電力回路

第11回目

対称座標法 2

<三相変圧器でΔ結線が用いられる理由>

対称座標法

- 三相変圧器でΔ結線が用いられる理由
  - 磁化曲線の近似式

$$i = k_1\phi + k_3\phi^3 + k_5\phi^5 \cdots$$

半波対称なので
偶数次なし

- とりあえず3次の成分まで考えよう
  - 磁束

$$\phi = \Phi \sin \omega t$$

  - 電流

$$\begin{aligned} i &= k_1\Phi \sin \omega t + k_3\left(\Phi \sin \omega t\right)^3 \\ &= k_1\Phi \sin \omega t + \left(k_3\Phi\right)^3 \sin^3 \omega t \\ &= k_1\Phi \sin \omega t + \left(k_3\Phi\right)^3 \tfrac{-\sin 3\omega t + 3\sin \omega t}{4} \\ &= \left[\Phi k_1 + \left(k_3\Phi\right)^3 \tfrac{3}{4}\right]\sin \omega t - \left(k_3\Phi\right)^3 \tfrac{1}{4}\sin 3\omega t \end{aligned}$$

3次高調波

基本波

対称座標法

- 三相変圧器でΔ結線が用いられる理由
  - Δ結線に流れる電流
    - 磁化特性により，磁束が発生させる電流

$$\begin{cases} i_{ab} = \sqrt{2}I_1 \sin\omega t - \sqrt{2}I_3 \sin 3\omega t \\ i_{bc} = \sqrt{2}I_1 \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) - \sqrt{2}I_3 \sin 3\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ \quad = \sqrt{2}I_1 \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) - \sqrt{2}I_3 \sin 3\omega t \\ i_{ca} = \sqrt{2}I_1 \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) - \sqrt{2}I_3 \sin 3\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \\ \quad = \sqrt{2}I_1 \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) - \sqrt{2}I_3 \sin 3\omega t \end{cases}$$

    - 回転ベクトル表示

$$\begin{cases} \dot{I}_{ab} = \sqrt{2}I_1 \exp j\omega t - \sqrt{2}I_3 \exp j3\omega t \\ \dot{I}_{bc} = \sqrt{2}I_1 \exp j\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) - \sqrt{2}I_3 \exp j3\omega t \\ \dot{I}_{ca} = \sqrt{2}I_1 \exp j\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) - \sqrt{2}I_3 \exp j3\omega t \end{cases}$$

対称座標法

- 三相変圧器でΔ結線が用いられる理由
  - Δ結線に流れる電流
    - 回転ベクトル表示

但し $\alpha = \exp\left(j \frac{2}{3}\pi\right)$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{ab} \\ \dot{I}_{bc} \\ \dot{I}_{ca} \end{bmatrix} = \sqrt{2} I_1 \exp j\omega t \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} - \sqrt{2} I_3 \exp j3\omega t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

    - 対称座標表示

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{\Delta 0} \\ \dot{I}_{\Delta 1} \\ \dot{I}_{\Delta 2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2} I_1 \exp j\omega t}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} - \frac{\sqrt{2} I_3 \exp j3\omega t}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

対称座標法

- 三相変圧器でΔ結線が用いられる理由
  - Δ結線に流れる電流
    - 対称座標表示

但し $\alpha = \exp\left(j\frac{2}{3}\pi\right)$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{\Delta 0} \\ \dot{I}_{\Delta 1} \\ \dot{I}_{\Delta 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}I_1 \exp j\omega t \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{2}I_3 \exp j3\omega t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

各相に同相で流れる三次高調波成分は，
Δ結線内を循環。端子電流には現れない

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{ab} \\ \dot{I}_{bc} \\ \dot{I}_{ca} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{ca} \\ \dot{I}_{ab} \\ \dot{I}_{bc} \end{bmatrix} = \sqrt{2}I_1 \exp j\omega t \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

