$ かつ $(y_1 - y_0) > 0$ の時

      i. $(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0) \geq 0$

      $$D_6 = y_1 - y_0$$

      $D_6 = d$ より y_1 は $y_0 + d$. また条件を満たす x_1 は $(x_1 - x_0) = \{-1, -2, \dots, -(d-1), -d\}$ であるので d 個.

      ii. $(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0) < 0$

      $$D_6 = -(x_1 - x_0)$$

      $D_6 = d$ より x_1 は $x_0 - d$. また条件を満たす y_1 は $(y_1 - y_0) = \{1, 2, \dots, d-1\}$ であるので $d-1$ 個.

   以上より $2d - 1$ 個.

   (c) $(x_1 - x_0) > 0$ かつ $(y_1 - y_0) < 0$ の時

   $(x_1 - x_0) < 0$ かつ $(y_1 - y_0) > 0$ の時との対称性から $2d - 1$ 個.

   (d) $(x_1 - x_0) < 0$ かつ $(y_1 - y_0) < 0$ の時

   $(x_1 - x_0) > 0$ かつ $(y_1 - y_0) > 0$ との対称性から $d - 1$ 個の点が存在する.

   (e) $(x_1 - x_0) = 0$ の時

   $y_1 - y_0 = \pm d$ より 2 個.

   (f) $(y_1 - y_0) = 0$ の時

   $x_1 - y_0 = \pm d$ より 2 個.

以上より $N_6 = 6d$

よって

$$N_6 = \begin{cases} 6d & d \neq 0 \\ 1 & d = 0 \end{cases}$$

1.3　3. 距離 $D_8 = d$ の時の点の個数 N_8 を求めよ

1. $d = 0$

   $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$ となるので 1 点.

2. $d \neq 0$

   (a) $|x_1 - x_0| = d$ かつ $|y_1 - y_0| \neq d$ の時
   x_1, y_1 はそれぞれ $x_1 = x_0 \pm d$, $y_1 = y_0 + i(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(d-1))$ なる値をとり得る．よって $2 \times (2d-1)$ 個の点が存在する．

   (b) $|y_1 - y_0| = d$ かつ $|x_1 - x_0| \neq d$ の時
   x_1, y_1 はそれぞれ $y_1 = y_0 \pm d$, $x_1 = x_0 + i(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(d-1))$ なる値をとり得る．よって $2 \times (2d-1)$ 個の点が存在する．

   (c) $|y_1 - y_0| = d$ かつ $|x_1 - x_0| = d$ の時
   x_1, y_1 はそれぞれ $x_1 = x_0 \pm d$, $y_1 = y_0 \pm d$ をとり得る．よって 4 個の点が存在する．

   以上から $N_8 = 8d$ となる．

よって

$$N_8 = \begin{cases} 8d & d \neq 0 \\ 1 & d = 0 \end{cases}$$

2　問題 2

2.1　問 1

『この場合，原点を出発して他方の端点に連結するのに，操作 0, 1 の 2 種類で出来ることを示せ.』

原点 $(0, 0)$ から，近傍方向 0 と 1 の間の方向の線分を (i, j) とする．このとき $0 < j \leq i$ を満たす．図のように，基底を $(1, 0), (1, 1)$ とすると，

$$(i, j) = \alpha(1, 0) + \beta(1, 1)$$

とおけば，

$$\alpha = i - j, \beta = j$$

となり，α, β は一意に定まる．よって，操作 0 は基底 $(1, 0)$ に，操作 1 は基底 $(1, 1)$ に対応するので，操作 0, 1 の 2 種類で線分を構成できる．なお，このときの線分の長さ（距離）は

$$\max(i, j) = i = \alpha + \beta$$

となる．最小の距離を通る経路は，この操作 0 と 1 で構成されることになる．

このような最小の距離をとり得る経路は一般には複数あり得るが直線上の任意の座標 (x, y) と離散的な格子点 (i, j) との Euclid 距離を 1 以下となるような制限のもとで離散的な線分を求める．