めでたし
めでたし

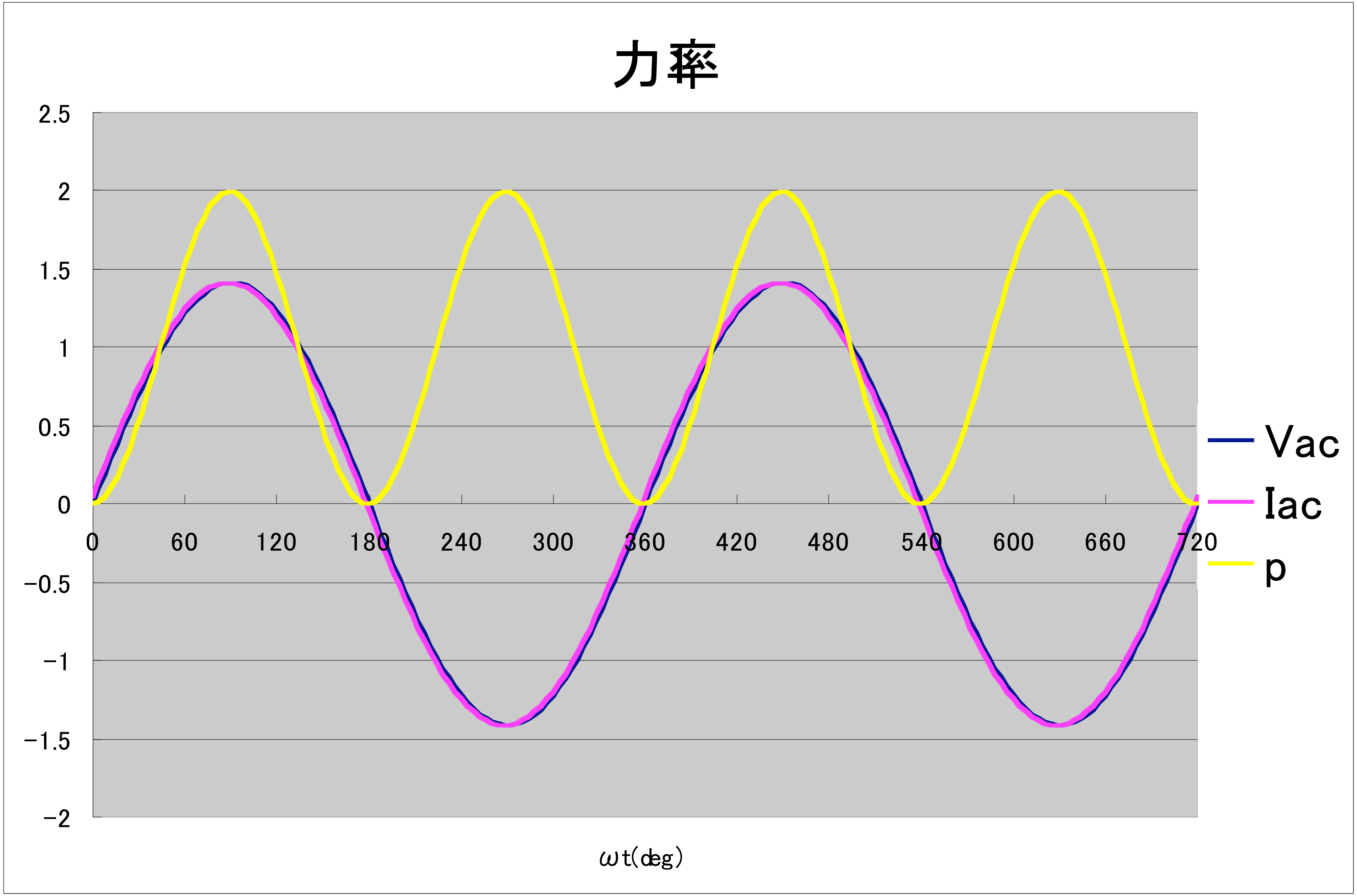
交流回路における電力について

- 電圧 $v = \sqrt{2}V \sin \omega t$
- 電流 $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$
  - 電圧との位相差φを力率角（遅れを正）
- (瞬時)電力

$$
\begin{aligned}
p &= vi \\
&= \sqrt{2}V \sin \omega t \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi) \\
&= VI[\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]
\end{aligned}
$$

直流成分　　交流成分（2倍周波数）

単相交流回路における瞬時電力の計算例



交流回路における電力について

- 有効電力
  - 瞬時電力の時間平均値
    - 平均する時間Tは一周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

    - 一周期の平均電力

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T VI\left[\cos\varphi - \cos\left(2\omega t - \varphi\right)\right]dt$$

$$= VI\cos\varphi$$

交流成分の平均値は0

交流回路における電力について

- 無効電力
  - 有効電力のcosをsinに変えたもの
    - 平均する時間Tは一周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

    - 有効電力
      - Cosとsinの入れ替え

$$P = VI\cos\varphi$$

$$Q = VI\sin\varphi$$

    - 90度遅れた電流に対する電力と考えてもよい

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{2}V\sin\omega t\sqrt{2}I\sin\left(\omega t - \varphi - \tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= VI\left[\cos\left(-\varphi - \tfrac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2\omega t - \varphi - \tfrac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= VI\left[\sin\varphi - \sin\left(2\omega t - \varphi\right)\right] \end{aligned}$$

交流回路における電力について

- 電圧・電流を回転ベクトルとして考える
  - 電圧 $\dot{V} = V\exp(j\omega t)$
  - 電流 $\dot{I} = I\exp(j[\omega t - \varphi])$
  - 電力 $\dot{P} = \dot{V}\dot{I}$

$$
\begin{aligned}
\dot{P} &= \dot{V}\dot{I} \\
&= V\exp(j\omega t)I\exp(j[\omega t - \varphi]) \\
&= VI\exp(j[2\omega t - \varphi])
\end{aligned}
$$

電圧・電流のベクトルの絵

- そのまま掛けただけでは，交流分しか出てこない
- 電圧・電流のどちらかの複素共役をとる
  - 回転成分jωtの相殺が可能

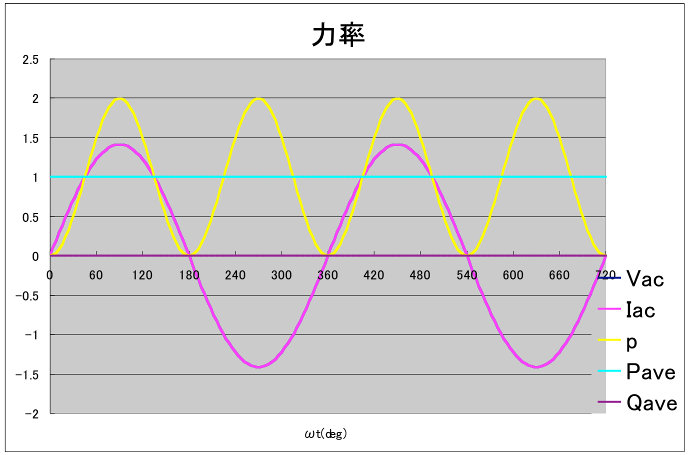
交流回路における電力について

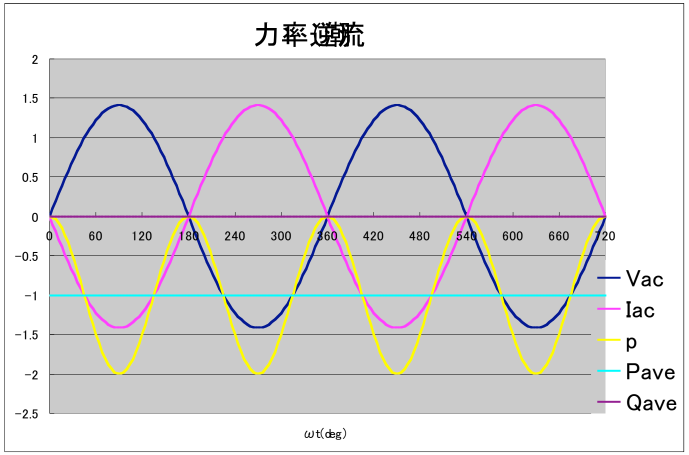
- 電力の複素表示
  - 電流の複素共役 $\bar{\dot{I}} = I\exp\left(-j[\omega t-\varphi]\right)$
  - 電力 $\dot{S} = \dot{V}\bar{\dot{I}}$