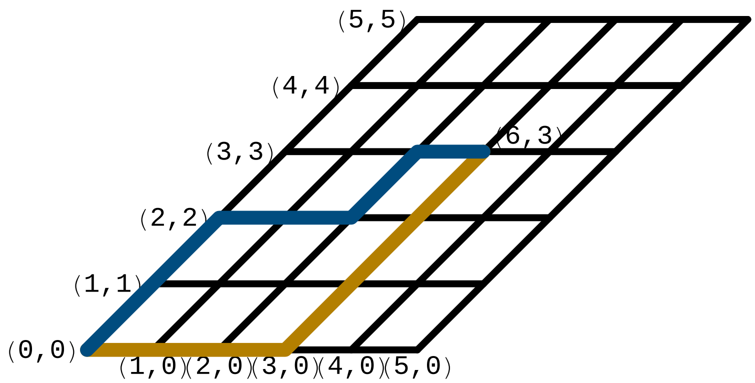

図 1: 傾き 0 から 1 の範囲

2.2 問 2

『格子のサイズが 6×6 のとき（採り得る座標値が $(0,0)$ から $(5,5)$），0 と 1 の間の方向で離散的な線分がとり得る傾きを小さい方から順に記せ．』

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

一般に正の整数 n に対して，$0 < q \le n, 0 \le p \le n$ なる既約分数 p/q を小さい順番に並べたもの（特に $p \le q$ の場合）を Farey 数列という．$n+1 \times n+1$ の正方格子では，その離散的な線分がとり得る傾きは n 次の Farey 数列となる．

2.3 問 3

『上記のアルゴリズムでの操作で得られた線が傾き p/q であることを示せ．』

連分数が $[s_1]$ であるとき，すなわち $p/q = 1/s_1$ のとき x 方向に s_1，y 方向に 1 であるので，傾きは $1/s_1$．
$p/q = [s_1, \ldots, s_m]$ $(m > 1)$ とする．このとき $1 \le i < m$ に対して，連分数 $[s_{i+1}, \ldots, s_m] = r_i/r_{i-1}$ となる．r_i/r_{i-1} は既約であるので，操作 0 は回数 分母 $-$ 分子 $= r_{i-1} - r_i$，操作 1 は回数 分子 $= r_i$ 行われる．このときアルゴリズムに従えば，$[s_i, \ldots, s_m]$ での操作 0 と 1 の回数はそれぞれ

$$(r_{i-1} - r_i)(s_i - 1) + r_i(s_i - 2) = (s_i - 1)r_{i-1}s_i - r_i$$
$$r_i + r_{i-1} - r_i = r_{i-1}$$

となる．一方，分数は通分すると

$$\frac{1}{s_i - \dfrac{r_i}{r_{i-1}}} = \frac{r_{i-1}}{s_i r_{i-1} - r_i}$$

である．この分数は既約であるので，分子と分母が，それぞれこれより操作 0 と 1 の回数を求めれば一致する．よって，このアルゴリズムを $[s_1, \ldots, s_m]$ まで繰り返したときに対応する分数の値が p/q であることから，線の傾きも p/q である．

2.4　問 4

『5/7 の離散的線分を生成する操作を求めよ.』

$$\frac{5}{7} = [2, 2, 3]$$

であるので，アルゴリズムに従えば

$$0110111$$

となる．このアルゴリズムでは，求める傾きが $1/s_1$ と $1/(s_1 - 1)$ の間にあるので，これらの微小線分で近似する．まず $1/s_1$ で低めに近似する．その補正として剰余項である $1/s_2$ に従って，$1/(s_1 - 1)$ によって傾きを大きくする．さらにそれでも補正されない分を高次の $s_3, s_4, \ldots$ を用いて補正を行う．
図 2 には，$[2], [2, 2], [2, 2, 3]$ と高次まで考慮すると線分の精度が良くなって行くさまが見て取れる．

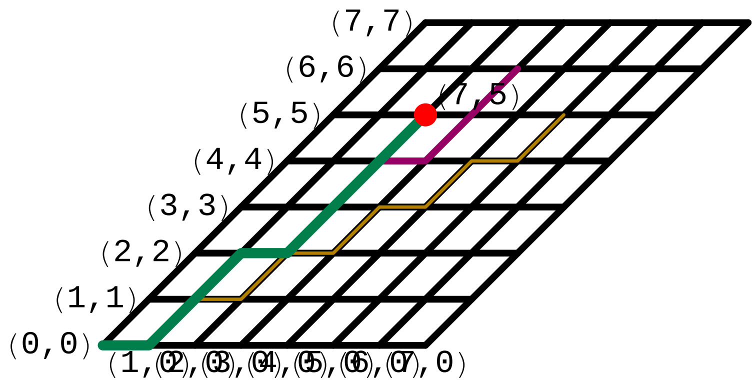

図 2: 線分の近似