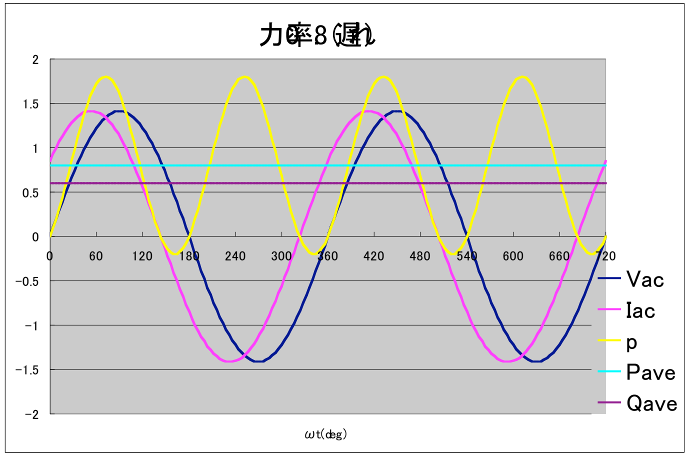
$$
\begin{aligned}
&= V\exp\left(j\omega t\right)I\exp\left(-j[\omega t-\varphi]\right)\\
&= VI\exp\left(j\varphi\right)\\
&= VI\left[\cos\varphi + j\sin\varphi\right]\\
&= P + jQ
\end{aligned}
$$

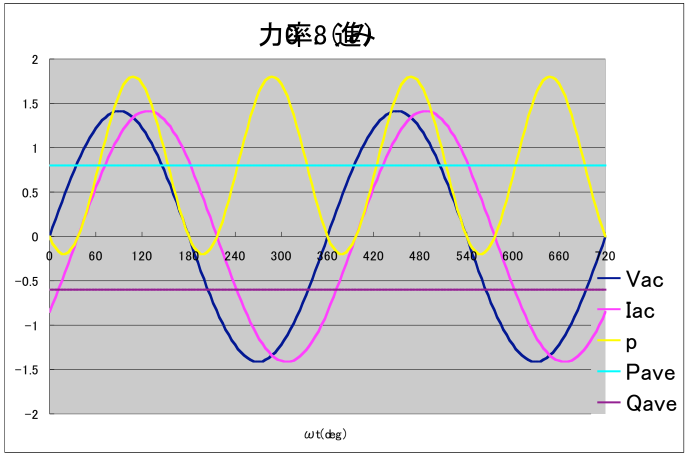
- 複素電力を皮相電力という
  - 大きさは，電圧・電流の実効値の積
- 実分が有効電力，虚分が無効電力に相当

交流回路における電力の計算例









高調波を含む交流回路の電力

- 第3次高調波成分を考える
  - 電圧 $v = \sqrt{2}V_1 \sin\omega t + \sqrt{2}V_3 \sin 3\omega t$
  - 電流 $i = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + \sqrt{2}I_3 \sin(3\omega t - \varphi_3)$
  - 電力

$$
\begin{aligned}
p &= vi \\
&= \left[\sqrt{2}V_1 \sin\omega t + \sqrt{2}V_3 \sin 3\omega t\right]\left[\sqrt{2}I_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + \sqrt{2}I_3 \sin(3\omega t - \varphi_3)\right] \\
&= V_1 I_1\left[\cos\varphi_1 - \cos(2\omega t - \varphi_1)\right] + V_1 I_3\left[\cos(-2\omega t + \varphi_3) - \cos(4\omega t - \varphi_3)\right] \\
&\quad + V_3 I_1\left[\cos(2\omega t + \varphi_1) - \cos(4\omega t - \varphi_1)\right] + V_3 I_3\left[\cos\varphi_3 - \cos(6\omega t - \varphi_3)\right]
\end{aligned}
$$

高調波を含む交流回路の電力

- 有効電力
  - 瞬時電力の時間平均値
    - 平均する時間Tは基本波一周期　$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\int_0^T p dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \{V_1 I_1 [\cos\varphi_1 - \cos(2\omega t - \varphi_1)] \\
&\quad + V_1 I_3 [\cos(-2\omega t + \varphi_3) - \cos(4\omega t - \varphi_3)] \\
&\quad + V_3 I_1 [\cos(2\omega t + \varphi_1) - \cos(4\omega t - \varphi_1)] \\
&\quad + V_3 I_3 [\cos\varphi_3 - \cos(6\omega t - \varphi_3)]\} dt \\
&= V_1 I_1 \cos\varphi_1 + V_3 I_3 \cos\varphi_3
\end{aligned}
$$

おなじ周波数成分の電圧・電流積の和が電力として現れる

高調波を含む交流回路の電力

- 電圧・電流を回転ベクトルとして考える
  - 電圧 $\dot{V} = V_1 \exp(j\omega t) + V_3 \exp(j3\omega t)$
  - 電流 $\dot{I} = I_1 \exp(j[\omega t - \varphi_1]) + I_3 \exp(j[3\omega t - \varphi_3])$
  - 電力

$$
\begin{aligned}
\dot{S} &= \dot{V}\bar{\dot{I}} \\
&= [V_1 \exp(j\omega t) + V_3 \exp(j3\omega t)] \\
&\quad [I_1 \exp(-j[\omega t - \varphi_1]) + I_3 \exp(-j[3\omega t - \varphi_3])] \\
&= V_1 I_1 \exp(j\varphi_1) + V_3 I_3 \exp(j\varphi_3) \\
&\quad + V_1 I_3 \exp(-j[2\omega t - \varphi_3]) + V_3 I_1 \exp(j[1\omega t - \varphi_1])
\end{aligned}
$$

回転ベクトルにしたところできれいには表せない・・・
基本波周期で平均をとる必要あり

三相交流回路の電力

- 三相平衡電圧・電流の実数表示に対して
  - 電圧 $V_a = V_b = V_c = V$

    $\theta_a = \theta_b = \theta_c = 0$

    $$\begin{cases} v_a = \sqrt{2}V\sin(\omega t) \\ v_b = \sqrt{2}V\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ v_c = \sqrt{2}V\sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$$

  - 電流 $I_a = I_b = I_c = I$

    $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi$

    $$\begin{cases} i_a = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi) \\ i_b = \sqrt{2}I\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \varphi\right) \\ i_c = \sqrt{2}I\sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi + \varphi\right) \end{cases}$$

  - 瞬時電力

$$\begin{aligned} p &= v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \\ &= VI\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi - \cos\left(2\omega t + \frac{4}{3}\pi - \varphi\right)\right. \\ &\quad \left. + \cos\varphi - \cos\left(2\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right)\right] \\ &= 3VI\cos\varphi \end{aligned}$$

直流量となり，交流成分は含まれない

三相交流回路の電力

- 三相不平衡電圧・電流の実数表示に対して
  - 電圧
  - 電流

$$\begin{cases} v_a = V_a \sin(\omega t + \theta_a) \\ v_b = V_b \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \theta_b) \\ v_c = V_c \sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi + \theta_c) \end{cases} \qquad \begin{cases} i_a = I_a \sin(\omega t + \varphi_a) \\ i_b = I_b \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \varphi_b) \\ i_c = I_c \sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi + \varphi_c) \end{cases}$$

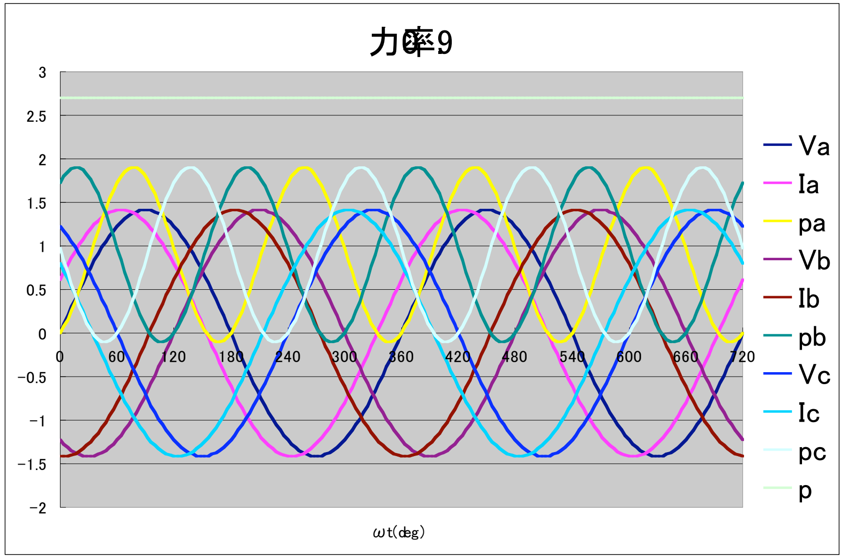
  - 瞬時電力

$$\begin{aligned} p &= v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \\ &= V_a I_a [\cos(\varphi_a - \theta_a) - \cos(2\omega t - \varphi_a + \theta_a)] \\ &\quad + V_b I_b [\cos(\varphi_b - \theta_b) - \cos(2\omega t - \varphi_b + \theta_b)] \\ &\quad + V_c I_c [\cos(\varphi_c - \theta_c) - \cos(2\omega t - \varphi_c + \theta_c)] \\ &= V_a I_a \cos(\varphi_a - \theta_a) + V_b I_b \cos(\varphi_b - \theta_b) + V_c I_c \cos(\varphi_c - \theta_c) \\ &\quad + A \cos(2\omega t + B) \end{aligned}$$

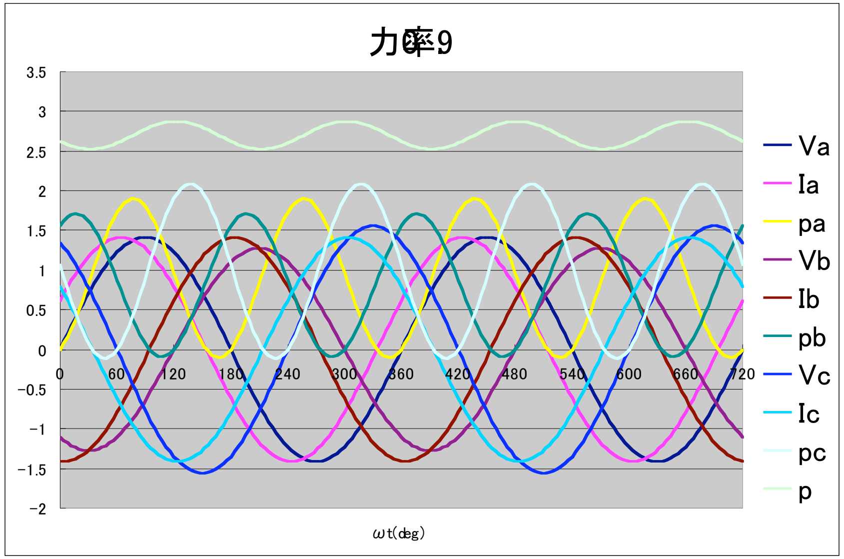
不平衡分があると，交流成分が現れる（単相と同等）

三相交流回路電力の計算例

平衡



不平衡



三相交流回路の電力

- 電圧・電流をベクトルで考える
  - 電圧
  - 電流

$$\begin{cases} \dot{V}_a = V_a \exp j\left(\omega t + \theta_a\right) \\ \dot{V}_b = V_b \exp j\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \theta_b\right) \\ \dot{V}_c = V_c \exp j\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi + \theta_c\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{I}_a = I_a \exp j\left(\omega t + \varphi_a\right) \\ \dot{I}_b = I_b \exp j\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \varphi_b\right) \\ \dot{I}_c = I_c \exp j\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi + \varphi_c\right) \end{cases}$$

  - 電力

$$\begin{bmatrix} \dot{S}_a \\ \dot{S}_b \\ \dot{S}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_a \overline{\dot{I}}_a \\ \dot{V}_b \overline{\dot{I}}_b \\ \dot{V}_c \overline{\dot{I}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_a \\ P_b \\ P_c \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{bmatrix}$$

相互分は考えなくともよい

三相交流回路の電力

- 三相平衡電圧･電流の場合
  - 電圧 $V_a = V_b = V_c = V$
    $\theta_a = \theta_b = \theta_c = 0$
    $$\begin{cases} \dot{V}_a = V \exp j(\omega t) \\ \dot{V}_b = V \exp j\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ \dot{V}_c = V \exp j\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$$
  - 電流 $I_a = I_b = I_c = I$
    $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi$
    $$\begin{cases} \dot{I}_a = I \exp j(\omega t + \varphi) \\ \dot{I}_b = I \exp j\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \varphi\right) \\ \dot{I}_c = I \exp j\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi + \varphi\right) \end{cases}$$
  - 電力

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dot{S}_a + \dot{S}_b + \dot{S}_c \\ &= V_a I_a \exp j(\theta_a - \varphi_a) + V_b I_b \exp j(\theta_b - \varphi_b) + V_c I_c \exp j(\theta_c - \varphi_c) \\ &= 3VI[\cos\varphi + j\sin\varphi] \end{aligned}$$

三相交流回路における電力の対称座標表示

- 三相交流における皮相電力

$$
\begin{aligned}
\dot{S} &= P + jQ \\
&= \dot{S}_a + \dot{S}_b + \dot{S}_c \\
&= \left(P_a + jQ_a\right) + \left(P_b + jQ_b\right) + \left(P_c + jQ_c\right) \\
&= \dot{V}_a \bar{\dot{I}}_a + \dot{V}_b \bar{\dot{I}}_b + \dot{V}_c \bar{\dot{I}}_c
\end{aligned}
$$

対称座標表示することを考える

$$
\begin{aligned}
\dot{S} &= 3 \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \bar{\dot{I}}_0 \\ \bar{\dot{I}}_1 \\ \bar{\dot{I}}_2 \end{bmatrix} \\
&= 3\left(\dot{S}_0 + \dot{S}_1 + \dot{S}_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{S}_0 = P_0 + jQ_0 = 3\dot{V}_0 \bar{\dot{I}}_0 \\
\dot{S}_1 = P_1 + jQ_1 = 3\dot{V}_1 \bar{\dot{I}}_1 \\
\dot{S}_2 = P_2 + jQ_2 = 3\dot{V}_2 \bar{\dot{I}}_2
\end{cases}
$$

三相交流回路における電力の対称座標表示

- 三相交流における皮相電力

$$\begin{cases} \dot{V}_0 = V_0 \exp j(\omega t + \theta_0) \\ \dot{V}_1 = V_1 \exp j(\omega t + \theta_1) \\ \dot{V}_2 = V_2 \exp j(\omega t + \theta_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{I}_0 = I_0 \exp j(\omega t + \varphi_0) \\ \dot{I}_1 = I_1 \exp j(\omega t + \varphi_1) \\ \dot{I}_2 = I_2 \exp j(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{S}_0 = P_0 + jQ_0 = 3\dot{V}_0\overline{\dot{I}}_0 = 3V_0 I_0 \exp j(\theta_0 - \varphi_0) \\ \dot{S}_1 = P_1 + jQ_1 = 3\dot{V}_1\overline{\dot{I}}_1 = 3V_1 I_1 \exp j(\theta_1 - \varphi_1) \\ \dot{S}_2 = P_2 + jQ_2 = 3\dot{V}_2\overline{\dot{I}}_2 = 3V_2 I_2 \exp j(\theta_2 - \varphi_2) \end{cases}$$